全国高等学校配套教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医用高等数学学习指导

第2版

主　编　张选群

人民卫生出版社

医用高等数学
学习指导

全国高等学校配套教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医用高等数学学习指导

第2版

主　编　张选群

编　者（以姓氏笔画为序）

马建忠（中国医科大学）

王　颖（吉林大学）

刘春扬（福建医科大学）

李　海（四川大学）

何穗智（中山大学）

张选群（武汉大学）

张喜红（长治医学院）

张福良（大连医科大学）

人民卫生出版社

图书在版编目（CIP）数据

医用高等数学学习指导/张选群主编．—2版．—北京：人民卫生出版社，2008.7

ISBN 978-7-117-10278-0

Ⅰ．医… Ⅱ．张… Ⅲ．医用数学—医学院校—教学参考资料 Ⅳ．R311

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第079312号

医用高等数学学习指导

第2版

主　　编：张选群
出版发行：人民卫生出版社（中继线 010-67616688）
地　　址：北京市丰台区方庄芳群园3区3号楼
邮　　编：100078
网　　址：http://www.pmph.com
E - mail：pmph @ pmph.com
购书热线：010-67605754　010-65264830
印　　刷：北京市燕鑫印刷有限公司
经　　销：新华书店
开　　本：787×1092　1/16　**印张：**11.75
字　　数：271千字
版　　次：2004年6月第1版　2008年7月第2版第7次印刷
标准书号：ISBN 978-7-117-10278-0/R·10279
定　　价：18.00元

前　言

《医用高等数学》是人民卫生出版社推出的具备医学专业特色的数学教材。经过专门的问卷调查，《医用高等数学》目前在基础、临床、预防、口腔医学与药学类专业使用广泛，是全国医学基础教育很受教师与学生欢迎的高等数学教材。人民卫生出版社最新出版的第 5 版《医用高等数学》密切配合我国医学教育改革与发展，除继续保留第 4 版在先进性、科学性特别是对我国医学教育的适用性等方面的优势外，在概率论基础部分还增加了一些崭新而又浅显易懂的医学应用实例和系统的理论阐述，这为医学生进一步学习卫生统计课程打下了更加坚实的基础。

新编《医用高等数学学习指导》则是在贯彻教育部和卫生部关于医学本科教学的指导原则下，特别为第 5 版《医用高等数学》配套的辅导教材。它精练地介绍了学习《医用高等数学》各章的基本要求，明确各章要点，详细解答了思考题与练习题，特别是疑难题的解析。在不失对我国医学教育适用性的前提下，对于开拓学生的思路，启迪学生的抽象思维，培养学生的科研能力很有帮助。《医用高等数学学习指导》第 2 版比第 1 版更加精练，更具有针对性，是一本很好的学习高等数学的工具书。另外，第 5 版教材还配备了教学多媒体光盘，不仅便于教师授课，还可以提高学生的学习兴趣，增强学生对高等数学难点的理解能力。

我们真诚地欢迎使用本教材的师生们多提宝贵建议。对教材最权威的评价来自于广大的教师与学生！

张选群

2008 年 2 月 28 日

目　录

第一章
函数和极限

[基 本 要 求]

掌握　极限、无穷小、连续等概念以及它们之间的联系；熟练掌握极限计算的基本方法，熟练判断函数的连续与间断等；掌握两个重要极限和无穷小(大)阶的分析方法并求简单的不定型(即 $0/0,\infty/\infty,1^{\infty},0^{0}$ 等)的极限.

熟悉　分段函数、隐函数与复合函数；熟悉函数复合与分解的方法；熟悉五类基本初等函数(即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数)的图形及其性质.

了解　闭区间 $[a,b]$ 上连续函数三个基本性质(即存在最大、最小值,有界性与根存在等三个全局性定理).

[全 章 要 点]

几个基本概念：函数、极限、无穷小、连续、间断；复合函数的分解与合成；求极限的常用方法(法则、公式、无穷小的性质等)；函数连续与间断的判定；无穷小的比较；两个重要极限.

[综 合 例 题]

例 1-1　已知 $y=\arcsin[\ln(x+1)]$，

(1) 分析 y 的复合结构；(2) 求 y 的定义域.

解：(1) $y=\arcsin u$，$u=\ln v$，$v=x+1$；

(2) $\begin{cases}-1\leqslant\ln(x+1)\leqslant 1\\ x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}-1\\ x>-1\end{cases}\Rightarrow D:\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1,\mathrm{e}-1\right].$

例 1-2　已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$，求 a，b.

解：$\because \lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，$\therefore \lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0\Rightarrow 1+a+b=0$，

以 $b=-a-1$ 代入原式，得

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1+a)$$
$$=a+2=3\Rightarrow a=1,\ b=-2.$$

例 1-3 求$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$.

解：$\because \lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right]=1+1=2$,

$\lim\limits_{x\to0^-}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]=\lim\limits_{x\to0^-}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right]=2-1=1$,

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$不存在.

例 1-4 求$\lim\limits_{x\to0}(1+\tan^2x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}(1+\tan^2x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\tan^2x)^{\frac{1}{\tan^2x}}\right]^{\frac{\tan^2x}{1-\cos x}}$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{\tan^2x}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}}=e^2.$$

例 1-5 已知$f(x)=\begin{cases}\ln(\cos x)x^{-2} & x\neq0\\ a & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续，求$a$.

解：$f(0)=a$,

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

$\because f(x)$在$x=0$处连续，$\therefore f(0)=-\dfrac{1}{2}$即$a=-\dfrac{1}{2}$.

例 1-6 已知$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}} & x>0\\ \ln(1+x) & -1<x\leqslant0\end{cases}$，求$f(x)$的间断点，并说明间断点所属类型.

解：显然$x=1$为一个间断点(因函数在$x=1$处无定义).

$\because \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$,

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$,

$\therefore x=1$为第二类无穷间断点.

又$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\ln(1+x)=0$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x-1}}=\dfrac{1}{e}$,

故$x=0$也是$f(x)$的间断点，且为第一类跳跃型间断点.

例 1-7 当 $x\to 0$ 时，比较无穷小量 $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 与 x 的阶.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}=1$$

由此得知，当 $x\to 0$ 时，$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 与 x 是等价无穷小.

例 1-8 证明方程 $\sin x-x\cos x=0$ 在 $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 有根.

证：令 $f(x)=\sin x-x\cos x$，显然初等函数 $f(x)$ 在 $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上连续，且

$$f(\pi)=\sin\pi-\pi\cos\pi=\pi>0,$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2}=-1<0,$$

$$\Rightarrow f(\pi)\cdot f\left(\frac{3\pi}{2}\right)<0.$$

由闭区间上连续函数的介值定理得知：存在 $\xi\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，使得 $f(\xi)=0$，即 $\sin\xi-\xi\cos\xi=0$，也即 $\sin x-x\cos x=0$ 在 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 有根.

例 1-9 若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续 $(a>0)$，且 $f(0)=f(a)$，则方程 $f(x)=f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ 在 $(0,a)$ 内至少有一个实根.

证：令 $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{a}{2}\right)$，$g(x)$ 在 $(0,a)$ 上连续

$g(0)=f(0)-f\left(\frac{a}{2}\right)$

$g\left(\frac{a}{2}\right)=f\left(\frac{a}{2}\right)-f(a)=f\left(\frac{a}{2}\right)-f(0)=-\left[f(0)-f\left(\frac{a}{2}\right)\right]\Rightarrow g(0)\cdot g\left(\frac{a}{2}\right)<0$

若 $f(0)=f\left(\frac{a}{2}\right)$，则 $x=\frac{a}{2}$ 满足要求；

若 $f(0)\neq f\left(\frac{a}{2}\right)$，则因 $g(0)\cdot g\left(\frac{a}{2}\right)<0$，由零点定理得知：存在 $x_0\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$，$x_0$ 是 $(0,a)$ 内 $f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ 的根.

[思考与练习解答]

一、函数

1. 下列各题中，函数$f(x)$与$g(x)$是否为相同的函数；

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$与$g(x)=x$；

解：$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，因为对应规律不同，所以$f(x)\neq g(x)$；

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^3}$与$g(x)=x$；

解：两个函数的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，而且对应规律也相同，所以$f(x)=g(x)$；

(3) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$与$g(x)=\dfrac{1}{x+1}$；

解：$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$的定义域为$x\neq\pm1$，而$g(x)=\dfrac{1}{x+1}$的定义域为$x\neq-1$，所以$f(x)\neq g(x)$；

(4) $f(x)=10^{\lg x}$与$g(x)=x$；

解：$f(x)=10^{\lg x}$的定义域为$x>0$，而$g(x)=x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，所以$f(x)\neq g(x)$；

(5) $f(x)=\cos^2x+\sin^2x$与$g(x)=1$；

解：$f(x)=\cos^2x+\sin^2x=1$，两个函数的定义域和对应规律均相同，所以$f(x)=g(x)$；

(6) $f(x)=\arcsin x$与$g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$；

解：函数$f(x)$与$g(x)$定义域相同，都是$x\in[-1,1]$，而且对应规律也相同，所以$f(x)=g(x)$；

(7) $y=\tan(x+1)$与$u=\tan(v+1)$.

解：两个函数的定义域和对应规律均相同，只不过是用了不同的记号表示各自的自变量和因变量，所以$y=u$.

2. 设$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，考察下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)g(x)$；

解：$\because f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$，$\therefore f(x)g(x)$是奇函数.

(2) $f[g(x)]$；

解：$\because f[g(-x)]=f[g(x)]$，$\therefore f[g(x)]$是偶函数.

(3) $f[f(x)]$.

解：$\because f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$，$\therefore f[f(x)]$是奇函数.

3. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x)=x^3+|\sin x|$；

解：$f(-x)=(-x)^3+|\sin(-x)|=-x^3+|-\sin x|=-x^3+|\sin x|$，非奇非偶函数.

(2) $f(x)=(2^x+2^{-x})\cos x$；

解：$f(-x)=(2^{-x}+2^{x})\cos(-x)=(2^{x}+2^{-x})\cos x=f(x)$，偶函数.

(3) $f(x)=\arctan(\sin x)$；

解：$f(-x)=\arctan(\sin(-x))=\arctan(-\sin x)=-\arctan(\sin x)=-f(x)$，奇函数.

4. 指出下列各函数中哪些是周期函数，并指出其周期.

(1) $y=\arctan(\tan x)$；

解：$\because f(x+\pi)=\arctan(\tan(x+\pi))=\arctan(\tan x)=f(x)$，

$\therefore y=\arctan(\tan x)$是周期函数，$T=\pi$.

(2) $y=\sin\pi x+\cos\pi x$；

解：$\because f(x)=\sin\pi x+\cos\pi x=\sqrt{2}\left(\sin\pi x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\pi x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$，

而

$$f(x+2)=\sqrt{2}\sin\left[\pi(x+2)+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left[\pi x+2\pi+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x),$$

$\therefore y=\sin\pi x+\cos\pi x$ 是周期函数，$T=2$.

(3) $y=x\sin\frac{1}{x}$；

解：令 $x\sin\frac{1}{x}=0$；解此方程得出曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$与 x 轴交点的横坐标是 $x=\frac{1}{k\pi}$ $(k\in Z)$. 由于 k 越小而 x 越大，亦即在正半轴上随着 x 远离坐标原点，k 越来越小.

又因为曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$与 x 轴的相邻两交点的间隔

$$d=\frac{1}{(k-1)\pi}-\frac{1}{k\pi}=\frac{1}{k(k-1)\pi},$$

当 $k\to 0$ 时，$d\to\infty$，即 d 随着自变量远离坐标原点的程度越来越大，故有 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 不是周期函数.

(4) $y=1+\cos 2x$.

解：$\because f(x+\pi)=1+\cos2(x+\pi)=1+\cos(2x+2\pi)=1+\cos 2x=f(x)$，

$\therefore y=1+\cos 2x$ 是周期函数，$T=\pi$.

二、极限

1. 在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 中，x 能否取 x_0？$f(x)$能否取值 A？

解：在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 中，$x\to x_0$ 是指 x 与 x_0 无限接近，并不要求 x 必须取值 x_0；x 可以取 x_0，亦可以不取 x_0.

在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 中，当 x 无限趋近于 x_0 时，函数$f(x)$的函数值无限地趋近一个常数 A，对$f(x)$是否取值 A 没有明确要求；$f(x)$可以取值 A，亦可以不取值 A.

2. 无穷小量是否是0？0 是否是无穷小量？

解：如果 $\lim f(x)=0$，称函数$f(x)$为某一变化过程中的无穷小量. 按照定义，无穷小量是以 0 为极限的变量，因此它不是0.

而 $\lim 0=0(x\to\infty$ 或 $x\to x_0)$，即常数 0 的极限仍是 0，它是唯一的可作为无穷小量的一个常数.

3. 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 是 x 的几阶无穷小？

解：$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos$ 是 x 的二阶无穷小.

4. 下面的计算过程对否：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}x}{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}=\infty$.

解：错. 分母的极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，故不能用于商的极限运算法则. 应为

$\because \lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}x}=\dfrac{0}{1}=0$，由无穷小到无穷大的关系，

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$.

5. 无穷小可通过它们比值的极限来比较其趋于零的快慢程度，无穷大是否也可类似地比较它们趋于无穷的快慢程度呢？

解：可以.

6. 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=x^3\cos x$ 是无穷小量吗？它有界吗？

解：我们以 $x\to+\infty$ 来分析.

在 x 中选项取两个子数列：$x_k=2k\pi$，$\tilde{x}_k=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$(k=0,1,2,\cdots)$

讨论了函数 $f(x)=x^3\cos x$ 在这两个子数列上的取值情况，有

$$f(x_k)=(2k\pi)^3\cdot 1=(2k\pi)^3\to+\infty\ (k\to+\infty),$$

$$f(\tilde{x}_k)=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^3\cdot 0=0\to 0(k\to+\infty),$$

由此我们看到当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 在子数列 $\{x_k\}$ 上的取值越来越大，在子数列 $\{\tilde{x}_k\}$ 上的取值始终为 0. 因此，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=x^3\cos x$ 既不是无穷小量，也不是无穷大量，并且是无界的.

所以当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=x^3\cos x$ 既不是无穷小量，也不是无穷大量，且是无界的.

7. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=1$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x_{n-1}+x_n+x_{n+1}}{3}=$ ___1___.

8. 试证：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_n}, & m=n\\ 0, & m>n\\ \infty, & m<n\end{cases}$.

证：当 $m=n$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{b_0}{x^m}}=\dfrac{a_n}{b_m}$;

当 $m>n$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{a_n}{x^{m-n}}+\dfrac{a_{n-1}}{x^{m-n+1}}+\cdots+\dfrac{a_0}{x_m}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\dfrac{b_0}{x^m}}=\dfrac{0}{b_m}=0$；

当 $m<n$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{b_m}{x^{n-m}}+\dfrac{b_{m-1}}{x^{n-m+1}}+\cdots+\dfrac{b_0}{x^n}}{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_0}{x^n}}=\dfrac{0}{a_n}=0$；

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\infty$.

三、函数的连续性

1. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，能断言 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在吗？

解：不能.

例如：$f(x)=\begin{cases}x^2, x\neq 0\\ 2, x=0\end{cases}$，显然 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

2. 分段函数是否一定有间断点？

解：不一定.

例如：$f(x)=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$ 是一个分段函数，但 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内均连续.

3. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，$g(x)$ 在点 x_0 间断，能否断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 必间断？若 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 都间断，能否断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 间断？

解：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，$g(x)$ 在点 x_0 间断，可以断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 必间断. 因为若 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处连续，则

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[(f(x)+g(x))-f(x)]=(f(x_0)+g(x_0))-f(x_0)=g(x_0)$ 成立，说明 $g(x)$ 在点 x_0 连续，与题设 $g(x)$ 在点 x_0 间断矛盾，故 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 必间断.

若 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 都间断，则不能断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 间断.

例如函数 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$、$g(x)=1-\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无意义，即在该点间断，但 $f(x)+g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=2$ 在 $x=0$ 点连续.

4. 开区间连续的函数是否必有最大值、最小值？又是否必定没有最大值、最小值？

解：开区间连续的函数未必有最大值、最小值；例如函数 $y=x$ 在开区间 $(-1,1)$ 内连续，但它在该区间内没有最大值、最小值.

开区间连续的函数未必没有最大值、最小值；例如函数 $y=\sin x$ 在开区间 $(0,2\pi)$ 内连续，它在该区间内有最大值 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$；也有最小值 $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1$.

5. 若$f(x)$在$[a,b]$上有定义，在(a,b)内连续，且$f(a)f(b)<0$，能否保证方程$f(x)=0$在(a,b)内必有实根？

解：不能.

例如函数$f(x)=\begin{cases} x, x=1 \\ 3, 1<x<2 \\ -1, x=2 \end{cases}$，显然$f(x)$在$[1,2]$上有定义，在$(1,2)$内连续，且$f(1)f(2)=-1<0$，但方程$f(x)=0$在$(1,2)$内没有实根.

6. 证明方程$x=\sin x+2$至少有一个不超过3的实根.

证：设$\phi(x)=x-\sin x-2$，显然$\phi(x)$是一个初等函数，在$(-\infty,+\infty)$内连续，在$[-3,+3]$上当然连续.

又因为$\phi(3)=3-\sin3-2=1-\sin3>0$，$\phi(-3)=-3-\sin(-3)-2=-5+\sin3<0$；

由闭区间上连续函数的介值定理，在$(-3,3)$内至少存在一点δ，使得$\phi(\delta)=0$，即有$\delta-\sin\delta-2=0$，也即方程$x=\sin x+2$至少有一个不超过3的实根δ.

[习题一详解]

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{(x+2)(x-1)}$；

解：$(x+2)(x-1)\geqslant0\Rightarrow x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-2\Rightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$.

(2) $y=\arccos(x-3)$；

解：$-1\leqslant x-3\leqslant1\Rightarrow2\leqslant x\leqslant4\Rightarrow x\in[2,4]$.

(3) $y=\lg\dfrac{x-1}{x+2}$；

解：$\dfrac{x-1}{x+2}>0\Rightarrow(x-1)(x+2)>0\Rightarrow\begin{cases}x>1\\x<-2\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

(4) $y=\dfrac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$；

解：$\begin{cases}\ln(2+x)\geqslant0\\2+x>0\\x(x-4)\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+x\geqslant1\\x>-2\\x\neq0 \text{ 且 } x\neq4\end{cases}\Rightarrow x\geqslant-1 \text{ 且 } x\neq0,x\neq4$

$\Rightarrow x\in[-1,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$.

(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$；

解：$\begin{cases}2-x^2>0\\-1\leqslant\dfrac{1}{2}x-1\leqslant1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\\0\leqslant x\leqslant4\end{cases}\Rightarrow0\leqslant x<\sqrt{2}\Rightarrow x\in[0,\sqrt{2})$.

(6) $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

解：$\sin x\neq0\Rightarrow x\neq k\pi\Rightarrow x\in\{x:x\neq k\pi(k\in Z)\}$.

2. 设$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ -x, & x>0\end{cases}$，求$f(0)$、$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$、$f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)$.

解：$f(0)=\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，$f\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)=1+\left(\lg\dfrac{1}{2}\right)^2=1+(\lg1-\lg2)^2=1+(\lg2)^2$.

3. 设函数$y=f(x)$的定义域为$[0,1]$，求下列函数的定义域

(1) $f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$；

解：$\begin{cases}0\leqslant x+\dfrac{1}{3}\leqslant1\\ 0\leqslant x-\dfrac{1}{3}\leqslant1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}\Rightarrow x\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$.

(2) $f(\sin x)$；

解：$0\leqslant\sin x\leqslant1\Rightarrow2k\pi\leqslant x\leqslant\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\Rightarrow x\in\left[2k\pi,\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right](k\in Z)$.

(3) $f(\ln x+1)$；

解：$\because 0\leqslant\ln x+1\leqslant1$，$\ln e^{-1}=-1\leqslant\ln x\leqslant0=\ln1$；$\therefore\dfrac{1}{e}\leqslant x\leqslant1$ 即 $x\in\left[\dfrac{1}{e},1\right]$.

(4) $f(x^2)$.

解：$\because 0\leqslant x^2\leqslant1$，$(x+1)(x-1)\leqslant0$；$\therefore -1\leqslant x\leqslant1$ 即 $x\in[-1,1]$.

4. 写出y关于x的复合函数：

(1) $y=\lg u$，$u=\tan(x+1)$；

解：$y=\lg\tan(x+1)$，$x\in\left(k\pi-1,k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1\right)$.

(2) $y=u^3$，$u=\sqrt{x^2+1}$；

解：$y=(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $y=u+\sin u$，$u=1-v$，$v=x^3$；

解：$y=1-x^3+\sin(1-x^3)$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) $y=e^u$，$u=v^2$，$v=\sin\omega$，$\omega=\dfrac{1}{x}$.

解：$y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

5. 指出下列函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成

(1) $y=e^{\arctan(2x+1)}$；

解：$y=e^u$，$u=\arctan v$，$v=2x+1$.

(2) $y=\sqrt{\sin^3(x+2)}$；

解：$y=u^{\frac{3}{2}}$，$u=\sin v$，$v=x+2$.

(3) $y=\tan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；