中学数学

综合题一千例

中册

武汉市中小学教材编写组
武汉市教师进修学院　合编
武汉市洪山区教育局教研室

中学数学

综合题一千例

中册

武汉市中小学教材编写组
武汉市教师进修学院 合编
武汉市洪山区教育局教研室

目　　录

平 面 几 何

401．令x、y和1表示某一三角形的边长，并且假定

$$x \leqslant 1,\ y \leqslant 1.$$

用直角坐标平面上的点（x，y）表示这个三角形，按照这种方式，分别地明确叙述和清晰描出表示下列各种三角形的点集：

（A）（一般）三角形；（B）等腰三角形；（C）直角三角形；

（D）锐角三角形；　（E）钝角三角形；

试定出表示其他值得注意的三角形的点。

解　（A）必须满足$x+y>1$．故表示三角形的点集是以A（1，0），B（1，1），C（0，1）为顶点的三角形，但不包括AC上的点（下同）．

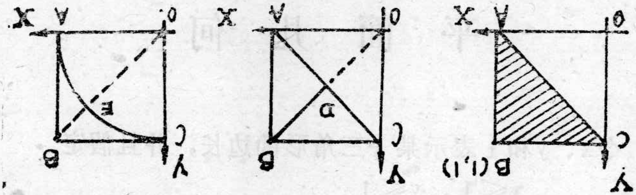
（B）必须满足$x=y\leqslant 1$，或$x\leqslant y=1$．或$y\leqslant x=1$．故表示等腰三角形的点集是线段BD，D的坐标是$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$；线段BA和BC．

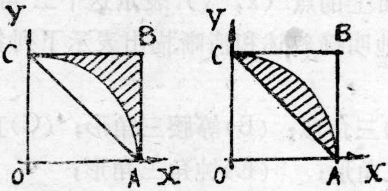
（C）必须满足$x^2+y^2=1$．故表示直角三角形的点集是以原点为园心，1为半径的园上的一段弧AC．

（D）必须满足$x^2+y^2>1$，故表示锐角三角形的点集是$\overset{\frown}{AC}$、AB、BC之间的区域．

（E）必须满足$x^2+y^2<1$，故表示钝角三角形的点集是$\overset{\frown}{AC}$、AC之间的区域．

B点表示等边三角形，$\overset{\frown}{OB}$与AC的交点E表示 等腰直角三角形.





402．三角形三边为l、m，和n．数l、m、n为正整数且满足$l \leqslant m \leqslant n$．（1）取$n=9$，求出上述不同三角形的个数，（2）求出一般法则.

解　本题即在m、n、l均为正整数，且$l \leqslant m \leqslant n$的 条件下，求满足不等式$l+m>n$的解的组 数．这 里，$n$为已知的自然数.

（i）n为偶数时

当$l=1$　对应的　$m=n$；

当$l=2$　对应的　$m=n$，　$n-1$；

……　　……　　……

当$l=\frac{n}{2}$　对应的　$m=n, n-1, \cdots\cdots \frac{n}{2}+1$；

显然上述各组解均满 足 条 件，其组 数 成A．P，共有

$$\frac{\frac{n}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)}{2}=\frac{n}{8}(n+2)$$ 组。

当 $l>\frac{n}{2}$ 时　其解答必需注意满足条件 $m\geqslant l$；

当 $l=n$ 时　　对应的　$m=n$；

当 $l=n-1$ 时　对应的　$m=n,\ n-1$；

……　……　……　……

当 $l=\frac{n}{2}+1$ 时　对应的　$m=n,\ n-1,\ \cdots\cdots\frac{n}{2}+1$，

以上亦共有 $\frac{n}{8}(n+2)$ 组.

即　n为偶数时，满足条件的三角形共有 $\frac{n}{8}(n+2)\times 2$

$=\frac{n}{4}(n+2)$ 组.

(ii) n为奇数时，仿上法同样可求出两个数列，但它们的最后一行应分别为

当 $l=\frac{n-1}{2}$ 时，对应的 $m=n,\ n-1,\ \cdots\cdots\frac{n+1}{2}+1$；

当 $l=\frac{n+1}{2}$ 时，对应的 $m=n,\ n-1,\ \cdots\cdots\frac{n+1}{2}$.

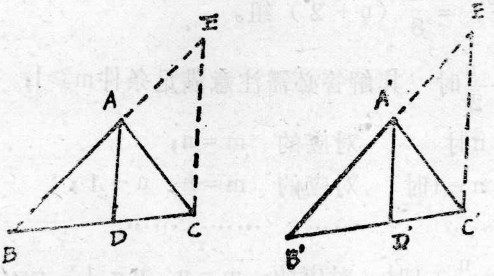
因此，n 为奇数时，满足条件的三角形个数为

$$\frac{\frac{n-1}{2}\left(1+\frac{n+3}{2}\right)}{2}+\frac{\frac{n+1}{2}\left(1+\frac{n+1}{2}\right)}{2}=\frac{n^2+4n-1}{4}.$$

据此，不难求出：当 $n=9$ 时，所求三角形的个数为29.

403. 如果一个三角形的两边及这两边的夹角的平分线，分别与另一个三角形的两边及这两边的夹角的平分线对

应相等，试证这两个三角形全等．



证：如图在两三角形ABC，$A'B'C'$中，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，AD，$A'D'$分别是$\angle A$，$\angle A'$的平分线，$AD=A'D'$．

若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$不全等，则$\angle A>\angle A'$，或$\angle A<\angle A'$．

延长BA至E，使$AE=AC$，连CE，延长$B'A'$至E'，使$A'E'=A'C'$．连$C'E'$．因AD平分$\angle A$，所以$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle A=\angle DAC$．故$AD\parallel EC$．同理可证$A'D'\parallel E'C'$．

由$\triangle BCE\backsim\triangle BDA$，得 $\dfrac{AD}{CE}=\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{AB}{AB+AC}$

$$AD=\frac{AB\cdot CE}{AB+AC}.$$

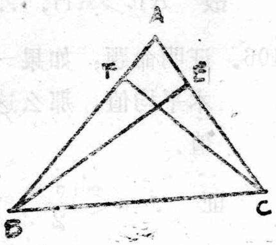
同理由$\triangle B'C'E'\backsim\triangle B'D'A'$可得

$$A'D'=\frac{A'B'\cdot C'E'}{A'B'+A'C'}=\frac{AB\cdot C'E'}{AB+AC}.$$

当$\angle A>\angle A'$时，$\angle CAE<\angle C'A'E'$，$CE<C'E'$．故 $AD<A'D'$．同理当$\angle A<\angle A'$时．$AD>A'D'$．

所以无论那种情况$AD\neq A'D'$．与已知相矛盾．故$\triangle ABC$必与$\triangle A'B'C'$全等．

404. 在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，CF，BE分别为AB及AC上的高，试证$AB+CF>AC+BE$.



证∵ $\triangle BEA \backsim \triangle CFA$.

$$\therefore \quad \frac{AB}{BE}=\frac{AC}{CF}.$$

$$\frac{AB-BE}{BE}=\frac{AC-CF}{CF}$$

$$\frac{AB-BE}{AC-CF}=\frac{BE}{CF}.$$

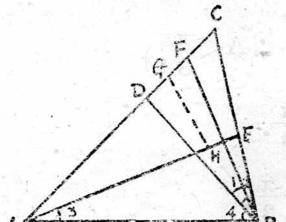
∵ $AB>AC$,

∴ $BE>CF$,

于是 $AB-BE>AC-CF$.

移项得 $AB+CF>AC+BE$.

405. 在$\triangle ABC$内作AE及BD. 设$\angle CAE<\angle CBD$，又$\angle BAE<\angle ABD$. 求证$AE>BD$.



证 如图，作$\angle 1=\angle CAE$，$\angle 1<\angle 2$，$\angle 3<\angle 4$.

∴ $\angle 1+\angle 3<\angle 2+\angle 4$.

∴ $BC<AC$.

既$\angle 1<\angle 2$，故在$\angle CBD$内作 $\angle DBF=\angle 1$，

∵ $\angle 3<\angle 4$.

∴ $\angle 1+\angle 3<\angle 4+\angle 1$. ∴ $BF<AF$.

于是在AF内截取$AG=BF$. 从G作FB的平行线交AE于其内的H点，于是就$\triangle AGH$，$\triangle BFD$中，$AG=BF$（截取的），$\angle AGH=\angle BFD$（同位角），$\angle GAH=\angle FBD$,

故　$\triangle AGH \cong \triangle BFD$.

∴　$AH = BD$，令　AH为AE的一部分，

故　$AE > AH$，∴　$AE > BD$.

406. 证明命题：如果一个三角形的一边小于其他二边的算术平均值，那么这边的对角小于其他两角的算术平均值.

证　∵ $a < \frac{b+c}{2}$，则$2(2R\sin A) < 2R\sin B + 2R\sin C$.

即　　$2\sin A < \sin B + \sin C$.

但　　$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$，

因此　$\sin A + 2\sin A < \sin A + (\sin B + \sin C)$，

则　　$3\sin A < \frac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴　　$\sin A < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因　　a为小边，则A必锐角　∴$A < \frac{\pi}{3}$.

由此　$B + C = \pi - A > \pi - \frac{\pi}{3}$.

即　$B + C > \frac{2\pi}{3}$　$\frac{B+C}{2} > \frac{\pi}{3}$.

∴　　$A < \frac{B+C}{2}$.

407. 若三角形的三角成等差数列，三边又成等比数列，则这个三角形是正三角形.

证：设三个角为A、B、C，其对边为a、b、c.

若$A\leqslant B\leqslant C$，则根据题意有

$$2B=A+C=180^\circ-B,$$

故 $3B=180^\circ$，$B=60^\circ$.

$\because$ $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.

以 $B=60^\circ$，$b^2=ac$代入上式，得

$$\frac{1}{2}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}.$$

化简，得 $a^2+c^2-2ac=0$.

即 $(a-c)^2=0$.

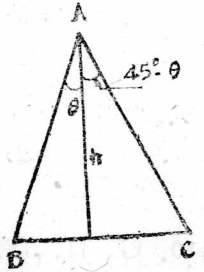
$\therefore$ $a=c$.

故此三角形为等腰三角形，现等腰三角形中有一个角为60°，所以此三角形必为正三角形.

408. 在△ABC中，$\angle A=45^\circ$，AD是BC边上的高，BD＝2，DC＝3，求△ABC的面积。

解：设$AD=h$，$\angle BAD=\theta$，则

$$\angle CAD=45^\circ-\theta.$$



故得 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{2}{h}$，$\operatorname{tg}(45^\circ-\theta)=\dfrac{3}{h}$.

将第二式展开，得

$$\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}\theta}=\frac{3}{h}.$$

将 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{2}{h}$代入上式，得

$$\frac{1-\dfrac{2}{h}}{1+\dfrac{2}{h}}=\frac{3}{h}.$$

化简，得　$h^2-5h-6=0$.

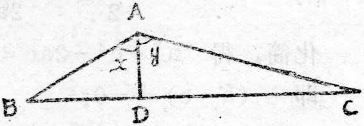
解之，得　$h=6$（只取正根）.

所以　$\triangle ABC$的面积$=\frac{1}{2}\times(2+3)\times6=15$.

409. 在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$，$A=135°$，$AD=2$，$BD=3$，求DC（不查三角函数表）.

解　在rt$\triangle ABD$中，设$\angle BAD=X$，则

$$tgX=\frac{3}{2}.$$



$$\therefore\quad X=arctg\frac{3}{2}.$$

在rt$\triangle ADC$中，设$\angle CAD=Y$，则

$$Y=A-X=135°-arctg\frac{3}{2}.$$

故　$DC=AD\cdot tgY=2\cdot tg(135°-arctg\frac{3}{2})$

$$=2\cdot\frac{tg135°-tg(arctg\frac{3}{2})}{1+tg135°\cdot tg(arctg\frac{3}{2})}$$

$$=2\cdot\frac{-1-\frac{3}{2}}{1+(-1)\cdot\frac{3}{2}}=10.$$

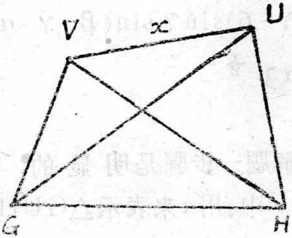
410. G、H、V和U是一个四边形的顶角（按顺序）. 一个测量员要求出$UV=x$，他已知$GH=1$，和$\angle GUH=\alpha$，$\angle HUV=\beta$，$\angle UVG=\gamma$，$\angle GVH=\delta$

(A) 用α、β、γ、δ和1表示x

(B) 求出一个检验所得结果的正确性的方法.

（C）假定你有解（A）的明确方案，用简短 的语言叙述出来。

解 （A）在△HUV中



$$\frac{HV}{\sin\beta}=\frac{x}{\sin(\beta+\gamma-\text{б})},$$

则 $$HV=\frac{x\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma-\text{б})},$$

同理在△GUV中

$$GV=\frac{x\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\gamma-\alpha)},$$

在△GVH中

$$GH^2=\frac{x^2\sin^2\beta}{\sin^2(\beta+\gamma-\text{б})}+\frac{x^2\sin^2(\beta-\alpha)}{\sin^2(\beta+\gamma-\alpha)}$$

$$-2\frac{x^2\sin\beta\sin(\beta-\alpha)\cos\text{б}}{\sin(\beta+\gamma-\text{б})\sin(\beta+\gamma-\alpha)}$$

$$=\frac{x^2\sin^2\beta\sin^2(\beta+\gamma-\alpha)+x^2\sin^2(\beta-\alpha)\sin^2(\beta+\gamma-\text{б})}{\sin^2(\beta+\gamma-\text{б})\sin^2(\beta+\gamma-\alpha)}$$

$$-\frac{2x^2\sin\beta\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\gamma-\alpha)\sin(\beta+\gamma-\text{б})\cos\text{б}}{\sin^2(\beta+\gamma-\text{б})\sin^2(\beta+\gamma-\alpha)}.$$

$\therefore\ x=\frac{n}{m}$，其中 $n=l\sin(\beta+\gamma-\text{б})\sin(\beta+\gamma-\alpha)$，

$$m=[\sin^2\beta\sin^2(\beta+\gamma-\alpha)+\sin^2(\beta-\alpha)\times\sin^2(\beta+\gamma-\text{б})-2\sin\beta\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\gamma-\alpha)\sin(\beta+\gamma-\text{б})\cos\text{б}]^{\frac{1}{2}}.$$

（B） 检验的方法：可通过△HUV用x表示UH.

$UH=\frac{x\sin(\gamma-\text{б})}{\sin(\beta+\gamma-\text{б})}$. 通过△GUV，用x表示GU，

$GU=\frac{x\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma-\alpha)}$. 然后利用△GUH求x.

$x=\frac{n}{m'}$，其中$n'=l\sin(\beta+\gamma-\alpha)\sin(\beta+\gamma-б)$，

$$m'=[\sin^2(\gamma-б)\sin^2(\beta+\gamma-\alpha)+\sin^2\gamma\cdot\sin^2(\beta+\gamma-б)-2\sin(\gamma-б)\sin\gamma\sin(\beta+\gamma-\alpha)\cdot\sin(\beta+\gamma-\alpha)\cos\alpha]^{\frac{1}{2}}$$

看两者的答案是否一致。

(C)如下面A、B所介绍的，解题一步骤是明显的，即

（1）分别在△GVU，△HVU中.用x来表示△GUH，或△GVH之两边。

（2）在△GUH或△GVH中利用余弦定理引出关于x的方程，以求x。

411．在△ABC中，BC＝a，AC＝b，AB＝c。

（1）求证：用$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$为边长可以作成一个三角形。

（2）如果把（1）中的三角形记为△A′B′C′，其中$B'C'=\sqrt{a}$，$C'A'=\sqrt{b}$，$A'B'=\sqrt{c}$，求证：△A′B′C′是锐角三角形。

（3）如果△ABC不是等边三角形．求证：△ABC与△A′B′C′这两个三角形不论它们的边怎样对应都不相似。

证明：（1）∵a、b、c为△ABC的三边．

$\therefore a+b>c$．$b+c>a$．$a+c>b$．

$\because\ 2\sqrt{ab}>0$，

$\therefore\ a+2\sqrt{ab}+b>c$ 即$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>c$．

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$（取正值）．

同理可证$\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}$，$\sqrt{a}+\sqrt{c}>\sqrt{b}$．

$\therefore$以$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$为三边可作一个三角形．

（2）在$\triangle A'B'C'$中．

根余弦定理：$\cos A'=\dfrac{(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2-(\sqrt{a})^2}{2\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}}$

$$=\frac{b+c-a}{2\sqrt{bc}}.$$

由于$b+c>a$，故$b+c-a>0$．

$\therefore \cos A'=\dfrac{b+c-a}{2\sqrt{bc}}>0$．

$\therefore A'$为锐角．同理可证B'、C'均为锐角．

$\therefore \triangle A'B'C'$为锐角三角形．

（3）若$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$．并设$a\geqslant b\geqslant c$则有

$\sqrt{a}\geqslant\sqrt{b}\geqslant\sqrt{c}$，则三边成比例只有

$$\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{b}{\sqrt{b}}=\frac{c}{\sqrt{c}}.$$

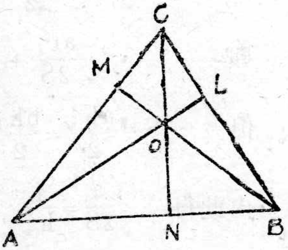
即$\dfrac{a\sqrt{a}}{a}=\dfrac{b\sqrt{b}}{b}=\dfrac{c\sqrt{c}}{c}$．

$\therefore\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}$．也就是$a=b=c$．

这与已知矛盾．

$\therefore$这两个三角形不论它们的边怎样对应，都不相似．

412．已知三角形的边长为a,b,c，求三角形垂心到各顶点的距离．



提示　$\triangle MOC\backsim\triangle AMB$，

$$\frac{CO}{AB}=\frac{MC}{MB}$$

或 $\dfrac{CO}{c}=\pm\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2bh_b}$

其中 $AB=c$，$MB=h_b$，

而MC可由 $c^2=a^2+b^2\pm 2b\cdot MC$ 求出。

因此

$$CO=\pm\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2bh_b}=\pm\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{4S}.$$

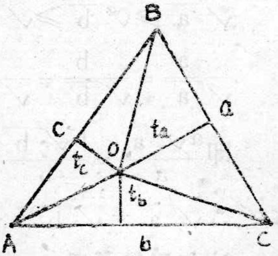
$(b\cdot h_b=2s)$。

同理可求得 AO和BO。

附注：垂心到钝角顶点的距离取（一）号。

413。由三角形ABC内一点O作到三边的垂线t_a，t_b，tc，证明

$$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1.$$



证明：将△ABC，△AOB，△BOC和△AOC的面积分别记为S，S_1，S_2和S_3。

可以得到：$S=S_1+S_2+S_3$

$$=\frac{ct_c}{2}+\frac{at_a}{2}+\frac{bt_b}{2},$$

即 $$\frac{at_a}{2S}+\frac{bt_b}{2S}+\frac{ct_c}{2S}=1. \quad (1)$$

但 $$S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2},$$

由此得 $$\frac{a}{2S}=\frac{1}{h_a};\ \frac{b}{2S}=\frac{1}{h_b};\ \frac{c}{2S}=\frac{1}{h}. \quad (2)$$

由（1），（2）式问题得证。

414．在三角形中已知两边a、b，且这两边上的高的和等于第三条高之长，求第三条边c的长．

解 ∵ $S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$，

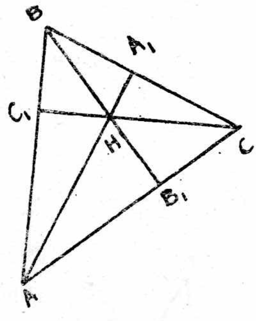
$h_c=h_a+h_b$，

∴ $c=\frac{2S}{h_a+h_b}$（其中S是三角形面积）．

∵ $h_a=\frac{2S}{a}$， $h_b=\frac{2S}{b}$，

∴ $c=\frac{ab}{a+b}$．

415．试证明三角形的垂心分每条高为两部分，这两部分的乘积是一个常数．



证明 AA_1, BB_1, CC_1是三条高，

H为垂心．

$rt\triangle AHB_1 \backsim rt\triangle BHA_1$，

$rt\triangle BHC_1 \backsim rt\triangle CHB_1$，

因此

$AH:BH=HB_1:HA_1$；

$BH:CH=HC_1:HB_1$；

由此得

$AH\cdot HA_1=BH\cdot HB_1=CH\cdot HC_1$．

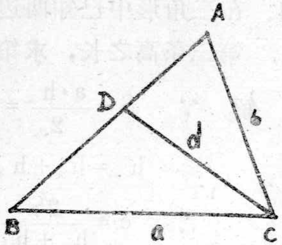
416．令a、b、c表示一个三角形的边，d表示c边的对角的平分线长。

(A) 试用a、b、c表示d；

(B) 用你所能用的方法

(特殊情形，极限情形等等)

检验你所得的表达式。



解：如图，BC＝a，AC＝b，AB＝c。CD是∠C的平分线，且CD＝d。

(A) ∵△CBA＝△CBD＋△CAD，

$$\therefore\quad \frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ad\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}bd\sin\frac{C}{2}.$$

即 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(a+b)d\sin\frac{C}{2}$.

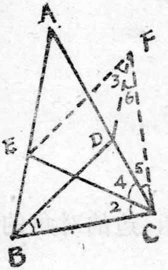
$$\therefore\quad d=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}=\frac{2ab}{a+b}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$$

这里，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$。

(B) 当a＝b＝c时，$S=\frac{3}{2}a$。此时，有

$$d=\frac{2}{2a}\sqrt{a\cdot a\cdot\frac{3a}{2}\cdot\left(\frac{3a}{2}-a\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$ 显然正确。

417．三角形ABC两底角的平分线BD＝CE，则△ABC为等腰三角形。



证明(反证法)：

若∠B≠∠C，不妨设∠B＞∠C，

则∠1≥∠2．

∵ BC公共，CE＝BD，∴CD＞BE。(1)

作EF$\underline{\parallel}$BD，则∠EFC＝∠ECF，

∠3＝∠1，