



高职高专教育“十一五”规划教材

数学

经济应用

数学

(下册)

郑月晨 王坤龙 主 编

陶印修 方媛璐 副主编



科学出版社

www.sciencep.com

高职高专教育“十一五”规划教材

经济应用数学

(下册)

郑月晨 王坤龙 主 编

陶印修 方媛璐 副主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书在认真总结、分析、吸收全国高职高专院校经济管理类专业经济数学教学改革经验的基础上编写的。从高职高专人才培养目标出发,结合经济管理类专业特点,精选了教学内容,注重理论联系实际,紧密结合专业,适当降低了难度,遵循循序渐进的教学原则,精心配置了每节例题、习题,以便于学生对有关知识点的掌握与巩固。

本书分为上下两册,上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分学及其应用;下册包括线性代数初步、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、数理统计初步和数学软件 Mathematica 应用等内容,其中上下册中每章都安排了小结和综合训练。

本书适用于三年制高职高专院校经济管理类专业、成人高等学校各专业经济数学的教材,也可以作为经济管理人员参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学(下册)/郑月晨,王坤龙主编. —北京:科学出版社,2010.5
(高职高专教育“十一五”规划教材)

ISBN 978-7-03-027495-3

I. ①经… II. ①郑… ②王… III. ①经济数学—高等学校:技术学校—教材 IV. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 083114 号

策划:姜天鹏 王新文

责任编辑:王纯刚 隽青龙 / 责任校对:耿 耘

责任印制:吕春珉 / 封面设计:东方人华平面设计部

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

装 订 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 6 月第 一 版 开本:787×960 1/16

2010 年 6 月第一次印刷 印张:11 1/4

印数:1—3 500 字数:213 000

定价:46.00 元(本册定价:22.00 元)

(如有印装质量问题,我社负责调换<环伟>)

销售部部长 010-62140850 编辑部电话 010-62135517-2037

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

本书是在充分研究分析当前高职高专教育现状,认真分析、总结、吸收高职高专院校经济管理类专业经济数学教学教改经验,结合高职高专学生特点和市场对人才需求的基础上编写的。从高职高专教育人才培养目标出发,充分考虑了高职高专经济管理类专业学生的知识需求和接受能力,以及不同专业或专业方向的要求,精选了教学内容。

本书分为上、下两册。本书在编写过程中力求做到条理清晰、通俗易懂,基本内容表述清楚,层次清晰,结构合理,重点突出,例题、习题针对性强,特别注意培养学生用数学概念、方法、思想消化吸收经济概念、经济问题的能力,侧重培养学生将实际问题转化为数学模型的能力、突出了学生数学应用技能的训练与培养。本书取材合适,深度适宜,富有启发性,有利于激发学生的学习兴趣。

本书每节都配有一定数量的习题,每章后面还配有综合训练。这些习题可以帮助学生加深对基本内容的理解,提高学生分析问题的能力,逐步培养学生的自学能力。

本书具有以下特色:

1. 每章均采用目标导学的方法,有利于学生对学习目标的把握;
2. 精选例题和习题,注重结合专业特点,理论联系实际,贯彻由浅入深的教学原则;
3. 特别注重教学概念与经济问题的联系,给出了许多经济问题的数学解析;
4. 减弱了理论推导或证明,不追求理论上的系统性;
5. 教材内容涵盖面广,为不同专业或专业方向提供了更大的选择空间;
6. 本书介绍了数学软件 **Mathematica** 及其应用,有利于培养学生利用计算机及相应数学软件求解数学模型的能力。

本书由天津国土资源和房屋职业学院的郑月晨和天津海运职业学院的王坤龙主编,由天津渤海职业技术学院的陶印修和天津医学高等专科学校的方媛璐副主编。其中,第6章由陶印修编写;第7章由王坤龙编写;第8章和第9章由郑月晨编写;第10章方媛璐编写。参加本书编写和审校工作的还有王洪明、周秀君、郝春田和宋立温等。

鉴于我们的研究能力、学术水平,加之时间仓促,书中难免有疏漏之处,恳切期望读者批评指正,以便进一步修改和完善。

编 者

2010年5月

目 录

第 6 章 线性代数初步	1
6.1 行列式的概念与运算	1
6.1.1 三阶行列式的定义	1
6.1.2 n 阶行列式的概念	3
6.1.3 行列式的性质	4
6.1.4 行列式的计算	5
习题 6.1	8
6.2 克莱姆法则	9
6.2.1 克莱姆法则	9
6.2.2 齐次线性方程组	11
习题 6.2	12
6.3 矩阵的概念与运算	12
6.3.1 矩阵的概念	12
6.3.2 矩阵的运算	14
习题 6.3	19
6.4 矩阵的逆	19
6.4.1 可逆矩阵与逆矩阵的判别	19
6.4.2 用初等行变换求逆矩阵	21
习题 6.4	23
6.5 矩阵的秩	23
6.5.1 矩阵秩的概念	23
6.5.2 满秩矩阵	25
习题 6.5	25
6.6 消元法	26
6.6.1 线性方程组	26
6.6.2 高斯消元法	27
习题 6.6	30
6.7 线性方程组解的判定	31
习题 6.7	34
6.8 线性方程组的通解	35

习题 6.8.....	40
6.9 简单的线性规划问题.....	40
6.9.1 线性规划问题的数学模型.....	40
6.9.2 线性规划问题的图解法.....	43
习题 6.9.....	45
本章小结.....	46
综合训练.....	48
第 7 章 随机事件与概率.....	51
7.1 随机事件.....	51
7.1.1 随机现象与随机事件.....	51
7.1.2 事件间的关系及运算.....	52
习题 7.1.....	54
7.2 随机事件的概率.....	54
7.2.1 概率的统计定义.....	54
7.2.2 古典概型.....	55
7.2.3 加法公式.....	56
习题 7.2.....	57
7.3 条件概率和全概率公式.....	57
7.3.1 条件概率.....	57
7.3.2 乘法公式.....	58
7.3.3 全概率公式.....	59
习题 7.3.....	60
7.4 事件的独立性与伯努利概型.....	60
7.4.1 事件的独立性.....	60
7.4.2 伯努利概型.....	61
习题 7.4.....	62
本章小结.....	62
综合训练.....	63
第 8 章 随机变量及其数字特征.....	65
8.1 随机变量.....	65
8.1.1 随机变量的概念.....	65
8.1.2 随机变量的分类.....	66

习题 8.1.....	68
8.2 分布函数.....	68
8.2.1 分布函数的概念.....	68
8.2.2 分布函数的计算.....	69
习题 8.2.....	70
8.3 几种常见随机变量的分布.....	70
8.3.1 常见离散型随机变量的分布.....	70
8.3.2 常见连续型随机变量的分布.....	72
习题 8.3.....	75
8.4 随机变量的数字特征.....	76
8.4.1 数学期望.....	76
8.4.2 方差.....	77
8.4.3 常用分布的期望和方差.....	79
习题 8.4.....	79
本章小结.....	80
综合训练.....	81
第 9 章 数理统计初步	84
9.1 总体样本统计量.....	84
9.1.1 总体与样本.....	84
9.1.2 统计量.....	85
习题 9.1.....	86
9.2 常用统计量的分布.....	86
9.2.1 样本均值的分布.....	87
9.2.2 χ^2 分布.....	87
9.2.3 t 分布.....	88
9.2.4 F 分布.....	89
习题 9.2.....	89
9.3 参数的点估计.....	89
9.3.1 矩估计法.....	90
9.3.2 极大似然估计法.....	92
9.3.3 估计量的评价标准.....	94
习题 9.3.....	95
9.4 参数的区间估计.....	96
9.4.1 置信区间与置信水平.....	96

9.4.2 正态总体均值的区间估计	97
9.4.3 方差的区间估计	98
习题 9.4	100
9.5 参数的假设检验	100
9.5.1 假设检验的基本思想与步骤	101
9.5.2 U 检验法	102
9.5.3 t 检验法	103
9.5.4 χ^2 检验法	104
习题 9.5	105
9.6 单因素方差分析	106
习题 9.6	110
9.7 一元线性回归分析	111
9.7.1 一元线性回归	112
9.7.2 最小二乘法	113
9.7.3 检测与预测	114
习题 9.7	117
本章小结	118
综合训练	121
第 10 章 数学软件 Mathematica 应用	124
10.1 Mathematica 系统的简单操作	124
10.1.1 Mathematica 安装与启动	124
10.1.2 Mathematica 退出	125
10.1.3 建立与保存文件	125
10.2 数、变量与数学函数	125
10.2.1 算术运算	126
10.2.2 函数及其运算	128
习题 10.2	131
10.3 Mathematica 在方程与图形中的应用	131
10.3.1 解方程	131
10.3.2 绘图	132
习题 10.3	136
10.4 Mathematica 在微积分中的应用	137
10.4.1 极限与连续	137
10.4.2 导数与微分	139

10.4.3 积分运算及简单应用	143
习题 10.4.....	145
10.5 Mathematica 在线性代数中的应用	146
10.5.1 Mathematica 中矩阵的相关计算	146
10.5.2 用 Mathematica 求解线性方程组	148
习题 10.5.....	151
10.6 Mathematica 在统计中的应用	152
10.6.1 数据的统计与分析	152
10.6.2 线性回归	153
习题 10.6.....	154
附表	155
附表 1 标准正态分布表	155
附表 2 F 分布表	157
附表 3 t 分布表	165
附表 4 χ^2 分布表	167
主要参考文献	170

第 6 章 线性代数初步

学习目标

- 了解 n 阶行列式的定义及性质并正确运用性质进行二阶、三阶行列式的计算.
- 掌握克莱姆法则, 并能运用克莱姆法则解线性方程组.
- 理解矩阵概念, 掌握矩阵的线性运算及乘法运算.
- 理解逆矩阵的概念, 掌握可逆矩阵的充分必要条件, 会用初等变换的方法求逆矩阵.
- 理解线性方程组有解的判定定理, 熟练掌握用消元法求线性方程组通解的方法.

线性代数主要研究线性关系, 线性方程组是它的一个重要组成部分, 是线性代数研究对象的具体模型. 而行列式是研究线性方程组的工具之一, 矩阵则克服了行列式在解线性方程组中的局限性而称为线性代数最重要的部分. 线性代数这门学科在 19 世纪就已获得了光辉的成就. 由于它在数学、物理学和科学技术中有着越来越广泛的应用, 因此在科学技术的许多领域都占有重要的地位.

6.1 行列式的概念与运算

6.1.1 三阶行列式的定义

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

用消元法, 解得

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

为了便于表示上述结果, 规定记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

并称为二阶行列式。利用二阶行列式的概念, 把方程组中未知量的系数用行列式表示

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中 a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} 称为这个二阶行列式的元素, 横行称为排, 纵行称为列。从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线, 从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线。

利用二阶行列式的概念, 则有

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

用消元法解得

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{13}b_2a_{32} + a_{12}a_{23}b_3 - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2 &= \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31} - a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3 &= \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \end{aligned}$$

规定

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

并称为三阶行列式, 则有

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

6.1.2 n 阶行列式的概念

1. n 阶行列式的概念

把上述三阶行列式推广到 n 阶, 则有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式. 其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是对所有 n 排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和. 行列式左上角到右下角的对角线称为主对角线, 位于主对角线上的元素称为主对角元.

n 阶行列式有以下特点.

(1) 展开式有 $n!$ 项, 每项都是 n 个元素相乘, 这 n 个元素既位于不同的行, 又位于不同的列.

(2) 每项带有正号或负号, 当这 n 个元素所在行按自然顺序排定后, 若相应的列号的排列是偶排列时, 该项取正号; 反之, 即其列号的排列是奇排列时, 该项取负号.

2. 几个特殊的 n 阶行列式

1) 转置行列式

把行列式 D 中的行与列按原来顺序互换以后所得的行列式记为 D^T , 即

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式 D^T 为行列式 D 的转置行列式.

行列式与它的转置行列式等值.

2) 上三角形行列式

$$\text{形如 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} \text{ 的行列式称为上三角形行列式.}$$

上三角行列式的值等于主对角元的乘积.

3) 下三角形行列式

$$\text{形如 } \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} \text{ 的行列式称为下三角形行列式.}$$

下三角行列式的值也等于主对角元的乘积.

6.1.3 行列式的性质

性质 1 行列式的行和列互换, 行列式的值不变.

性质 2 用一个数 k 乘以行列式的某一行(列)的各元素, 等于该数乘以此行列式. 或者说行列式的某一行(列)的公因子可以提到行列式的前面.

推论 1 若行列式的某行(列)的元素全为零, 则该行列式等于零.

性质 3 如果行列式中某行(列)中各元素均为两项之和, 则这个行列式等于两个行列式的和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4 交换行列式中任意两行(列)的位置, 行列式的正负号改变.

在以后的计算中, 约定用 “ $(i) \leftrightarrow (j)$ ” 表示第 i 行(列)与第 j 行(列)互相交换位置.

推论 2 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同, 则行列式等于零.

推论 3 如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例, 则行列式等于零.

性质 5 把行列式中某一行(列)的各元素同乘以一个数 k 加到另一行(列)的对应元素上, 行列式的值不变.

在以后的计算中, 约定用 “ $(i)+k(j)$ ” 表示第 j 行(列)乘以 k 后加到第 i 行(列)上.

例 1 计算下列行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{其中 } \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

解

$$(1) \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{(2)-(4)(1) \\ (3)-(7)(1)}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{(1)+(2) \\ (1)+(3)}} \begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & 1+\omega+\omega^2 & 1+\omega+\omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+\omega+\omega^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = \left[1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right]$$

6.1.4 行列式的计算

一般来说, 低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便, 因而自然会考虑用低阶行列式来表示高阶行列式的问题. 为此有

在 n 阶行列式中, 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后, 留下来的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} ; 又记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式. 如对四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

元素 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$$

定理 1 行列式等于它的任一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

这个定理称为行列式按行 (列) 展开法则. 用行列式展开法则计算行列式的方法称为降阶法.

例 2 计算行列式.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

解 将行列式按照第一行展开得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} + (-4) \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (5 - 90 - 20) + 4 \times [7(-18 - 4) + (6 - 8)] = -834 \end{aligned}$$

例 3 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

解 按第一行展开, 得

$$D = a \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

再将上式等号右边的第二个行列式按第一列展开, 则可得到

$$D = a^n + (-1)^{1+n}(-1)^{(n-1)+1}a^{n-2} = a^n - a^{n-2} = a^{n-2}(a^2 - 1)$$

定理 2 任一 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

都可以化为一个与其等值的上(下)三角形行列式, 即

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad D = \begin{vmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

例 4 计算 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (2)-(1) \\ (4)+5(1) \end{matrix}}$

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{array} \right| \xrightarrow{(2) \leftrightarrow (3)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} (3)+4(2) \\ (4)-8(2) \end{array}} \\
 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{array} \right| \xrightarrow{(4)+\frac{5}{4}(3)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array} \right| = 1 \times 2 \times 8 \times \frac{5}{2} = 40
 \end{array}$$

习题 6.1

1. 计算下列二阶行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & -12 \\ 6 & 24 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} \sec \theta & \tan \theta \\ \tan \theta & \sec \theta \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & a+b \\ a-b & a^2 \end{vmatrix}$$

2. 计算三阶行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

3. 计算下列行列式.

$$(1) D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) D = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(3) D = \begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & a_1 & b_1 & \\ & & c_1 & d_1 & \\ & \ddots & & & \ddots \\ c_n & & & & d_n \end{vmatrix}$$

$$(4) D = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$