日本

高攷数学试题解答

1

·代数部分·

武汉师范学院数学系

一九八〇年三月

日　本
高考数学试题解答
（代数部分）

邓莘林　罗光烈　张恩瀛
陈娫战　张启后　余祖燚
王林生　编译

武汉师范学院数学系
一九八〇年三月

前　言

为了帮助广大中学数学教育工作者和数学爱好者了解国外中学数学教学要求和近年来的高考情况，我们从日本1978、1979年度全国各大学（日本国立、公立、私立及准大学）高考数学试题及解答中编译了《代数部分》（第一辑），本书内容丰富，类型繁多，题目新颖，解法灵活。它既有加强基础知识的内容，也有综合运用的题材。对于中学数学教师的教学工作和开拓中学生眼界及启发他们的思维活动，很有裨益。

本书是根据日文版的日本全国各大学高考数学试题及解答编译的，为了便于读者阅读，我们对书中的题目作了必要的分类，并对某些题目解答的叙述作了必要的修改，使解答较为易懂。

在编译过程中，得到我院图书馆工作同志及时提供资料，在此表示衷心的感谢。

本书从编译到付印，时间十分仓促，又由于我们业务水平不高，译文一定有不少缺点和错误，请读者批评指正。

编 译 者

目　　录

一，数 与 式

1、已知$x+y=1$，$x^2+y^2=2$，试求x^7+y^7的值。

〔出题范围〕整式的计算。

〔提示〕由条件求出xy，（79年，日本大学）

解：由$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2$，$x+y=1$，

则$xy=-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore x^7+y^7&=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)\\&=[(x+y)^3-3xy(x+y)]\\&\quad[(x^2+y^2)^2-2(xy)^2]-(xy)^3(x+y)\\&=[1^3-3(-\frac{1}{2})\cdot 1][2^2-2(-\frac{1}{2})^2]-\\&\quad-(-\frac{1}{2})^3\cdot 1=\frac{71}{8}\end{aligned}$$

〔答〕

2、化简 $\frac{2+3i}{1+2i}+\frac{2i}{3-i}$，（福井大学）

解：原式$=\frac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$=\frac{8-i}{5}+\frac{-1+3i}{5}=\frac{7+2i}{5}$ …答

3、整式f(x)被x－2除时余1，被x除时余－1，求f(x)被x(x－2)除时的剩余。（79年防卫医科大学）

解：设f(x)被x(x－2)除时得商Q(x)，余为ax+b（a、b为常数）则$f(x)=x(x-2)Q(x)+ax+b$ …①

由剩余定理得$f(2)=1$，$f(0)=-1$将它们代入①

$f(2)=2a+b=1$ …② $f(0)=b=-1$ …③

从②、③可得 $a=1$，$b=-1$ …答

4、设$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.求x^2+2x-1的值(79年防卫医科大学)

解：将所给式子的分母有理化得$x=\sqrt{2}-1$，

故$x^2-2x-1=(\sqrt{2}-1)^2+2(\sqrt{2}-1)-1$

$$=3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2-1=0$$ …答

5、由$y=-px-\sqrt{1+p^2}$，$x-\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}=0$，消去p，用$y=f(x)$的形式表示之。 (78年早稻田大学)

解：$x=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ 代入y的表示式得

$$y=\frac{-1}{\sqrt{1+p^2}} \qquad \therefore \quad x^2+y^2=1$$

因 $y<0$，故有$y=-\sqrt{1-x^2}$ …答

〔关键〕注意$y<0$

6、已知$a^2+b^2=c^2$中的a、b、c都是正整数，且它们的最大公约数为1，求证：a、b两数中如果有一个是偶数则另一个必是奇数。 (78年中央大学)

证：假设a、b都是偶数，则a^2、b^2都是偶数，从而$c^2=a^2+b^2$也是偶数，整数c也必是偶数，这样一来a、b、c都是偶数与它们的最大公约数是1的条件相矛盾。

其次设a、b都是奇数，设$a=2m+1$，$b=2n+1$（m、n为整数$\geqslant 0$）这时

$$c^2=a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2$$

$$=4(m^2+m+n^2+n)+2$$ …(※)

c^2为偶数，则c必为偶数，设$c=2l$（l为整数）$c^2=4l^2$

则c^2为4的倍数与（※）矛盾。

故$a^2+b^2=c^2$在所给条件下a,b二数中有一个为偶数，则另一个必为奇数。

7、当x,y，z为整数时，如果$x+y+z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}$也是整数,试证$xy+yz+zx$是整数。(78年和歌山县立医大)

证：设$x+y+z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}=k$，则k为整数

将 $(x+y+z)-k=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

两边平方，整理得$k^2=2\left[k(x+y+z)+(xy+yz+zx)\right]$

即k^2为偶数,所以k为偶数，设$k=2m$（m为整数）

$$4m^2=4m(x+y+z)+2(xy+yz+zx)$$

即 $xy+yz+zx=2\left[m^2-m(x+y+z)\right]$

故 $xy+yz+zx$是整数 证毕

8、已知$x-\alpha$整除x^3+px^2+qx+r及$3x^2+2px+q$，求证：x^3+px^2+qx+r能被$(x-\alpha)^2$整除。(78年大分大学)

证 依题意得

$$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0，3\alpha^2+2p\alpha+q=0$$

∴ $q=-3\alpha^2-2p\alpha$，$r=2\alpha^3+p\alpha^2$

故 x^3+px^2+qx+r

$=x^3+px^2-(3\alpha^2+2p\alpha)x+2\alpha^3+p\alpha^2$

$=(x-\alpha)^2(x+p+2\alpha)$

即 x^3+px^2+qx+r能被$(x-\alpha)^2$整除

9、n为0或正整数，同时满足三个不等式：

$y\geqslant x$，$y\leqslant 3x$，$y\leqslant n$的整数x，y的组（x，y）有多少个？ (78年爱媛大学)

解 设满足$y\geqslant x$，$y\leqslant 3x$，$y\leqslant 3k$的数组(x，y）的个数

为p_k，研究一下p 和p_{k+1}的关系，

直线$y=3k+1$上满足条件的点有（2k+1）个；同理，直线$y=3k+2$，$y=3k+3$上分别有（2k+2）个，（2k+3）个

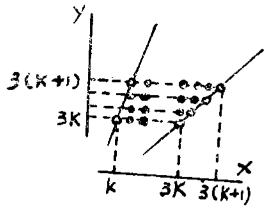

图1

$$p_{k+1}-p_k=(2k+1)+(2k+2)+(2k+3)$$
$$=6(k+1)\qquad(k\geqslant 0)$$

又　$p_0=1$　于是

$$p_k=p_0+\sum_{k=0}^{k-1}(p_{k+1}-p_k)=1+\sum_{k=0}^{k-1}6(k+1)$$

$$=1+3k(k+1)=3k^2+3k+1$$

故$n=3k$时，所求的个数为　$3k^2+3k+1$

$n=3k+1$时的个数为$(3k^2+3k+1)+(2k+1)=3k^2+5k+2$

$n=3k+2$时的个数为$(3k^2+5k+2)+(2k+2)=3k^2+7k+4$

$$\text{答}\begin{cases}n=3k\text{时} & 3k^2+3k+1\\ n=3k+1\text{时} & 3k^2+5k+2\\ n=3k+2\text{时} & 3k^2+7k+4\end{cases}$$

10、设n为正整数且$x=\frac{1}{2}\left(5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}}\right)$

求$(x+\sqrt{1+x^2})^n$的值。　　　　（静冈大学）

〔提示〕代入x的值之后可以去掉根号

解：∵ $1+x^2=1+\frac{1}{4}(5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}})^2$

$$=1+\frac{1}{4}(5^{\frac{2}{n}}-2+5^{-\frac{2}{n}})$$

$$=\frac{1}{4}(5^{\frac{2}{n}}+2+5^{-\frac{2}{n}})$$

$$=\frac{1}{4}(5^{\frac{1}{n}}+5^{-\frac{1}{n}})^2$$

∴ $x+\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}})+$

$$+\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}}+5^{-\frac{1}{n}})=5^{\frac{1}{n}}$$

故 $(x+\sqrt{1+x^2})^n=5$ …答

11、设a，b为正整数且 $\lg(a-3)$ 和 $\lg(4-b)$ 的算术平均数为 $\lg\sqrt{5}$，求a、b的值。 （山形大学）

解：按真数的条件有 $a-3>0$，$4-b>0$

又 由题意有 $\lg(a-3)+\lg(4-b)=2\lg\sqrt{5}$

∴ $(a-3)(4-b)=5$

因 $a-3$，$4-b$为正整数

∴ $a-3=1$，$4-b=5$ …①

或 $a-3=5$，$4-b=1$ …②

由①得 $a=4$，$b=-1$

这与b为正整数相矛盾。

由②得 $a=8$，$b=3$ …答

12、已知四次函数 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+x$，满足 $f(3)=3$ 并且，对于一切的实数x，都有 $f(x)\geqslant x$。求a，b的值。 （78年新泻大学）

〔出题范围〕整式的整除问题

〔提示〕设$g(x)=f(x)-x$，则$g(3)=0$，$g(x)\geqslant 0$

解：因$f(x)-x=x^2(x^2+ax+b)$，所以$f(3)-3=0$

且对于一切实数x，$f(x)-x\geqslant 0$成立的条件为

$x^2+ax+b=(x-3)^2$ 亦即$x^2+ax+b=x^2-6x+9$

故 $a=-6$，$b=9$，

13、设a、b，c为比1大的整数，下列二次方程

$ax^2-bx+c=0$，$cx^2-bx+a=0$

分别有正整数解m，n，且a，c互素，

$a-b+c\neq 0$，求m，n。 （78年冈山大学）

〔出题范围〕整数与方程。

〔提示〕把m，n代入两个方程消去b。

解：$am^2-bm+c=0$ …①

$cn^2-bn+a=0$ …②

由①×n－②×m，得 $(mn-1)(am-cn)=0$

若$m\cdot n=1$，则$m=n=1$（∵ m，n为正整数）

这时由①得$a-b+c=0$这与题设

$a-b+c\neq 0$相矛盾，∴$m\cdot n\neq 1$

若$am=cn$，因a，c为互素，故有正整数p，q存在使得

$m=cp$，$n=a\cdot q$，把$m=cp$，$n=aq$代入$am=cn$

得到 $acp=acq$，即$p=q$。

但如果把$m=cp$代入①则得 $ac^2p^2-bcp+c=0$

$acp^2-bp+1=0$，$p(b-acp)=1$

因p为正整数，$b-acp$为整数，所以$p=1$，

∴$m=c$，$n=a$

14、已知$a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$

求$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$的值。　　　(室兰工业大学)

解∵$a-c=a-b+(b-c)=4$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

$=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2+4^2]=15$　…答

15、求$\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$　　　(室兰工业大学)

解：原式$=\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2+3\sum\limits_{k=1}^{n}k+2\sum\limits_{k=1}^{n}1$

$=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+\frac{3n}{2}(n+1)+2n$

$=\frac{n}{6}(2n^2+12n+22)$

$=\frac{n}{3}(n^2+6n+11)$　…答

16、设方程$x^3=1$的虚根之一为ω，求下列各式的值：
(1) $\omega^4+\omega^2+1$；(2) $\omega^{2n}+\omega^n+1$ (n为正整数)

(丰桥技术科学大学)

解 (1) 因$x^3=1$ ∴ $(x-1)(x^2+x+1)=0$

故虚根是方程$x^2+x+1=0$的根，故有$\omega^3=1$　…①

及$\omega^2+\omega+1=0$　…②

应用②得$\omega^4+\omega^2+1=(\omega^2+\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$　…答

(2) (i)当$n=3m$时 (m为自然数)

则 $\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6m}+\omega^{3m}+1=1+1+1=3$

(ii) 当$n=3m-1$时，(m为自然数)

则$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6m-2}+\omega^{3m-1}+1$

$=(\omega^3)^{2m-1}\omega+(\omega^3)^{m-1}\omega^2+1$

$=\omega+\omega^2+1=0$

（iii）当$n=3m-2$（m为自然数）

则$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6m-4}+\omega^{3m-2}+1$

$=(\omega^3)^{2m-2}\omega^2+(\omega^3)^{m-1}\omega+1$

$=\omega^2+\omega+1=0$

答$\begin{cases}n为3的倍数时\omega^{2n}+\omega^n+1=3\\ n不为3的倍数时\omega^{2n}+\omega^n+1=0\end{cases}$

17、对于常数a、b，c，p，q，d，下面的等式

$$(x^3+ax^2+bx+c)^2=(x^2-1)(x^2+px+q)^2+d$$

就一切x成立时，试求d的值。

〔出题范围〕恒等式　　　　（78年东京工业大学）

〔提示〕将两边展开后，分别比较系数

解：将等式展开，整理得

$$x^6+2ax^5+(2b+a^2)x^4+(2c+2ab)x^3$$
$$+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2$$
$$=x^6+2px^5+(2q+p^2-1)x^4+(2pq-2p)x^3$$
$$+(q^2-2q-p^2)x^2-2pqx+q^2+d$$

由此，比较系数得

$2a=2p$　　…①

$2b+a^2=2q+p^2-1$　　…②

$2c+2ab=2pq-2p$　　…③

$2ac+b^2=q^2-2q-p^2$　　…④

$2bc=-2pq$　　…⑤

$c^2=-q^2+d$　　…⑥

由①，②得$a=p$，$b=q-\frac{1}{2}$ …⑦

将⑦代入③中得 $c=-\frac{1}{2}p$ …⑧

将⑦，⑧代入④中得 $q=-\frac{1}{4}$，$b=-\frac{3}{4}$

因此，由⑤，⑧得$c=p=0$

所以，由⑥得 $d=\frac{1}{16}$ ·〔答〕$d=\frac{1}{16}$

〔关键〕由于等式的次数高，比较系数后，先从式子高的次数开始，这是确定计算顺序的要领。

18、回答下面的问题

（1）试求$\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{3-4i}=x+yi$的实数$x$，$y$，其中$i$为虚数单位。

（2）下列三数$\frac{2}{3}\log_2 3$，$2^{-0.3}\times 3^{0.2}$，$2\sin 1234^{\circ}$中。哪个数比1大，哪个数比1小，（78年，九洲大学）

〔出题范围〕（1）复数的计算（2）指数、对数函数

〔提示〕（1）$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

（2）$\log_2\sqrt[3]{9}>\log_2\sqrt[3]{8}$，$(\frac{9}{8})^{\frac{1}{10}}>1$

解：（1）$\because \frac{1}{1+2i}+\frac{1}{3-4i}=\frac{1-2i}{5}+\frac{3+4i}{25}=\frac{8}{25}-\frac{6}{25}i$

$\therefore x=\frac{8}{25}$，$y=-\frac{6}{25}$ …〔答〕

（2）$\because \frac{2}{3}\log_2 3=\log_2\sqrt[3]{9}>\log_2\sqrt[3]{8}=\log_2 2=1$

$$2^{-0.3}\times 3^{0.2}=(2^{-3}\times 3^2)^{\frac{1}{10}}=(\frac{9}{8})^{\frac{1}{10}}>1$$

$2\sin 1234^\circ = 2\sin 154^\circ = 2\sin 26^\circ < 2\sin 30^\circ = 1$

〔答〕 $\frac{2}{3}\log_2 3 > 1, 2^{-0.8} \times 3^{0.2} > 1$， $2\sin 1234^\circ < 1$

〔关键〕 $\frac{2}{3}\log_2 x = \log_2 x^{\frac{2}{3}} = \log_2 \sqrt[3]{x^2}$， $a^m b^m = (ab)^m$，

在 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ $\sin\theta$为增加函数

19、设$xyz \neq 0$且$a > 0$，$b > 0$及$b \neq 1$试从式子 $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = \sqrt{(ab)^z}$中消去a、b，导出x、y、z的关系式。

（东帮大学）

解：就各边取对数，得

$$\frac{1}{x}\lg a = \frac{1}{y}\lg b = \frac{z}{2}(\lg a + \lg b)$$

设其值为k，$\lg b = ky$，则$k = \frac{1}{x}\lg a$，$a \neq 1$、$k \neq 0$，$\lg a = kx$，

将它们代入 $\frac{z}{2}(\lg a + \lg b) = k$中

得 $\frac{z}{2}(kx + ky) = k$

由于$k \neq 0$ $\therefore$ $z(x+y) = 2$

20、求 $\sum_{k=1}^{n}(6k^2 - 1)$ （日本大学）

解原式 $= 6\sum_{k=1}^{n}k^2 - n = n(n+1)(2n+1) - n$

$= n^2(2n+3)$

〔关键〕 $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

21、设$x^2 + ax + b$与$x^2 + bx + a$的最高公因式为x的一次式，求它们的最低公倍式。（日本兽医畜产大学）

解　x^2+ax+b　…①　x^2+bx+a　…②

因①②的最高公因式为x的一次式，故①②不得相同。

∴　$a\neq b$这时它们的最高公因式为

为$x^2+ax+b-(x^2+bx+a)=(x-1)(a-b)$

即最高公因式为　$x-1$　($\because a-b\neq 0$)

这时①②可分别写成，$(x-1)(x-b)$，$(x-1)(x-a)$

故所求最低公倍式为 $(x-1)(x-b)(x-a)$　…答

22、若运算符号 * 定义为：$a*b=3a+b$，且满足关系 $(a*1)*a=a*(a*1)$，求a的值。　（熊本工业大学）

解　$\because a*1=3a+1$

$$\therefore (a*1)*a=3(a*1)+a$$
$$=3(3a+1)+a=10a+3$$
$$a*(a*1)=3a+(a*1)$$
$$=3a+(3a+1)=6a+1$$

从而有　$10a+3=6a+1$　故$a=-\frac{1}{2}$　…答

23、设a、b为整数，$a<b$，p为自然数：（1）把其值在a，b间的不是整数的以p为分母的分数的和s求出来；（2）证明（1）的和s为整数的充要条件是：

$(-1)^a=(-1)^b$或$(-1)^p=1$。　（79年鸟取大学）

解（1）a与b间以p分母的分数应作如下表示：

$$\frac{pa}{p}、\frac{pa+1}{p}，\frac{pa+2}{p}…，\frac{pb-1}{p}，\frac{pb}{p}\quad…(1)$$

其中为整数的如下：

$$a，a+1，a+2，…，b-1，b\quad…②$$

①②的项数分别设为n、m，则

$n=p(b-a)+1$，$m=b-a+1$

现在设①，②的和分别为S_n，S_m，则

$$S_n=\frac{n}{2p}(pa+pb)=\frac{n}{2}(a+b)\ ,\ S_m=\frac{m}{2}(a+b)$$

$$\therefore S=S_n-S_m=\tfrac{1}{2}(a+b)(n-m)$$

$$=\tfrac{1}{2}(b^2-a^2)(p-1)$$ …答

②从（1）可知S为整数的充要条件是$p-1$或$(b+a)\cdot(b-a)$能被2除整。为此，p为奇数或a，b都为偶数或奇数。因此就必有$(-1)^a=(-1)^b$或$(-1)^p=-1$

〔关键〕$(-1)^a=(-1)^b \leftrightarrows$ a，b都为奇数或偶数。

24、适合$x\cdot y=27000$的自然数对(x,y)有多少组？

（79年防卫大学校）

解：x，y为自然数　$x\cdot y=27000$　…①

x与y是27000的约数。当x的值确定后y就随之为一个确定的值，因之满足①的数组（x，y）的组数与27000的约数的个数是一致的。

从　$27000=2^3\times3^3\times5^3$

得　$(3+1)(3+1)(3+1)=64$　…答

25、a，b为非负实数，max（a，b）是a，b中较不小的那一个。将式子$|a-b|+a+b$用max(a,b)表示之。

（79年防卫大学）

解：当$a\geqslant b\geqslant0$时

$$|a-b|+a+b=(a-b)+a+b=2a$$
$$=2\max(a,b)$$

当$b\geqslant a\geqslant0$时

$$|a-b|+a+b=(b-a)+a+b=2b=2\max(a,b)$$

故与a同b之大小无关，总有

$$|a-b|+a+b=2\max(a,b)$$ …答

26、对于两个整数m，n有面积为$||m|-|n||+|m|+|n|$周长为8的长方形，这样的整数组（m，n）有多少组？　　　　（79年防卫大学）

解：从上题可知

$$||m|-|n||+|m|+|n|=2\max(|m|,|n|)$$

于所设$\max(|m|,|n|)=k$，设周长为8面积为$2k$的长方形的二边为x，y，则

$$x+y=4\quad xy=2k\ (0<x<4)$$

从此二式消去y得　$x^2-4x+2k=0$

因x为实数故有　$4-2k\geqslant 0$　$k\leqslant 2$。

K为正整数，故$k=1$或$k=2$，

$k=1$时，x不能为整数　$\therefore k=2$　此时$x=y=2$满足于此式的m和n值组有

$$\begin{cases}m=\pm 2\\ n=\pm 2\end{cases}\quad \begin{matrix}m=\pm 1\\ n=\pm 2\end{matrix}\quad \begin{cases}m=\pm 2\\ n=\pm 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}m=\pm 2\\ n=0\end{cases}\quad \begin{cases}m=0\\ n=\pm 2\end{cases}$$

故所求整数组（m，n）的组数为

$4\times 3+2\times 2=16$　　　　…答

27、设n位自然数是$111\cdots 1$是11的倍数，求n的取值情形。　　　　（山形大学）

解：n位自然数$S_n=111\cdots 1$可表示为

$S_n=10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1$

这是首项为1公比为10的等比数列的前n项的和，故

$$S_n=\frac{10^n-1}{10-1}=\frac{10^n-1}{9}$$