

奧氏初等微積分學

William F. Osgood 著

張方潔 譯

商務印書館發行

原 序

是書爲著者所寫微積分學初步 (A First Course in the Differential and Integral Calculus) 一書之修正本。於編述方針，大致相同。但選材較爲充實，而習題之有益於中材學生者亦增多不少。

是書目標有二，即論述微積分於幾何及物理首要問題之應用，並示明微積分學蘊義之究竟。

欲達前一目標，須示學生以種種物理構像。學生於物理學雖尙乏專門知識，但若明白曉喻之，當能了解其最簡單之概念。因此本書每引用一新物理觀念時，極注意其究竟爲何，且於算學如何可應用於當前之問題一點，莫不與以確切之指示。

在另一方面，若學生欲有應用微積分之能力，則於其各部，須有貫澈之練習。故特設相當習題，其先後以難易爲次序。

微積分學之基礎，在極限值之概念。但其理論非屬於初等書籍之範疇。至求極限值之方法，則於其對於微積分基本定理之證明及幾何學與物理問題之表述中，學生自能領會之。

本書所述前後可以伸縮。教師於各章教材，得如己意增減之。如在定積分一章，可從各論點作合理之挑選，變易其次序，或刪除某節，均無礙於大體。在力學及無定積分等章亦然。凡諸刪節，雖各有可取，但對於多數教師，恐無一能謂其已臻於至善者。此完全視教師自己之方式如何而已。此書又顧及學生資質之高下，善教者當能助其優良學生，達於其天資之所能及，而於才分稍次者，亦無不合。因每易一題材時，新有論點之敘述，極為簡明也。

是書為習工程、物理及純粹算學者而寫。現代微積分學設敘述得宜，其最善之方法當為工程或物理學生之所能及，使其有此重要工具，以了解其自己所有之專門問題。在另一方面，習純粹算學者，亦應知微積分學與物理之關係，蓋後者乃此算學大分支之所由來也。

目 次

第一章 緒論

1. 函數 1
2. 續前, 函數之普遍定義 11

第二章 代數函數之微分法 普通定理

1. 微導數之定義 13
2. x^n 之微導數 16
3. 常數之微導數 20
4. \sqrt{x} 之微分法 21
5. 關於極限值之三定理 無限值 22
6. 微分法之普通公式 30
7. 微分法之普通公式(續) 33
8. 微分法之普通公式(完) 36
9. 陰代數函數之微分法 40

第三章 應用問題

1. 切線及法線 48

2. 最大值及最小值	52
3. 續上, 叻變數	55
4. 遞增及遞減函數	62
5. 曲線作法	66
6. 相對最大及相對最小值, 屈曲點	70
7. 必要條件及充分條件	73
8. 速率; 率	75

第四章 微變數及微分數

1. 微變數	84
2. 續上, 基本定理	90
3. 微分數	95
4. 微分法術	99
5. 續上, 複合函數之微分法	104

第五章 三角函數

1. 弧度	109
2. $\sin x$ 之微分法	113
3. 幾個極限值	116
4. 在前微分法之評論	120
5. $\cos x, \tan x$ 等之微分法	121
6. 題解例	122

7. 最大值及最小值	126
8. 在極座標系內之切線	133
9. 弧段之微分數	139
10. 變率及速率	143

第六章 對數及指數

1. 對數	151
2. 對數之微分法	156
3. 極限值 $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$	160
4. 複利定律	161
5. e^x 之微分法	162
6. 函數 x^x 之圖線	164
7. 已習過之微分法公式	166

第七章 應用問題

1. 計算數值之問題	171
2. 方程式之解法, 已知圖線	171
3. 插入法	175
4. 牛頓方法	177
5. 表之直接用法	182
6. 續近法	185
7. 計算各步表格之排列	189

8.	代數方程式.....	192
9	續上,三次式及四次式.....	194
10.	作曲線.....	200

第八章 逆三角函數

1.	逆函數.....	213
2.	逆三角函數.....	216
3.	題解例.....	222
4.	續上,數值計算.....	226
5.	應用題.....	229

第九章 積分法

1.	曲線下之面積.....	233
2.	積分式.....	237
3.	普通定理.....	240
4.	積分法之特殊公式.....	244
5.	代替積分法.....	245
6.	變換積分法.....	249
7.	部分積分法.....	253
8.	表之用法.....	255
9.	曲線之弧長.....	259
10	在極座標系內之面積.....	262

11. 在極座標系內之弧長.....	266
--------------------	-----

第十章 曲度 展伸線

1. 曲度	269
2. 吻合圓	273
3. 展伸線	275
4. 展伸線之屬性	279

第十一章 擺線

1. 擺線之方程式	283
2. 擺線之屬性.....	285
3. 圓外擺線及圓內擺線.....	287

第十二章 定積分式

1. 在上曲線下面積之求法	292
2. 曲線下面積之新式子.....	294
3. 積分學之基本定理	298
4. 回轉體之體積	301
5. 回轉面之面積	306
6. n 個質點之重心.....	312
7. 回轉固體之重心	313
8. 特氏定理	317
9. 應用	321

10.	平面面積之重心	324
11.	流體壓力	330
12.	續上	333
13.	體積	336
14.	轉動慣量	341
15.	續上	346
16.	普遍定理	349
17.	轉動之動能	351
18.	引力之吸引	352
19.	定積分定義之申論	356
20.	一變易力所作之功	358
21.	平均值	361
22.	數值計算,新松氏規則	363

第十三章 力學

1.	運動律	368
2.	力之絕對單位	374
3.	彈性弦	378
4.	一個運動問題	380
5.	續上,時間	384
6.	單諧運動	385
7.	物體在地心引力下之運動	390

8. 限制運動	394
9. 動能及功	398
10. 受媒質阻止下之運動	400
11. 阻力之圖線	404
12. 拋射物之運動	406

第十四章 無盡級數

1. 等比級數	410
2. 無盡級數之定義	411
3. 收斂級數之測驗法	413
4. 發散級數	417
5. 比值測驗法	418
6. 交替級數	423
7. 有正負項之級數; 普通例	424
8. 對數之級數	429
9. 對數值之計算	432
10. 表值之計算	435
11. 對數值更準確之計算法	435
12. π 之計算	437
13. 兩項式之級數	440
14. 橢圓線之弧段	442
15. 單擺	444

16.	應用數學上之約計公式	445
17.	續前, 關係單擺之問題	449
18.	推氏定理	452
19.	e^x , $\sin x$, $\cos x$ 等之級數	453
20.	級數之代數運算	454
21.	利用級數之積分法	458
22.	推氏剩餘定理之證明	459
23.	e^x , $\sin x$ 及 $\cos x$ 三函數展開之證明	463
24.	兩項式定理之證明	465

第十五章 偏微分法

1.	含有多個變數之函數	468
2.	偏微導數	469
3.	幾何說明. 切面及其法線	471
4.	高次微導數	473
5.	微分數	476

索 引

奧氏初等微積分學

第一章

緒論

微積分學創始於十七世紀，爲英國算學、天文、兼物理學家牛頓 (Newton)，及德國哲學家來布尼茲 (Leibniz) 兩氏所發明。其於幾何及論理物理學上之效用，極關重要。蓋現代算學及物理學之發展，皆有賴於微積分之發明焉。

1. 函數 (function). 在算學上，函數 一字，指含有一個或多個變數 (variable) 之式子而言。例如

$$(a) \quad x^3, \quad 2x^3 - 3x + 1;$$

$$(b) \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$(c) \quad \frac{x^2}{a+x}, \quad \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$(d) \quad \sin x, \quad \log x, \quad \tan^{-1} x.$$

在 (b) 下第二式含有兩個數字 a 及 x 。 x 爲變數， a 值設爲不變，謂之常數 (constant)。 如

$$ax + b$$

一式爲 x 之函數，與 a, b 兩常數有關。

凡函數可用符號或縮寫式表示之。如 $f(x), f(x, y)$ (讀如：“ x 之函數”，“ x 及 y 之函數”)，亦有常用 F, ϕ, Φ ，等字母者*。例如方程式

$$(1) \quad f(x) = 2x^3 - 3x + 1$$

是表示函數 $f(x)$ 爲 $2x^3 - 3x + 1$ 。又

$$(2) \quad \phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

是表示函數 $\phi(x, y, z)$ 爲 $x^2 + y^2 + z^2$ 。

現先以含有一變數之函數如上 (1) 式言之。於此 x 稱謂自變數 (independent variable)，因其可有任何值。其函數值或函數稱謂被變數 (dependent variable)，常用一單獨字母表示之。

如

$$y = f(x),$$

或

$$y = 2x^3 - 3x + 1.$$

圖線 (graphs)。含有一變數之函數，

$$y = f(x),$$

可用幾何圖形表示之。此於研究函數之特性上，極爲便利。

通常自變數以 x 坐標，即橫坐標表示之。被變數以 y 坐標，即縱坐標表示之。如函數

$$f(x) = x^3$$

之圖線即爲

$$y = x^3$$

一式所有之曲線。

* 在讀時，欲區別 $f(x)$ 及 $F(x)$ ，可以大小分別呼之。

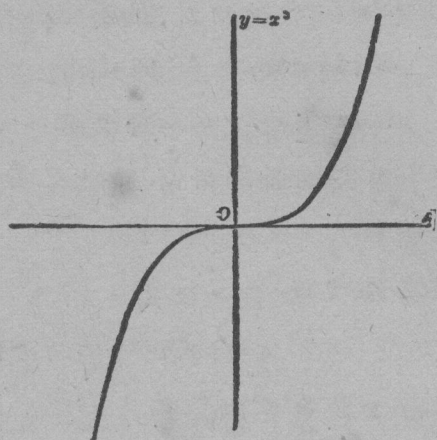


圖 1

於幾何及物理上函數之例。幾何學及物理學上各種普通公式，均屬於簡單函數。如圓之面積公式為

$$A = \pi r^2,$$

r 為圓之半徑， π 為一常數 3.1416。於此 r 為一自變數，——可有任何正值，——而 A 為 r 之函數，或被變數。

再如下列三種圓體，其體積為

(a) $V = \frac{4}{3} \pi r^3,$ 圓球體；

(b) $V = \pi r^2 h,$ 圓柱體；

(c) $V = \frac{\pi}{3} r^2 h,$ 圓錐體。

在 (b) 及 (c) 兩公式內， h 為體高， r 為底面半徑；在此， V 為兩自變數 r 及 h 之函數。

又上述各種圓體之面積為

$$(a) \quad S = 4\pi r^2, \quad \text{圓球面};$$

$$(b) \quad S = 2\pi r h, \quad \text{圓柱面};$$

$$(c) \quad S = \pi r l, \quad \text{圓錐面}.$$

在最後一式之 l 爲圓錐面之斜高。於此又得三個含有一變數或二變數之函數。

自由落體之公式爲

$$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

s 爲落下之距離, t 爲落下之時間; g 爲一常數, 因其於某種時間及長度單位下, 其值不變。在此 t 爲一自變數, 而 s 爲 t 之函數。若由此公式解 t 而得

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}},$$

則 s 爲一自變數, 而 t 爲其函數。

常有以一個方程式表示兩個變數之關係者, 如

$$pv = c$$

一式是表示在同一溫度時, 一氣體之壓力 p 與其體積 v 之關係。在此可以 p 爲自變數, 也可以 v 爲自變數, 視由上式解何者而定。如解 v 時,

$$v = \frac{c}{p},$$

則 p 爲自變數, v 爲其函數。解 p 時,

$$p = \frac{c}{v},$$

則 v 爲自變數, p 爲其函數.

自變數值之限制. 自變數之值常限制在某區間內. 如

在函數
$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

內之 x , 其值必在 $-a$ 與 a 之間,

$$-a \leq x \leq a,$$

因否則 $a^2 - x^2$ 爲負, 而上式爲無意義.

又如上述各種幾何形體公式中, r , h 及 l 三值必爲正數. 因凡形體如一圓球之體積, 無有爲零, 或其半徑爲負數者.

有時自變數必爲一正整數. 如下列幾何級數前 n 項之

和,
$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}.$$

在此,
$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

若使 $a=1$, $r=\frac{1}{2}$, 則此級數爲

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

於是

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

即得一函數 S_n , 其自變數 n 爲一正整數.

在微積分學上, 凡函數所有自變數之變易區域爲連續.

如在含有一變數 x 之函數, x 之變易區域爲

$$a \leq x \leq b \quad \text{或} \quad 0 < x.$$

通常用英文字母中 x, y, z 等以代表變數。而以 a, b, c 等代表常數。如在

$$ax^2 + bx + c$$

一式內, a, b, c 爲常數, x 則爲變數。

多值函數 (multiple-valued functions); 主值 (principal-value).

以上所舉各例之式子, 均爲單值 (single valued) 函數。卽自變數 x 在某一值時, 該變數之函數亦只有一值。然一函數可有多值, 如有函數 y 其式爲

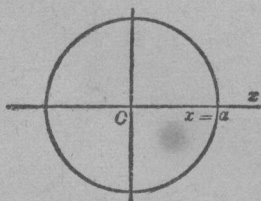
$$x^2 + y^2 = a^2.$$

於此,

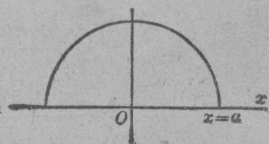
$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2},$$

卽 y 有兩值。但此函數 y , 能用兩個單值函數完全表出之:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{及} \quad y = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$



$x^2 + y^2 = a^2$ 之圖線



$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 之圖線

圖 2

而此兩函數卽爲原有函數之兩值。

學者應知根號 $\sqrt{\quad}$ 係指正根; 非可隨意指根之或正或負者。欲指負根, 根號前應置一負號, 如 $-\sqrt{\quad}$ 。故 $\sqrt{4} = 2$, 並非 -2 。其意在指出兩根中之正根, 而不及負根。