遵照教育部二十五年修正課程標準編輯

新課程標準世界中學教本

高級中學學生用

高中新解析幾何

(乙組用)

編著者 許澄泉

中華民國二十八年三月初版

高中新解析幾何（乙組）

實價國幣四角
（外埠酌加運費匯費）

編著者 許潤泉
校訂者 駱師曾
發行人 陸高誼
出版者 世界書局

發行所 上海及各省 世界書局

編輯大意

(一) 本書依據教育部念五年頒布修正課程標準編輯,專為高級中學三年級乙組學生學習解析幾何學之用.

(二) 本書重在明瞭學理及指示運算步驟,習題中力避冗雜之計算,以免減少學生演題之興趣.

(三) 本書為節省時間計,揀選習題,以少重複而各備一法為目的.但重要問題須多加練習且應熟記者,則不在此例.

(四) 本書於許多簡單定理之證明,或略舉其要點,或留待學者自證.在使發展學者之推想能力,減少機械的注入法.

(五) 解析幾何乃代數及幾何混合研究之學科.本書對於解析及幾何雙方並重,在習題中列入幾何作圖題甚多.

(六) 凡純用解析法解一問題若為繁複者,則間用幾何性質使解法趨於簡單.例如求適合三條件之圓方程式;恆用解析法先求此圓之作法——即求其中心及半徑——再由圓之定義而求方程式等.

(七) 關於圓錐曲線之問題,除許多數字方程式之練習外,並注重關於幾何性質者.

(八) 本書以倉卒間編成,魯魚亥豕,在所不免,敢乞海內學者不吝指正,毋任銘感.

目次

第一章　直坐標

第二章　曲線

第三章 軌跡

第四章 直線

第五章 圓

第六章　極坐標

第七章　圓錐曲線

I. 引言

II. 抛物線

III. 橢圓

IV. 雙曲線

V. 坐標軸之移轉

VI. 普徧二次方程式

第八章　拋物線

第九章　有心圓錐曲線

第十章 高級平面曲線

希臘字母為解析幾何學中所常用,茲將其讀法列之如次:

字母	讀法	字母	讀法	字母	讀法
Α α	Alpha	Ι ι	Iota	Ρ ρ	Rho
Β β	Beta	Κ κ	Kappa	Σ σ ς	Sigma
Γ γ	Gamma	Λ λ	Lambda	Τ τ	Tau
Δ δ	Delta	Μ μ	Mu	Υ υ	Upsilon
Ε ε	Epsilon	Ν ν	Nu	Φ ϕ	Phi
Ζ ζ	Zeta	Ξ ξ	Xi	Χ χ	Chi
Η η	Eta	Ο o	Omicron	Ψ ψ	Psi
Θ θ	Theta	Π π	Pi	Ω ω	Omega

第一章　直坐標

§1.　直線上一點之位置　已知一點在一所設直線上,則此點之位置,恆以其與所設直線上某一定點之距離表之.例如京滬鐵路上之武進站,在上海西167.36公里;華氏寒暑表上之冰點,在零度以上之32°.於此可見決定一點之位置,除知其與所設點之距離外,尚須知其方向.上例中量之方向爲“武進站在上海之西”及“零度以上”.

§2.　方向線分　根據上節所論,一線分除其長短外,尚須涉及其一端至他端的方向.

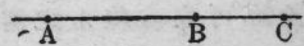

圖 1

如此之線分稱曰<u>方向線分</u>.

設線分之端點爲 A 及 B,則線分 AB 與 BA 爲相異者,前者指自 A 至 B 之方向,後者則指自 B 至 A 之方向.

若取一方向爲正值,則其反對方向爲負值:故

$$AB=-BA$$

或

$$AB+BA=0$$

設 C 爲 A 與 B 所決定直線上任一點,不論 A,B,C 之位置如何,可得

$$AB+BC=AC,$$

或

$$AB+BC+CA=0.$$

蓋在一直線上,自 A 至 B,再自 B 至 C,與自 A 至 C 之結果相同也;或自 A 至 B 再自 B 至 C,復自 C 至 A,其結果猶如未動也.

在同一直線或平行直線上之二方向線分,如爲同向

而等長者,則此二方向線分相等.

連接二點 A 與 B 之直線,如不論其方向,可任意表之爲 AB 或 BA.故一線分之爲方向線分與否,須有顯著之說明,方免混淆.

§3. 實數與直線上之點相對應 設一點 P 在直線 $x'x$ 上(圖 2),於其上取定點 O;P 之位置以自 O 至 P 之方向距離定之(取一適當之單位以量距離之長短)

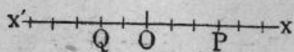

圖 2

假定自 O 向右量者表正值,則向左量者爲負值,故 P 之位置,可以 OP 所表之數量附加相當符號以定之.(若爲正量,常省去其符號,即數之前而不寫符號乃爲正值.)圖中,P 與 O 之距離爲 3,Q 與 O 之距離爲 -2. 於是代數上之實數,可與直線上之諸點一一對應:即每一實數對應於方向直線上之一點而僅有一點,反之亦然.

§4. 平面上一點之位置 若一點在所設一平面上,至少須有二量——即坐標——以定其位置.例如地球上某地,可以其緯度若干,經度若干定之;牆壁上鏡框之位置,可以其距房角若干尺,高於地板若干尺定之.而各坐標亦須依一定方向量之,即平面上一點之位置,至少須以二方向線分表之.

§5. 直坐標 設平面上一點 P,及此平面上二垂直直線 $x'x$, $y'y$. 稱直線 $x'x$ 曰 x 軸,$y'y$ 曰 y 軸,二軸合稱曰坐標軸,其交點 O 曰原點.則 P 之位置,可以其與二軸之方向距離決定之.如此之二方向線分,曰 P 之直坐標:與 y 軸之方向距離——NP 或其等量 OM——爲其橫坐標,與 x 軸之方向距離 MP 爲其縱坐標.依第 3 節所論,各坐標可以代數上之實數表之.

通常設定二軸之位置如圖 3 所示:自 y 軸向右量,橫

坐標爲正,向左量則爲負;自 x 軸向上量,縱坐標爲正,向下量則爲負.

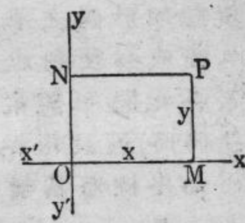

圖 3

一點之坐標,恆記在括弧內,且橫坐標須寫在縱坐標之前:圖 4 中,$P(3,5)$,或簡寫爲$(3,5)$,乃表P之橫坐標爲 3,縱坐標爲 5.同法Q, R, 及 S之坐標各爲$(2,-4)$,$(-4,-3)$及$(-3,0)$.

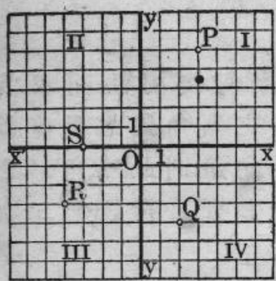

圖 4

二坐標軸分平面爲四部分,各稱曰象限,並記其次序如圖 4 所示.在第一及第四象限中之橫坐標爲正,否則爲負;在第一及第二象限中之縱坐標爲正,否則爲負.

由是,應用直坐標系可將平面上之點與一雙實數有唯一之對應關係:即每一雙實數可決定平面上之一點而僅有一點;反之亦然.

在坐標平面上之直線斜交兩軸者,恆不計其方向(除特別指明者外);平行於坐標軸之線分皆爲方向線分.平行於Ox之線分,其方向同於Ox者爲正,反之爲負;平行Oy之線分,其方向同於Oy者爲正;反之爲負.

§6　單位　解析幾何之作圖,恆用方格紙如圖 4 者.但方格紙上每格不必一定表示一單位,而每格所表之數値,可視問題之性質而變化之,——其目的爲:(A)坐標値較大時,則以一格表示數單位,使所描寫之點不出坐標紙之範圍;如點爲(20, 45), (36,−13) 等,可以每格表示 4 單位;(B)坐標値較小時,則以數格表示一單位,使相鄰之點可分別淸楚而不相混淆;如點爲(0.1, 0.3), (−0.25, 0) 等,可以20格表一單位.至各圖中所採取表示單位之格數,

務須註明於圖之下方以便察驗.

間或爲便利起見,兩軸上所採取表示一單位之格數不必相同,可視縱橫坐標值之大小而決定之;但非特別註明時,恆設兩軸上之單位相同.

如坐標值爲無理數時,取其近似值而描寫其坐標點.例如點$(\sqrt{2},\sqrt{3})$,大都取

$$\sqrt{2}=1.4,\qquad \sqrt{3}=1.7$$

而描寫之;若以許多格表示一單位時,則取

$$\sqrt{2}=1.41\qquad \sqrt{3}=1.73.$$

若僅爲二次不盡根者,可利用幾何作圖法而求其準確之長度.設每小格爲1,則小方格之對角線之長度爲$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$;取1及$\sqrt{2}$之長爲直角邊,則此三角形之斜邊長爲$\sqrt{1^2+\sqrt{2}^2}=\sqrt{3}$;順次依此類推,可得任何二次不盡根之長.

§7. **二點間之距離** 應用商高定理(即畢氏定理),可以P_1及P_2之坐標值表P_1P_2之長如次:

設$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$,從圖5,令P_1P_2之長爲d,則

$$d=\sqrt{P_1Q^2+QP_2^2};$$

但

$$P_1Q=M_1M_2=OM_2-OM_1$$
$$=x_2-x_1,$$
$$QP_2=M_2P_2-M_2Q=M_2P_2-M_1P_1$$
$$=y_2-y_1.$$

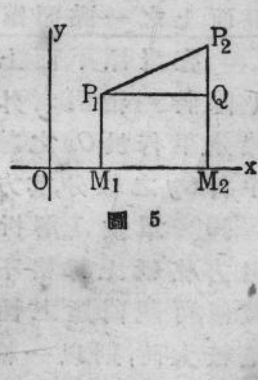

圖 5

故

(1) $$\boldsymbol{d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.}$$

由P_1及P_2之不同位置,可得不同之圖形,學者可證其得同一之結果.解析幾何中之公式,不因點之地位而有變更;證定理或公式,恆取點之在第一象限而證之.

例: (a)求二點$(3,2)$及$(-5,4)$間之距離.

從公式(1),得

$$d=\sqrt{(-5-3)^2+(4-2)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{7}.$$

(b)一動點至原點之距離恆爲2;以代數方程式表示此性質.

設動點之坐標爲(x,y),則從(1),此點與原點聯線之長爲$\sqrt{x^2+y^2}$.故所求方程式爲

$$\sqrt{x^2+y^2}=2,$$

或

$$x^2+y^2=4,$$

動點(x,y)之軌跡顯然爲以原點作中心,2作半徑之圓.

習　　題

1. 描寫頂點爲$(2,4)$,$(0,5)$,$(-3,3)$,$(-1,-6)$之四邊形.
2. 作三角形,設頂點爲$(-10,-8)$,$(36,24)$,$(-12,20)$.
3. 描寫諸點$\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$,$\left(\frac{1}{6},-\frac{5}{6}\right)$,$\left(1,\frac{7}{6}\right)$.
4. 作頂點爲$(0,0)$,$(0.07,0.11)$,$(-0.03,0.06)$,$(0.20,-0.08)$之四邊形.
5. 描寫諸點$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},0\right)$,$\left(-2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$,$\left(\frac{1}{2}\pi,\pi\right)$.
6. 用一式以表示x軸上之諸點;y軸上之諸點;過O而平分一三兩象限之直線上諸點;過O而平分二四兩象限之直線上諸點平行於y軸而在其右二單位之諸點;平行於x軸而在其下三單位之諸點.

求下列各對點間之距離:

7. $(2,4)$,$(3,7)$.

8. $(-2,-5),(4,-6)$.

9. $(3,-2),(-5,-8)$.

10. $(0,-3)$, $(4,0)$.

11. $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),(-2,2)$.

12. $\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right),\left(-2,\frac{7}{6}\right)$.

13. $\left(-\frac{3}{5},-\frac{2}{5}\right),\left(\frac{1}{10},-\frac{3}{20}\right)$.

14. 證頂點爲 $(2,-2),(-1,-1),(1,5)$ 之三角形爲直角三角形,並求其面積.

15. 證$(2,3),(-3,0),(5,8)$ 組成等腰三角形,並求其面積.

16. 證 $(-3,8),(-7,6),(-3,-2),(1,0)$ 爲平行四邊形之頂點.此形是否爲長方形?

17. 證$(0,-1),(2,1),(0,3),(-2,1)$,組成一正方形.

18. 一圓之中心爲$(-4,2)$, 半徑爲 5. 求平分於點 $(-2,1)$ 之弦長.

19. 示$(10,2),(7,1),(-2,-2)$ 在一直線上.

20. 三點$(3,0),(-1,8),(48,-90)$是否在一直線上?

21. 設(x,y) 至點$(-5,3)$ 之距離爲5,以方程式表此性質.

22. 以方程式表點(x,y)與二點$(3,4),(-1,2)$ 爲等距離.

23. 以方程式表(x,y) 至 $(1,2)$ 間之長,二倍於 (x,y) 至 $(-1,0)$ 間之長.

§8. 線分之中點 設 $P(x,y)$爲 $P_1(x_1,y_1)$及 $P_2(x_2,y_2)$之中點在圖 6 中,

$$OM=OM_1+M_1M.$$

但

$OM=x, OM_1=x_1$

而

$$M_1M=\frac{1}{2}M_1M_2=\frac{1}{2}(x_2-x_1).$$

$$\therefore \qquad x=x_1+\frac{1}{2}(x_2-x_1).$$

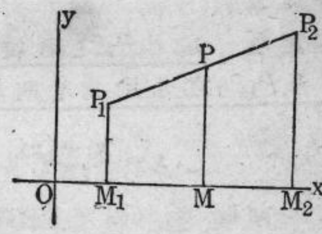

圖 6

同理, $y=y_1+\frac{1}{2}(y_2-y_1).$

化簡,得

$$(1) \qquad \boldsymbol{x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)}, \qquad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)}.$$

即一線分中點之坐標爲其二端點坐標之等差中項.

公式(1)不僅可用於由已知線分之二端點以求其中點;但當已知一端及其中點,亦可用之以求他端,如例(b)所示.

例: (a) 求 $(3,2)$, $(-5,6)$ 聯線之中點坐標.

代入(1),得

$$x=\frac{1}{2}(3-5)=-1, \qquad y=\frac{1}{2}(2+6)=4.$$

(b) 自 $P_1(3,2)$ 至 $P_1(5,-6)$ 之聯線引長至 P_2, 使 $P_1P=PP_2$. 求 P 之坐標.

今一端爲 $(3,2)$, 中點爲 $(5,-6)$, 求他端 $P_2(x_2,y_2)$.

從(1),得

$$5=\frac{1}{2}(3+x_2), \qquad -6=\frac{1}{2}(2+y_2),$$

故 $\qquad x_2=7, \qquad y_2=-14.$

線分之分點. 設線分 P_1P_2 被一點 P 分爲二線分,則稱 P 爲 P_1P_2 之分點. 如 P 在 P_1P_2 上,稱之曰內分點; 如 P 在 P_1P_2 之延線上,稱之曰外分點. P_1P_2 與 PP_2 之比曰 P 分 P_1P_2 之分比. 如 P 爲內分點,則分比爲正; P 爲外分點則

分比爲負.

定理 設 P_1P_2 之兩端 P_1, P_2 之坐標爲 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 而 P 分 P_1P_2 之分比爲 γ, 則 P 坐標爲

$$(2) \qquad x=\frac{x_1+\gamma x_2}{1+\gamma}, \qquad y=\frac{y_1+\gamma y_2}{1+\gamma}.$$

如圖 (6), (假定 P 不是中點) 由幾何定理, 得

$$(3) \qquad \frac{M_1M}{MM_2}=\frac{P_1P}{PP_2}=\gamma.$$

今 $$M_1M=OM-OM_1=x-x_1,$$
$$MM_2=OM_2-OM=x_2-x.$$

代入(3), 得 $$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\gamma.$$

解 x, 則得 (2) 之第一式. 自 P_1, P, P_2 引 Oy 之垂線; 同法可證 (2) 之第二式.

若 $\gamma=1$, 則 $P_1P=PP_2$; 卽 P 爲 P_1P_2 之中點. 故 (1) 爲 (2) 之特例.

習　題

於下列各雙點之聯線, 求其中點之坐標. 又作圖以校驗之.

1. $(1, 2), (3, 5)$.

2. $(6, 0), (5, 1)$.

3. $(-1, -3), (-4, 2)$.

4. $(-5, 7), (-4, -6)$.

5. 於聯接 $(8, -18), (-6, -4)$ 之線分, 試求其四等分點之坐標.

6. 延長自 $(-11, 1)$ 至 $(7, -2)$ 之聯線, 使二倍於原長. 求他端之坐標.

7. 圓心爲 $(5, 5)$, 圓周上一點爲 $(6, -2)$, 求過此點之