高等学校教材

# 概率论与数理统计

◆主　编　郭　红
◆副主编　程延强　齐　芯

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

# 概率论与数理统计

Gailülun yu Shulitongji


主　编　郭　红

副主编　程延强　齐　芯



高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

## 内容提要


本书参照最新制订的"工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求"以及教育部最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中"数学一"和"数学三"的考试内容和考试要求编写而成。

全书共八章，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验，每节配备基础题(A组)和综合能力训练题(B组)，书末附有习题答案。本书取材新颖，表述清楚，重点突出，简明易懂。

本书可作为包括独立学院在内的普通高等学校本科非数学专业学生的教材，也可作为考研辅导参考资料使用。



**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/郭红主编. —北京：高等教育出版社，2010.8

ISBN 978-7-04-030189-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 119625 号

**策划编辑** 张彦云 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 李卫青
**责任绘图** 尹 莉 **版式设计** 马敬茹 **责任校对** 俞声佳
**责任印制** 张泽业

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街4号 | 咨询电话 | 400-810-0598 |
| 邮政编码 | 100120 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn<br>http://www.hep.com.cn |
| 经　　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | 网上订购 | http://www.landraco.com<br>http://www.landraco.com.cn |
| 印　　刷 | 三河市华润印刷有限公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2010年8月第1版 |
| 印　　张 | 14 | 印　　次 | 2010年8月第1次印刷 |
| 字　　数 | 250 000 | 定　　价 | 19.50元 |





**物料号　30189-00**

# 前　　言

随着综合国力的提高，我国的高等教育逐渐从“精英教育”走向“大众化教育”阶段，独立学院以培养高级应用型、技术型人才为目标，是此新形势下高等教育办学机制与模式的一项探索与创新。目前，我国有三百多所独立学院。一方面，独立学院的设立使更多的青年人获得高等教育的机会；另一方面，独立学院的教学也出现了一些值得注意的新情况和新问题，为此我们结合独立学院学生的现状和专业要求的实际情况，编写了这套由高等教育出版社出版的教材，包括《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率论与数理统计》，并将为以上教材配备相应的习题册、试题库以及教学课件。

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究自然界与人类社会活动中出现的大量随机现象及其统计规律性的一门学科。它以其独特的思维方式和处理问题的方法以及实际应用的广泛性，逐渐受到人们越来越多的关注，因此概率统计课程已经被各高校列入理工类、经济管理类等绝大多数专业的必修课，也是研究生入学考试中“数学一”和“数学三”的必考科目。

本书参照最新制订的“工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”以及教育部最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中“数学一”和“数学三”的考试内容和考试要求编写而成。我们在编写本书时，充分考虑到各专业教学上的需要，希望能为本课程提供一本合适的教学用书。同时，本书在深度和广度上都达到了非数学专业考研大纲的要求，因此，也可作为考研同学的参考用书。本书主要具有以下特点：

一、注重介绍基本概念、基本理论和基本方法。学生通过系统的学习，从总体上了解和掌握大学数学的基本内容以及利用数学方法解决问题的基本手段。

二、注重学生基本能力的培养。本书在例题和习题的选择安排上体现了系统性、多元性、技巧性，基本满足各专业不同层次的教学需要。学生通过必要的训练，达到巩固、提升以及熟练掌握基本概念、基本理论和基本方法的目的。

三、注重理论与实际统一。本书在选材上，考虑到独立学院学生的特点，在不失本学科的系统性和科学性的基础上，力求做到从实例入手，采用学生易于接受的方式自然引出基本概念，希望以此调动学生的学习兴趣，提高学生分

析问题、解决问题的能力。

四、考虑到各专业对数学课程的内容、难度等方面的差异，对本套教材使用两种字体排印，其中宋体排印部分自成体系，体现了数学课程的基本要求，可供学时数较少的专业讲授；楷体字部分的内容可供学时数较多或对大学数学要求较高的专业作为补充内容讲授。另外课后所编习题分为A、B两个层次，A组题的难度适中，为教学的基本要求；B组题的难度稍大，可供考研的同学选用。

本套教材的立项、编写、试用与修改用时近三年，期间得到了吉林大学珠海学院各级领导的大力支持，在此特别表示感谢。另外，在本套教材编写期间，吉林大学珠海学院数学教研室的各位教师提出了大量的宝贵建议，其中尤其是原永久教授认真地审阅了全部书稿，并提出了宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。

数学的理论是美妙的，数学的方法也是精巧的，但是要学好数学，体会其中变化的奥妙却不是一件轻松的事，需要付出一定的努力。我们希望本书能为广大读者尤其是独立学院的莘莘学子带来学习数学的轻松和快乐，为今后的工作和深造带来一定的帮助。

限于编者水平，书中定有不少缺点、错误，敬请读者指正。

编　者

2010年3月19日于珠海观音山下

# 目　　录

# 绪　　论

在自然界及人类的社会活动中，每天都有许多现象发生．这些现象大致可以分为两类：一类是在一定条件下结果是确定的，例如向上抛出一枚硬币一定下落，在标准大气压下水加热到沸点一定沸腾；而另一类是在一定条件下结果是不确定的，例如抛一枚硬币落地后，可能正面朝上，也可能反面朝上．某射手向目标射一发子弹，其结果可能命中目标，也可能偏离目标．我们把第一类现象称为**确定现象**，第二类现象称为**不确定现象**．人们对这些不确定现象进行大量、重复的观察后，发现其结果具有一定的统计规律性．将这种在每次试验中其结果呈现出不确定性，而在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象称为**随机现象**．

概率论与数理统计是研究随机现象及其统计规律性的学科，是随机数学的基础课．通过学习概率论与数理统计，我们能够掌握分析和解决随机问题的基本思想和方法．

# 第一章　随机事件与概率

## §1.1　随 机 事 件

### 一、随机试验

为了研究随机现象，常常需要做各种**试验**．我们所指的试验，包括各种科学实验以及对某一事物的某一特征的观察．下面举一些试验的例子：

**例 1**　(1) 抛一枚硬币两次，观察正面 $H$、反面 $T$ 出现的情况；

(2) 抛一枚硬币两次，观察正面 $H$ 出现的次数；

(3) 记录某大型超市一天内进入的顾客的人数；

(4) 在一批电子元件中任意抽取一只，测试它的使用寿命．

不难发现，上述试验具有如下特点：

① 能明确指出试验中所有可能出现的结果，且结果多于一个；

② 试验未结束之前，不能预知哪种结果会出现；

③ 在相同条件下可重复进行．

一般地，将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，记为 $E$，简称**试验** $E$．

### 二、样本空间

试验 $E$ 中每一个可能出现的结果称为**样本点**，记为 $\omega$；试验 $E$ 中所有可能出现的样本点组成的集合，称为**样本空间**，记为 $\Omega$．

例 1 中所提到的试验(1)—(4)对应的样本空间为：

$E_1$：$\Omega_1=\{TT,HT,TH,HH\}$；

$E_2$：$\Omega_2=\{0,1,2\}$；

$E_3$：$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$；

$E_4$：$\Omega_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$．

顺便指出以下两点：1)样本空间中的样本点是由试验目的所决定的；2)每次试验有且仅有一种可能结果出现．

## 三、随机事件

对试验 $E$ 的研究，不仅关心试验中可能出现的样本点，而更关心试验中满足某种条件的样本点组成的集合. 例如，在例 1 的试验 $E_4$ 中若规定电子元件的使用寿命超过500小时为合格品，那么我们关心的是电子元件的使用寿命是否大于500小时，则可将满足这个条件的样本点组成的集合记为 $A=\{t \mid t>500\}$. 显然，$A$ 中的每一个样本点是具有实际意义的试验结果，同时 $A$ 也是样本空间 $\Omega_4$ 的子集，称 $A$ 为试验 $E_4$ 的一个随机事件.

一般地，称试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 的子集为 $E$ 的**随机事件**，简称事件，记为 $A,B,C,\cdots$.

设 $A$ 为事件，若试验中出现的样本点 $\omega \in A$，则称**事件 $A$ 发生**，否则称**事件 $A$ 不发生**.

下面介绍几种特殊事件：

(1) **基本事件**：由一个样本点组成的单点集 $\{\omega\}$；

(2) **必然事件**：由于样本空间 $\Omega$ 是自身的一个子集 ，因此 $\Omega$ 也是一个事件. 又由于 $\Omega$ 包含了试验的所有的样本点，因此每次试验 $\Omega$ 必然发生，称 $\Omega$ 为必然事件；

(3) **不可能事件**：空集 $\varnothing$ 总是样本空间 $\Omega$ 的一个子集，因而 $\varnothing$ 也是一个事件. 又由于 $\varnothing$ 不包含任何样本点，因而每次试验 $\varnothing$ 都不发生，称 $\varnothing$ 为不可能事件.

不难看出，必然事件和不可能事件已无随机性可言，但为了讨论方便，我们还是将 $\Omega$ 和 $\varnothing$ 视为两个特殊的事件.

**例 2** 对例 1 的 $E_3$：$\Omega_3=\{0,1,2,3,\cdots\}$，设

$$A=\{\text{一天内进入超市的人数不超过 4 人}\},$$
$$B=\{\text{一天内进入超市的人数不少于 5 人}\},$$
$$C=\{\text{一天内无人进入超市}\},$$

则 $A$，$B$，$C$ 均为试验 $E_3$ 的事件，且有

$$A=\{0,1,2,3,4\};$$
$$B=\{5,6,7,\cdots\};$$
$$C=\{0\}.$$

## 四、事件间的关系与运算

正如例 2 中所看到的，在一个样本空间中，可以有许多随机事件. 通过对简单事件的了解而掌握较复杂的事件，这会给我们的学习带来较多的方便，为此需要研究事件间的关系与运算.

事件是样本空间的子集，故事件间的关系与运算可以仿照集合论中子集的

关系与运算来规定，并给出其特有的含义.

设试验 $E$ 的样本空间为 $\Omega$. $A$，$B$，$C$，$A_k(k=1,2,\cdots)$是 $\Omega$ 的子集.

**1. 事件的包含关系**

若 $A\subset B$，则称事件 $B$ **包含**事件 $A$，即在一次试验中，若事件 $A$ 发生，则事件 $B$ 必然发生.（图 1－1）

**2. 事件的相等关系**

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ **相等**，记为 $A=B$，表明 $A$ 与 $B$ 为同一事件.

**3. 事件的并**

称 $A\cup B$ 为事件 $A$ 与 $B$ 的**并事件**，当且仅当事件 $A$ 与 $B$ 至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.（图 1－2）

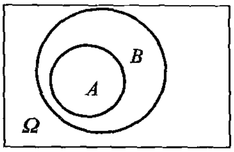


图 1－1

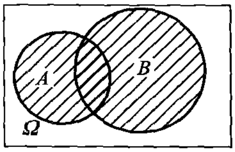


图 1－2

类似地，称 $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ 为 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并事件；称 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的并事件.

**4. 事件的交**

称 $A\cap B$(或 $AB$)为事件 $A$ 与 $B$ 的**交事件**，当且仅当事件 $A$ 与 $B$ 同时发生时，事件 $AB$ 发生.（图 1－3）

类似地，称 $\bigcap_{k=1}^{n}A_k$ 为 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件；称 $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的交事件.

**5. 事件的差**

称 $A-B$ 为事件 $A$ 与 $B$ 的**差事件**，当且仅当事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生时，事件 $A-B$ 发生.（图 1－4）

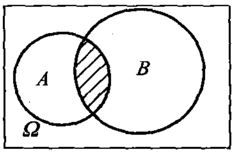


图 1－3

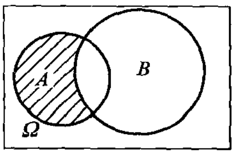


图 1－4

**6. 互不相容(或互斥)事件**

若 $AB=\varnothing$，则称事件 $A$ 与 $B$ 是**互不相容(或互斥)事件**，即在一次试验中，事件 $A$ 与 $B$ 不能同时发生. (图 1－5)

若 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中，任意两个不同的事件满足 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，则称这 $n$ 个事件是**两两互不相容(或两两互斥)**.

**7. 对立事件**

若事件 $A$，$B$ 满足 $AB=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$，则称事件 $A$ 与 $B$ 是互为**对立事件**. (图 1－6). 记 $B=\overline{A}$. 于是有 $A\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$，$\overline{\overline{A}}=A$.

需要指出的是，对立事件是互不相容的，而互不相容事件不一定是对立事件.

为直观起见，将上述事件间的关系用几何图形来表示. 用平面上的矩形表示样本空间 $\Omega$，用圆形表示 $\Omega$ 的子集 $A$ 或 $B$，则有图 1－1 至图 1－6.

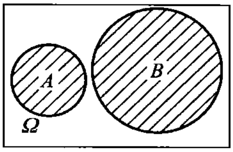


图 1－5

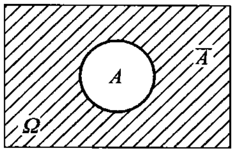


图 1－6

事件间的运算满足下述运算律：

1) **交换律**：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

2) **结合律**：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

3) **分配律**：$(A\cup B)C=AC\cup BC$，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$；

4) **对偶律**：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

事件的对偶律可推广到多个事件的情形：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

5) **对差事件运算满足**：$A-B=A-AB=A\overline{B}$.

**例 3** 设 $A$，$B$，$C$ 为三个事件，试用它们表示下列事件：

(1) $A$ 发生，而 $B$，$C$ 都不发生；

(2) 三个事件中至少有一个发生；

(3) 不多于一个事件发生；

(4) $A$，$B$，$C$ 中恰好有两个发生.

**解** (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$.

(2) $A\cup B\cup C$.

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

或考虑其对立事件：{三个事件中至少有两个发生}可表示为 $AB\cup AC\cup BC$，则所求为$\overline{AB\cup AC\cup BC}$.

(4) $AB\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

**例 4**　设 $A$，$B$ 为两个事件，化简下列各式：

(1) $(A\cup B)-(A-B)$；

(2) $(A-\overline{B})(\overline{A\cup B})$.

**解**　(1) $(A\cup B)-(A-B)=(A\cup B)(\overline{A\,\overline{B}})=(A\cup B)(\overline{A}\cup B)$

$$=B\,\overline{A}\cup AB\cup B=B;$$

(2) $(A-\overline{B})(\overline{A\cup B})=(AB)(\overline{A}\,\overline{B})=\varnothing$.

## 习题　1－1

### A　组

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 对一目标进行射击，直到击中目标为止，观察射击的次数；

(2) 生产某产品直到 5 件正品为止，观察并记录生产该产品的总件数.

2. 用事件 $A$，$B$，$C$ 的运算关系表示下列事件：

(1) $A$，$B$ 都发生，而 $C$ 不发生；

(2) 不多于两个事件发生；

(3) 三个事件中至少有两个发生.

3. 在区间$[0,2]$上任取一数，记 $A=\left\{x\mid \frac{1}{2}<x\leqslant 1\right\}$，$B=\left\{x\mid \frac{1}{4}\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}\right\}$. 求下列事件的表达式：(1) $A\cup B$；(2) $\overline{A}B$；(3) $A\,\overline{B}$；(4) $A\cup\overline{B}$.

4. 一批产品中有合格品和废品，从中有放回地抽取三个产品，设 $A_i=\{$第 $i$ 次抽到废品$\}$，试用 $A_i$ 的运算表示下列各个事件：

(1) 第一次、第二次中至少有一次抽到废品；

(2) 只有第一次抽到废品；

(3) 三次都抽到废品；

(4) 至少有一次抽到合格品；

(5) 只有两次抽到废品.

5. 化简下列事件：

(1) $(A\cup B)-B$；　　　　(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})$.

# §1.2　随机事件的概率

在实际问题中，我们经常需要知道一些事件发生的可能性的大小，并且希

望能用一个确定的数来表示它，为此，首先引入频率的概念.

## 一、频率

**定义 1** 设 $A$ 为试验 $E$ 中的事件，在相同条件下将 $E$ 重复进行 $n$ 次，以 $n_A$ 表示 $n$ 次试验中事件 $A$ 发生的次数，称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 $A$ 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

从定义 1 中不难得出频率具有如下的性质：

**性质 1** $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

**性质 2** $f_n(\Omega)=1$；

**性质 3** 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则 $f_n(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}f_n(A_i)$.

从频率的定义与性质中，不难看出频率 $f_n(A)$ 是一个数，并且具有随机性. 当重复试验的次数 $n$ 较小时，$f_n(A)$ 的波动很大；当重复试验的次数 $n$ 较大时，$f_n(A)$ 将逐渐稳定于某个常数 $P$.

**例 1** $E$：抛一枚硬币，记事件 $A=\{$出现正面 $H\}$，将 $E$ 重复进行 50 次、500 次. 各做 5 遍，观察频率 $f_n(A)$ 的变化趋势：

**表 1-1**

| 试验序号 | $n=50$ | | $n=500$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $n_A$ | $f_n(A)$ | $n_A$ | $f_n(A)$ |
| 1 | 22 | 0.44 | 251 | 0.502 |
| 2 | 21 | 0.42 | 244 | 0.488 |
| 3 | 25 | 0.50 | 256 | 0.512 |
| 4 | 18 | 0.36 | 262 | 0.524 |
| 5 | 27 | 0.54 | 247 | 0.494 |

历史上著名的统计学家蒲丰和皮尔逊等也作了大量的类似试验，得到数据如表 1-2.

从表 1-1，表 1-2 中可以看出，频率 $f_n(A)$ 在数 0.5 附近波动，当 $n$ 增大时，$f_n(A)$ 逐渐稳定于常数 0.5. 频率 $f_n(A)$ 所具有的稳定性，就是通常所说的统计规律性.

一般地，每个随机事件都有确定的一个常数 $P$ 与之对应，这个数 $P$ 反映

了事件 $A$ 发生的可能性的大小，称它为事件 $A$ 的概率，记为 $P(A)$，并有如下定义.

**概率的统计定义** 将频率的稳定值定义为**事件的概率**.

概率的统计定义直观地解释了事件概率的含义，只要重复试验的次数足够大，可以用 $f_n(A)$ 近似代替 $P(A)$. 但是在实际中，我们不可能对每一事件都做大量的重复试验(况且有些试验不可重复进行)，然后得出事件的概率，用以表征事件发生可能性的大小. 因此，需要给出一个能够揭示概率本质属性的定义. 于是，人们从频率的稳定性和频率的性质中得到了启发. 1933 年，苏联数学家科尔莫戈罗夫在总结前人研究成果的基础上，提出了概率的公理化定义.

**表 1-2**

| 试验者 | $n$ | $n_A$ | $f_n(A)$ |
|---|---|---|---|
| 德·摩根 | 2 048 | 1 061 | 0.518 1 |
| 蒲丰 | 4 040 | 2 048 | 0.506 9 |
| 皮尔逊 | 12 000 | 6 019 | 0.501 6 |
| 皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |

## 二、概率的公理化定义

**定义 2** 设试验 $E$ 的样本空间为 $\Omega$，对于 $E$ 的每一个事件 $A$，有一确定的实数与之对应，记为 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足下列三条公理：

(1) **非负性** $P(A)\geqslant 0$;

(2) **规范性** $P(\Omega)=1$;

(3) **可列可加性** 设 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容，即对于 $i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，$i,j=1,2,\cdots$，有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，

则称 $P(A)$ **为事件** $A$ **的概率**.

由概率的公理化定义可得到概率的一些重要性质.

**性质 1** $P(\varnothing)=0$.

**证明** 因为 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$，由公理(2)和(3)有

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots,$$

由此推得 $P(\varnothing)=0$.

**性质 2**(有限可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

**证明**　在公理(3)中，令 $A_i=\varnothing$，$i=n+1,n+2,\cdots$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\varnothing,\varnothing,\cdots$是可列个两两互不相容事件，由公理(3)及性质1可得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\varnothing) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

**性质3**　设 $A$ 为任意事件，则有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

**证明**　因为 $A\cup\overline{A}=\Omega$ 且 $A\overline{A}=\varnothing$，由性质2可得

$$1=P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A}),$$

故

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

**性质4**　设 $A$，$B$ 为事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)，且 P(A)\leqslant (B).$$

**证明**　由 $A\subset B$ 可得 $B=A\cup(B-A)$，且 $A(B-A)=\varnothing$. 由性质2有

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

即 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，并有 $P(A)\leqslant (B)$.

**性质5**(加法公式)　设 $A$，$B$ 为任意两个事件，则有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

**证明**　因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A(B-AB)=\varnothing$. 又 $AB\subset B$，由性质2和性质4可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质5可推广到有限多个事件的情形. 设 $A$，$B$，$C$ 为任意三个事件，则有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

一般地，对于任意 $n$ 个事件，可由归纳法证得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

**例2**　已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$，试求 $P(A\overline{B})$.

**解**　由 $A\overline{B}=A-AB$，$AB\subset A$，所以

$$\begin{aligned} P(A\overline{B}) &= P(A-AB)=P(A)-P(AB) \\ &= P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3. \end{aligned}$$

**例3**　设 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，证明 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$.

**解**　$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[1-P(AB)]=P(AB)$.

## 习题　1－2

### A　组

1. 已知 $A\subset B$，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，求

(1) $P(AB)$；(2) $P(A\cup B)$；(3) $P(\overline{A}B)$；(4) $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

2. 设事件 $A$ 与 $B$ 互不相容，$P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，求 $P(\overline{B})$.

3. 设 $A$，$B$ 为两个事件，满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

4. 设 $A$，$B$ 为两个事件，且 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.7$，$P(A\cup B)=0.8$，求 $P(B-A)$.

### B　组

1. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$. 求 $A$，$B$，$C$ 三个事件至少出现一个的概率.

2. 设 $A$，$B$ 是同一试验 $E$ 的两个事件，证明：$P(AB)\geqslant 1-P(\overline{A})-P(\overline{B})$.

# §1.3　古典概型与几何概型

## 一、古典概型

若试验 $E$ 具有如下特征：

(1) 样本空间 $\Omega$ 中包含有限多个样本点；

(2) 每个样本点发生的可能性相同(等可能性)，则称试验 $E$ 为**古典概型**或**等可能概型**.

古典概型在概率论的研究中占有重要的地位，它的一些概念直观、易于理解，有着广泛的应用. 下面给出古典概型中事件概率的计算公式.

设试验 $E$ 的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，由于每个样本点也就是基本事件发生的可能性相同，即有：$P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots=P\{\omega_n\}$. 又由于基本事件是两两互不相容的，因此

$$1=P(\Omega)=P(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\})=\sum_{i=1}^{n}P(\{\omega_i\})=nP(\{\omega_i\}),$$

从而

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$