奧氏初等微積分學

William F. Osgood 著
張 方 潔 譯

商務印書館發行

原　序

是書爲著者所寫微積分學初步(A First Course in the Differential and Integral Calculus)一書之修正本.於編述方針,大致相同.但選材較爲充實,而習題之有益於中材學生者亦增多不少.

是書目標有二,卽論述微積分於幾何及物理首要問題之應用,並示明微積分學蘊義之究竟.

欲達前一目標,須示學生以種種物理構像.學生於物理學雖尙乏專門知識,但若明白曉喻之,當能了解其最簡單之概念.因此本書每引用一新物理觀念時,極注意其究竟爲何,且於算學如何可應用於當前之問題一點,莫不與以確切之指示.

在另一方面,若學生欲有應用微積分之能力,則於其各部,須有貫澈之練習.故特設相當習題,其先後以難易爲次序.

微積分學之基礎在極限值之概念.但其理論非屬於初等書籍之範疇.至求極限值之方法,則於其對於微積分基本定理之證明及幾何學與物理問題之表述中,學生自能領會之.

本書所述,前後可以伸縮.教師於各章教材,得如己意增減之.如在定積分一章,可從各論點作合理之挑選,變易其次序,或刪除某節,均無礙於大體.在力學及無定積分等章亦然.凡諸刪節,雖各有可取,但對於多數教師,恐無一能謂其已臻於至善者.此完全視教師自己之方式如何而已.此書又顧及學生資質之高下.善教者當能助其優良學生,達於其天資之所能及,而於才分稍次者,亦無不合.因每易一題材時,新有論點之敍述,極爲簡明也.

是書爲習工程,物理及純粹算學者而寫.現代微積分學設敍述得宜,其最善之方法當爲工程或物理學生之所能及,使其有此重要工具,以了解其自己所有之專門問題.在另一方面,習純粹算學者,亦應知微積分學與物理之關係,蓋後者乃此算學大分支之所由來也.

目　次

第一章　緒論

第二章　代數函數之微分法　普通定理

第三章　應用問題

第四章　微變數及微分數

第五章　三角函數

第六章 對數及指數

第七章 應用問題

第八章　逆三角函數

第九章　積分法

第十章 曲度 展伸線

第十一章 擺線

第十二章 定積分式

第十三章 力學

第十四章　無盡級數

第十五章 偏微分法

索引

奧氏初等微積分學

第一章

緒論

微積分學創始於十七世紀,爲英國算學,天文,兼物理學家牛頓(Newton),及德國哲學家來布尼茲(Leibniz)兩氏所發明.其於幾何及論理物理學上之效用,極關重要.蓋現代算學及物理學之發展,皆有賴於微積分之發明焉.

1. 函數(function). 在算學上,函數一字,指含有一個或多個變數(variable)之式子而言.例如

(a) x^3, $2x^3-3x+1$;

(b) $\sqrt{x}$, $\sqrt{a^2-x^2}$;

(c) $\dfrac{x^2}{a+x}$, $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $\dfrac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

(d) $\sin x$, $\log x$, $\tan^{-1}x$.

在(b)下第二式含有兩個數字a及x.x爲變數,a值設爲不變,謂之常數(constant).如

$$ax+b$$

一式爲 x 之函數,與 a, b 兩常數有關.

凡函數可用符號或縮寫式表示之.如 $f(x)$, $f(x, y)$ (讀如:"x之函數","x及y之函數"),亦有常用F, ϕ, Φ,等字母者*.例如方程式

$$(1) \qquad f(x)=2x^3-3x+1$$

是表示函數 $f(x)$ 爲 $2x^3-3x+1$. 又

$$(2) \qquad \phi(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$$

是表示函數 $\phi(x, y, z)$ 爲 $x^2+y^2+z^2$.

現先以含有一變數之函數如上(1)式言之.於此 x 稱謂自變數(independent variable),因其可有任何值.其函數值或函數稱謂被變數 (dependent variable),常用一單獨字母表示之.如

$$y=f(x),$$

或

$$y=2x^3-3x+1.$$

圖線(graphs). 含有一變數之函數,

$$y=f(x),$$

可用幾何圖形表示之.此於研究函數之特性上,極爲便利.

通常自變數以 x 坐標,即橫坐標表示之.被變數以 y 坐標,即縱坐標表示之.如函數

$$f(x)=x^3$$

之圖線即爲

$$y=x^3$$

一式所有之曲線.

---

*在讀時,欲區別$f(x)$及$F(x)$,可以大小分別呼之.

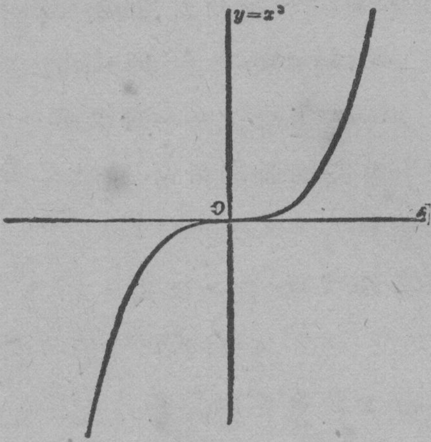


圖 1

於幾何及物理上函數之例. 幾何學及物理學上各種普通公式,均屬於簡單函數.如圓之面積公式爲

$$A=\pi r^2,$$

r 爲圓之半徑, π 爲一常數 3.1416. 於此 r 爲一自變數,——可有任何正值,——而 A 爲 r 之函數,或被變數.

再如下列三種圓體,其體積爲

(a) $V=\frac{4}{3}\pi r^3,$ 圓球體;

(b) $V=\pi r^2 h,$ 圓柱體;

(c) $V=\frac{\pi}{3} r^2 h,$ 圓錐體.

在(b)及(c)兩公式內, h 爲體高, r 爲底面半徑;在此, V 爲兩自變數 r 及 h 之函數.

又上述各種圓體之面積爲

(α) $S=4\pi r^2$, 圓球面;

(β) $S=2\pi r h$, 圓柱面;

(γ) $S=\pi r l$, 圓錐面.

在最後一式之 l 爲圓錐面之斜高.於此又得三個含有一變數或二變數之函數.

自由落體之公式爲

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

s 爲落下之距離,t 爲落下之時間;g 爲一常數,因其於某種時間及長度單位下,其值不變.在此 t 爲一自變數,而 s 爲 t 之函數.若由此公式解 t 而得

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}},$$

則 s 爲一自變數,而 t 爲其函數.

常有以一個方程式表示兩個變數之關係者,如

$$pv=c$$

一式是表示在同一溫度時,一氣體之壓力 p 與其體積 v 之關係.在此可以 p 爲自變數,也可以 v 爲自變數,視由上式解何者而定.如解 v 時,

$$v=\frac{c}{p},$$

則 p 爲自變數,v 爲其函數.解 p 時,

$$p=\frac{c}{v},$$

則 v 爲自變數, p 爲其函數.

自變數值之限制. 自變數之値常限制在某區間內. 如在函數

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

內之 x, 其値必在 $-a$ 與 a 之間,

$$-a\leqq x\leqq a,$$

因否則 a^2-x^2 爲負,而上式爲無意義.

又如上述各種幾何形體公式中, r, h 及 l 三値必爲正數.因凡形體如一圓球之體積,無有爲零,或其半徑爲負數者.

有時自變數必爲一正整數. 如下列幾何級數前 n 項之和,

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}.$$

在此,

$$S_n=\frac{a-ar^n}{1-r}.$$

若使 $a=1$, $r=\frac{1}{2}$, 則此級數爲

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

於是

$$S_n=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}},$$

卽得一函數 S_n, 其自變數 n 爲一正整數.

在微積分學上,凡函數所有自變數之變易區域爲連續.如在含有一變數 x 之函數, x 之變易區域爲

$$a\leqq x\leqq b \quad 或 \quad 0<x.$$

通常用英文字母中 x, y, z 等以代表變數. 而以 a, b, c 等代表常數. 如在

$$ax^2+bx+c$$

一式內, a, b, c 爲常數, x 則爲變數.

多值函數 (multiple-valued functions); **主值** (principal-value).

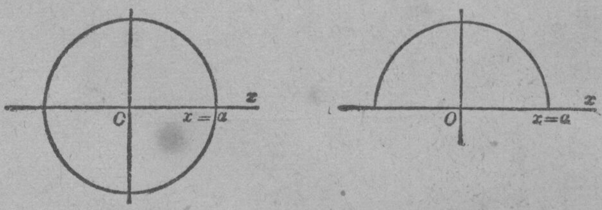
以上所舉各例之式子, 均爲單值 (single valued) 函數. 即自變數 x 在某一值時,該變數之函數亦只有一值. 然一函數可有多值,如有函數 y 其式爲

$$x^2+y^2=a^2.$$

於此,
$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2},$$

即 y 有兩值. 但此函數 y, 能用兩個單值函數完全表出之:

$$y=\sqrt{a^2-x^2} \quad 及 \quad y=-\sqrt{a^2-x^2}.$$



$x^2+y^2=a^2$ 之圖線　　$y=\sqrt{a^2-x^2}$ 之圖線

圖 2

而此兩函數即爲原有函數之兩值.

學者應知根號 $\sqrt{\ }$ 係指正根; 非可隨意指根之或正或負者. 欲指負根, 根號前應置一負號, 如 $-\sqrt{\ }$. 故 $\sqrt{4}=2$, 並非 -2. 其意在指出兩根中之正根, 而不及負根.