



面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

数学物理方法

第二版

管平 刘继军 计国君 黄骏 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

数学物理方法

Shuxue Wuli Fangfa

第二版

管平 刘继军 计国君 黄骏 编



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书第一版是“面向 21 世纪课程教材”，第二版是在总结近几年的教学经验，吸收有关教师宝贵意见的基础上修订而成的。与第一版相比，在有关内容的表述方法和材料的安排等方面都作了许多改动，使之更便于教学。

本书内容包括复变函数、积分变换(含 Fourier 变换、Laplace 变换和小波变换)及其应用、偏微分方程的定解问题、特殊函数、数学物理方程中的近似解法等。本书本着加强应用、侧重方法的原则，着重介绍常用的应用数学方法及其在实际中的应用。同时适当增加了一些近代应用数学方法，为学生进一步学习近代数学内容设置了延伸发展的接口。

本书可作为高等学校工科各专业数学物理方法课程的教材，也可供工科研究生和社会读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法 / 管平等编. — 2 版. — 北京: 高等教育出版社, 2010. 4

ISBN 978-7-04-029210-7

I. ①数… II. ①管… III. ①数学物理方法 - 高等学校 - 教材 IV. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 034410 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landrace.com
印 刷	中国农业出版社印刷厂		http://www.landrace.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2001 年 7 月第 1 版
印 张	14.25		2010 年 4 月第 2 版
字 数	260 000	印 次	2010 年 4 月第 1 次印刷
		定 价	19.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 29210-00

参 考 文 献



面向21世纪课程教材



普通高等教育“十一五”
国家级规划教材

- [1] Niteo J. B. *Mathematical Education & the Theory of Instruction*. New York: Praeger Inc., 1973.
- [2] Akhman A., Clark L., Smith P., Sabound and Marini. *Mathematics Education: A New Paradigm*. Academic Publishers, 1999.
- [3] 乐晓波, 孙林. 中国数学教育. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [4] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [5] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [6] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [7] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [8] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [9] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [10] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [11] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [12] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [13] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [14] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [15] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [16] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [17] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [18] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [19] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [20] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [21] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [22] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.
- [23] 李士建. 数学教育心理学. 北京: 人民教育出版社, 2000.

第二版前言

数学物理方法是高等学校的一门重要专业基础课,是物理、无线电工程、动力工程、电子工程、自动控制等专业本科生的一门必修课。它前承大学本科的高等数学、数学分析等基础数学课程,后启电路信号系统等专业课程,是本科生迈向各自专业课程学习的一门重要的课程。另一方面,该课程中使用的许多基本方法和技巧,都可以在学生已学过的一些课程中找到背景,并且具有明确的物理意义。例如本课程中的一个核心方法——分离变量法,就是高等数学中二阶常微分方程通解和线性代数中齐次线性方程组解的结构推广。而构成分离变量法的理论基础则是线性系统的叠加原理,这是物理上线性结构系统的一个一般原理。联系数学上的基本方法和物理上的基本原理,是本课程的一个基本特点。这种联系,既加深了对本门课程本质的理解,又提高了具有专业背景的工科学生的学习兴趣。

和第一版相比,本书调整了原有的次序并增加了一些新的内容,同时删掉了一些内容。我们把小波变换内容和 Fourier 变换、Laplace 变换合并成一章,更体现了积分变换的系统性和各自的特点。我们增加了 Green 函数法一节,作为求解数学物理方程的一个重要内容。以调和函数为纽带,我们指出了复变函数中 Cauchy 积分公式和圆域上 Laplace 方程边值问题解的表示的一致性。在特殊函数部分,我们加强了对 Bessel 函数、Legendre 多项式的内容介绍,因为这两个特殊函数在工程中具有重要的应用。

在本书的修订过程中,得到了东南大学教务处和数学系领导的大力支持。数学系王元明教授审阅了全部书稿,对内容的取舍和组织给予了十分中肯而独到的建议,并对有关章节作了认真细致的修改,作者在此一并表示诚挚的谢意。

编者

2009年12月于东南大学

第一版前言

随着科学技术和社会经济的飞速发展,现代数学方法在工程技术、社会经济以及人文科学等各领域得到越来越广泛的应用。因此,对应用数学方法类的课程有必要在内容和体系上进行改革与更新。鉴于此,教育部立项支持了“面向二十一世纪工科数学教学内容与课程体系改革的研究与实践”的项目,本教材是这个项目的子课题的成果之一,主要涉及连续变量的应用数学方法,包括复变函数、Fourier 分析和小波分析、数理方程、变分法等内容,其中有些是在工程技术中应用越来越广泛的现代数学物理方法。根据课题组关于本教材应“以方法为主,不追求理论的系统性和完整性,方法要注意实用性和先进性,结构要模块化,便于教学”的要求,针对工科学生的特点,在本书的编写中,我们力求做到以下几点:

(1) 本着加强应用、侧重方法的原则,着重介绍常用的应用数学方法及其在实际中的应用(有些模型和应用是作者目前正研究的课题),而对其数学理论基础不作过多铺垫。例如,在介绍变分法时,只给出了泛函的简单定义,而对其相关理论和性质并未涉及。又如,在介绍数学物理中的数值方法时,介绍了积分方程的近似解法,而对积分方程的一般理论不作介绍。

(2) 问题的引入和范例体现应用特点,涉及工程技术中许多领域,许多例子来自于实际,再用它去解释实际问题,以提高学生的学习兴趣 and 便于学生理解、接受,以便将来应用。

(3) 在对传统的数学物理方法基本内容进行适当的调整外,增加了一些现代的数学方法,如在 L^2 空间引进 Fourier 分析和积分变换概念,简单介绍了广义函数概念和非线性偏微分方程,特别是从窗口 Fourier 变换出发,引入了小波变换,简单介绍了小波级数及其应用。这些内容的引入,一方面是由于它们在当代工程技术中应用已越来越广泛;另一方面也为学生进一步学习现代应用数学方法开了一个窗口。

(4) 考虑到工科学生的数学基础,新内容的引入尽量做到通俗易懂,使工科学生易于接受,而不过多强调数学理论的严密性,如在讨论 L^1, L^2 空间的 Fourier 变换时,只突出其思想和方法,不作太多的理论推证。小波分析着重讲清从 Fourier 变换到小波变换的演变发展的基本思想、离散小波分解及其算法,并简单介绍了一些应用。

(5) 根据项目计划要求,教材体系模块化,各大块内容既有联系又相对独立,便于不同专业根据需要选用。

本书内容可在 70 学时内学完,若只选前四章约需 52 学时。对于学时较少的专业,也可只选学第一章、第二章、第四章的内容。

本书由上海交通大学乐经良教授和四川大学马继刚教授主审,教育部工科数学课程教学指导委员会组织评审,最后还经天津大学齐植兰教授仔细审阅。作者对诸位专家严谨而辛勤的工作表示感谢,特别感谢两位主审对本书的编写和修改提出许多宝贵意见和有益的帮助,感谢课委会主任、西安交通大学马知恩教授以及课委会其他专家的鼓励和支持,感谢齐植兰教授在定稿前的最后审定。我们还要感谢东南大学教务处和应用数学系的领导和老师们,他们在本书的编写过程中始终给予了热情的关注和支持,同时还要感谢高等教育出版社文小西、杨芝馨两位编辑,正是由于他们的细致而认真的工作,才使本书得以顺利出版。

由于编者水平所限,不妥与错误之处在所难免,我们殷切希望专家、同行和广大读者批评指正。

编者

2000年8月

目 录

第一章 复变函数	1
§1.1 复变函数与解析函数	1
§1.1.1 复变函数	1
§1.1.2 解析函数	5
§1.1.3 复变函数导数的几何意义	9
§1.1.4 初等函数及其简单性质	10
§1.2 复变函数的积分	12
§1.2.1 复变函数的积分的概念和性质	13
§1.2.2 Cauchy 积分定理	15
§1.2.3 Cauchy 积分公式	20
§1.3 级数	24
§1.3.1 复级数和复幂级数	24
§1.3.2 Taylor 级数	28
§1.3.3 解析函数零点的性质	32
§1.3.4 Laurent 级数展开	34
§1.3.5 解析函数的孤立奇点	38
§1.4 留数及其应用	42
§1.4.1 留数定理	42
§1.4.2 留数的应用	46
§1.5 分式线性变换	49
第二章 积分变换及其应用	56
§2.1 Fourier 变换	56
§2.1.1 Fourier 积分	56
§2.1.2 Fourier 变换及性质	59
§2.1.3 δ 函数及 Fourier 变换	65
§2.1.4 Fourier 变换的物理意义	70

§2.2 Laplace 变换	74
§2.2.1 Laplace 变换的概念	74
§2.2.2 Laplace 变换的反演	78
§2.2.3 Laplace 变换的性质	79
§2.3 小波变换	85
§2.3.1 窗口 Fourier 变换	85
§2.3.2 连续小波变换	88
§2.3.3 小波级数展开	91
§2.4 积分变换的应用	95
第三章 偏微分方程的定解问题	103
§3.1 数学模型的建立	103
§3.1.1 三类典型的数学物理方程	103
§3.1.2 定解条件和定解问题	108
§3.1.3 解的概念和线性叠加原理	111
§3.2 分离变量法	116
§3.2.1 齐次方程齐次边界条件的定解问题	116
§3.2.2 一般的混合定解问题	122
§3.2.3 位势方程的边值问题	127
§3.3 行波法	132
§3.3.1 d'Alembert 公式及物理意义	133
§3.3.2 一般二阶线性方程的分类	136
§3.3.3 半无界区域上的问题	138
§3.4 积分变换法	143
§3.4.1 直线上的初值问题	143
§3.4.2 半无界直线上的问题	148
§3.4.3 高维空间波的传播	150
§3.5 Green 函数法	155
§3.5.1 方程解的积分表示及 Green 函数的引进	155
§3.5.2 Green 函数的求法和物理意义	159
§3.5.3 利用保角变换求平面区域的 Green 函数	163
§3.6 非线性偏微分方程	165
§3.6.1 孤立波	166
§3.6.2 激波	168

第四章 特殊函数	172
§4.1 Bessel 函数	172
§4.1.1 Bessel 函数的引进	172
§4.1.2 Bessel 函数的性质	174
§4.1.3 Bessel 函数的推广	179
§4.2 Legendre 多项式	181
§4.2.1 Legendre 多项式的定义	182
§4.2.2 Legendre 多项式的性质	185
§4.3 特殊函数的应用	187
第五章 数学物理方程中的近似解法	194
§5.1 数学物理方程的差分法	194
§5.1.1 差分与差分方程	194
§5.1.2 热传导方程定解问题的差分方法	197
§5.1.3 波动方程定解问题的差分方法	198
§5.1.4 Laplace 方程边值问题的差分方法	200
§5.1.5 注	203
§5.2 积分方程的近似解法	205
§5.2.1 用退化核近似任意核	205
§5.2.2 用数值积分法求近似解	207
§5.2.3 Galerkin 方法	208
附录	211
参考文献	215

第一章 复变函数

在许多应用问题如电磁学、流体力学中,经常需要用到复变量的函数.复变函数研究复变量之间的对应关系,它是实变量的函数在复数域中的自然推广.另一方面,由于单复变函数的自变量定义在整个复平面上,它的变化方式比一元的实变量函数更为自由,由此就使得复变函数具有实变函数不具备的很多特殊性质.注意比较复变函数和实变函数之间的联系与区别,有助于复变函数内容的学习.本章主要讨论一类重要的复变函数——解析函数的有关性质.

§1.1 复变函数与解析函数

§1.1.1 复变函数

在引入复变函数的定义之前,先要回顾区域及与区域有关的概念.记 x, y 分别是平面 \mathcal{R}^2 上点 $M(x, y)$ 的横坐标与纵坐标.这样一来复数 $z = x + iy$ 就跟平面上的点 $M(x, y)$ 建立了一个一一对应的关系,其中 $i = \sqrt{-1}$, 称为虚数单位.在这种对应的意义下,二元实变量 (x, y) 所在的平面 \mathcal{R}^2 也就是一元复变量 $z = x + iy$ 所在的平面,我们把这样的平面称为复平面 C , 两个坐标轴分别称为实轴和虚轴,见图 1.1.

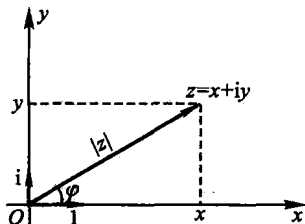


图 1.1 复平面上的点

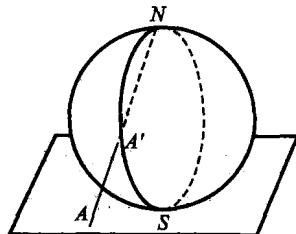


图 1.2 复球面和平面上点的对应

$z = x + iy$ 称为复数的直角坐标表示,它还可以用三角形式表示为 $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, 其中 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 称为复数 z 的模, φ 为向量 z 与实轴正向的夹角,称为复数 z 的辐角,也记为 $\text{Arg } z$. 显然 φ 是不唯一的,彼此相差

2π 的整数倍:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

用 $\arg z$ 表示 z 的所有辐角中位于 $(-\pi, \pi]$ 中的唯一的特定值, 称为 z 的辐角的主值, 从而有

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

利用 i 的定义和乘幂的运算, 可以直接得到

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \dots \quad (1.1.1)$$

对实数 φ, w , 我们知道 $e^w, \cos \varphi, \sin \varphi$ 在 $w_0 = 0, \varphi_0 = 0$ 有收敛半径为 ∞ 的 Taylor 级数展开式. 如果我们在 e^w 中允许 w 取复数 $i\varphi$, 则利用三个 Taylor 级数展开式和 (1.1.1) 可以形式地验证

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (1.1.2)$$

利用此关系就得到了复数 z 的指数表示形式 $z = |z|e^{i\operatorname{Arg} z}$. 在后面, 我们就用 (1.1.2) 作为复变量的指数函数的定义:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (1.1.3)$$

它是实变量指数函数的一个自然推广. 对复数 $z = 0$, 其模为 0, 但其辐角没有定义.

根据前面的对应关系, 在复平面上的任何一个有限点 M , 都和一个有限的复数 $z = x + iy$ 对应起来了. 有时我们还需要引进复平面上的一个“无穷远点”, 该“点”的模为无穷大, 辐角不确定. 包含了“无穷远点”的复平面称为扩充复平面. 该无穷远点可以通过球面投影的方法进行如下定义. 将一个球放置在复平面上, 球的南极 S 在复平面上的原点和复平面相切. 则对复平面上的任一有限点 A , 它与球的北极 N 的连线与球面有唯一的交点 A' (图 1.2). 这样一来, 复平面上任意的一个有限点都在球面上有唯一的一个异于北极 N 的点与之对应. 点 A 对应的复数 z 的模越大, 其在球面上的对应点 A' 就越靠近北极. 很自然, 我们把在这种规则下与北极 N 对应的复平面上的“点”称为无穷远点. 这里把球面上的点和平面上的点建立起一一对应关系的方法称为测地投影, 使用的球称为复数球. 这种方法也是绘制地图的基础.

类似于实数域上邻域、集合的概念, 对复平面上的点, 同样可以引进对应的概念. 以复平面 C 的点 z_0 为中心, $\delta > 0$ 为半径的点集 $\{z : |z - z_0| < \delta\}$ 称

为 z_0 的 δ 邻域. 记 G 为复平面 C 的点集. 对 $z_0 \in G$, 如果存在 $\delta > 0$, 使得 $\{z : |z - z_0| < \delta\} \subset G$, 则称 z_0 为 G 的内点. 如果 G 的每一个点都是内点, 则称 G 是开集. 如果集合 G 内的任何两点都可以用完全属于 G 的一条折线连接起来, 则称 G 是连通集. 连通的开集称为区域.

下面给出复变函数的定义.

定义 1.1.1 设 D 是复平面上的一个区域. 如果按照某一规律 f , 使得 D 内的任一点 z 都有唯一的一个复数 w 与之对应, 则称在 D 上定义了一个单值函数 $w = f(z)$. 如果对 D 内的点 z , 对应于两个或两个以上的 w , 则称在 D 上定义了一个多值函数 $w = f(z)$. D 称为函数的定义域, 全体 w 的值的集合 M 称为函数 $w = f(z)$ 的值域.

例如

$$w = |z|, \quad w = \bar{z}, \quad w = \frac{z+1}{z-1} \quad (z \neq 1)$$

都是复变函数. 同样, 我们用下面的定义来给出一些复变量 $z = x + iy$ 的初等函数:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (1.1.4)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (1.1.5)$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (1.1.6)$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1.7)$$

$$z^s = e^{s \operatorname{Ln} z}, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (1.1.8)$$

上述函数中, $e^z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$ 都是单值函数, 而 $\operatorname{Ln} z, z^s$ 则是多值函数. 它们是相应的实变量初等函数的推广. 注意, (1.1.8) 是由两个函数 (1.1.4) 和 (1.1.7) 的复合来定义的. 例如,

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i[\ln |i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)]} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

对这样定义的初等函数, 可以直接验证,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad \sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2. \quad (1.1.9)$$

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 \quad (1.1.10)$$

等性质也是成立的. 但是实变量初等函数的一些性质在对应的复变量初等函数中并不是完全保留的. 例如 $\sin z, \cos z$ 仍然具有实周期 2π , 但是 $|\sin z|, |\cos z| \leq 1$

不再成立. 再如, 对实变量的函数 e^x , 它不是周期函数, 但是复变函数 e^z 以复常数 $2\pi i$ 为周期. 另一方面, 需要注意, 由于 $\operatorname{Ln} z$ 是一个多值函数, (1.1.10) 不是一个通常的函数等式, 而是一个集合等式.

设函数 $w = f(z)$ 定义于区域 D 上. 如果把自变量 z 和函数值 w 的实虚部分开, 即 $z = x + iy, w = u + iv$, 则复变函数 $w = f(z)$ 又可以表示为

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

其中 $u(x, y), v(x, y)$ 是二元实变量 (x, y) 的实值函数. 因此一个复变函数 $w = f(z)$ 可以归结为一对二元实函数, 从而关于二元实函数的许多定义、公式、定理都可以直接移植到复变函数中. 例如, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$ 等价于

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0. \quad (1.1.11)$$

这是两个二元实变量函数的极限, 在微积分课程里面已经研究过了.

但是有时我们也直接讨论复变函数, 而不是把它分解成实虚部. 特别是复变函数也带有自身的某些特殊性. 一个重要的特性就是某些初等函数的多值性. 复数辐角的不唯一性是导致多值性的一个因素. 例如由 (1.1.7) 定义的对数函数 $\operatorname{Ln} z$, 其多值性部分 $\arg z + 2k\pi$ 反映了复数辐角的不唯一性. 对每一个确定的整数 k , $\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$ 都是 z 的单值函数, 称为多值函数 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支. 特别地, 我们把对应于 $k = 0$ 的那个分支, 称为 $\operatorname{Ln} z$ 的主值, 记为

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

对复平面上的任一非零复数 z , 上式定义了唯一的复数 $\ln z$ 与之对应.

再来讨论幂函数 z^s , 其中 s 是给定的复常数. 由定义 (1.1.8), 当 $s = n$ 为整数时注意到 $e^{2kn\pi i} = 1$ 有

$$z^s = e^{n[\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)]} = |z|^n e^{in \arg z},$$

它是一个单值函数. 当 $s = \frac{1}{n}$ (n 为整数) 时, 有

$$z^s = e^{\frac{1}{n}[\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)]} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

这是一个有 n 个值的多值函数, 即复数的 n 次方根. 由这两个结果易知, s 是有理数时, z^s 是一个取有限个值的多值函数. 而对一般的非有理数的复数 s , 由于 $e^{2k\pi si}$ 对 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 取值都是不同的, 因此 z^s 是一个取无限个值的多值函数.

例 1.1.1 计算 $\sin(1+2i)$ 和 $1^{\sqrt{2}}$ 的值.

解 由定义 (1.1.4)、(1.1.8) 计算得

$$\begin{aligned}\sin(1+2i) &= \frac{e^{i(1+2i)} - e^{-i(1+2i)}}{2i} = \frac{e^{-2}(\cos 1 + i \sin 1) - e^2(\cos 1 - i \sin 1)}{2i} \\ &= \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \sin 1 + i \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \cos 1.\end{aligned}$$

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} i 2k\pi} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

§1.1.2 解析函数

解析函数是复变函数研究的主要对象之一, 在理论和实际问题中具有广泛的应用. 它对应于一元实变函数中的可导函数, 但又比可导函数具有更强的性质.

定义 1.1.2 设函数 $w = f(z)$ 定义于区域 D 上, $z_0, z_0 + \Delta z \in D$. 如果

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导 (可微), 并称此极限值为 $f(z)$ 在 z_0 点的导数, 记为

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

复变函数导数与微分的定义在形式上与高等数学中一元函数导数与微分的定义是一致的, 因此关于实变函数的导数的运算法则和公式往往可以应用于复变函数.

注 1.1.1 由于 Δz 是在复平面 C 上变化的, $\Delta z \rightarrow 0$ 的方式是多种多样的, 可以沿着任意的曲线趋于 0. $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ 存在意味着当 Δz 以任意方式趋于复数 0 时, 极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

都存在并且相等. 这就对函数 $f(z)$ 提出了很强的要求, 它也是解析函数比一元实变函数中的可导函数具有更好性质的原因. 在一元实变函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的定义中, $\Delta x \rightarrow 0$ 只是在 x_0 的左右两个方向, 即所谓的左极限和右极限.

下面来讨论函数 $f(z)$ 可导的条件, 即著名的 Cauchy-Riemann 条件.

我们来讨论 Δz 沿复平面上的实轴和虚轴趋于 0 的两种特殊情况. 记 $z = x + iy, f(z) = u + iv$.

当 Δz 沿复平面上的实轴趋于 0 时, $\Delta y \equiv 0, \Delta z \equiv \Delta x \rightarrow 0$, 从而

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta z \rightarrow 0, \Delta y \equiv 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

类似地, 当 Δz 沿复平面上的虚轴趋于 0 时,

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta z \rightarrow 0, \Delta x \equiv 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - [u(x, y) + iv(x, y)]}{i\Delta y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

如果 $f(z)$ 是可导的, 则上面沿着两个特殊方向的极限应该存在并且相等. 从而有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.1.12)$$

(1.1.12) 是关于两个二元实变量的函数 $u(x, y), v(x, y)$ [它们是 $f(z)$ 的实部和虚部系数] 的偏微分方程组, 称为 Cauchy-Riemann 方程或者 Cauchy-Riemann 条件.

上述结果可以表示为

定理 1.1.1 (可导的必要条件) 设函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 定义于区域 D , 且在 $z = x + iy \in D$ 可导. 则二元函数 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x, y) 有一阶偏导数, 并且它们满足 Cauchy-Riemann 条件 (1.1.12).

显然, 由导数的定义, 函数如果在一点可导, 则一定在该点连续. 反之不然.

例 1.1.2 函数 $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ 在复平面上处处不可导.

证明 对此函数, 分别有 $u(x, y) = x, v(x, y) = 0$. 从而

$$u_x = 1, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = 0$$

它在复平面上处处不满足 Cauchy-Riemann 条件, 从而由可导的必要条件, 该函数处处不可导, 但它显然是处处连续的.

Cauchy-Riemann 条件仅保证了 Δz 沿实轴和虚轴趋于零时 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 的极限存

在且相等, 并没有保证 Δz 沿任意曲线趋于零时 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 的极限存在且相等. 因此由可导的定义, 定理 1.1.1 中的条件还不是函数可导的充分条件. 看下面的例子.

例 1.1.3 函数 $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|}$ 在 $z=0$ 满足定理 1.1.1 中的条件, 但在该点不可导.

证明 $f(z)$ 的实部和虚部分别是 $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $v(x, y) = 0$. 在点 $(0, 0)$ 处

$$u_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0, 0)}{\Delta x} = 0 = v_y(0, 0),$$

$$u_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0, 0)}{\Delta y} = 0 = -v_x(0, 0),$$

确实满足定理 1.1.1 中的条件. 记 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, 直接计算得到

$$\frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\Delta x + i\Delta y}.$$

当 Δz 沿射线 $\Delta y = k\Delta x$, $k > 0$ 趋于 0 时, 上式的极限是一个与 k 有关的常数 $\frac{\sqrt{|k|}}{1 + ik}$, 即 $\frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z}$ 在 $\Delta z \rightarrow 0$ 的极限不存在, 从而 $f(z)$ 在 $z=0$ 不可导.

我们不加证明地给出函数可导的充要条件如下.

定理 1.1.2 (可导的充要条件) 设函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 定义于区域 D . 则 $f(z)$ 在 $z = x + iy \in D$ 可导的充要条件是

- (1) 二元实变量的函数 $u(x, y), v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微;
- (2) $u(x, y), v(x, y)$ 在点 (x, y) 满足 Cauchy-Riemann 条件.

注 1.1.2 回忆高等数学中关于二元函数可微的定义: $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x, y) 有一阶偏导数并不能保证 $u(x, y), v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微. 但是, 如果 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x, y) 的一阶偏导数还是连续的, 则 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x, y) 就可微了. 因此如果 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x, y) 有一阶连续的偏导数并且满足 Cauchy-Riemann 条件, 则 $f(z)$ 在 z 可导, 且导数可以表示为

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.1.13)$$

例 1.1.4 证明 $f(z) = e^z$ 在整个复平面上都是可导的, 且 $f'(z) = f(z) = e^z$.

证明 由 e^z 的定义, 对 $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$. 直接计算得到

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x,$$