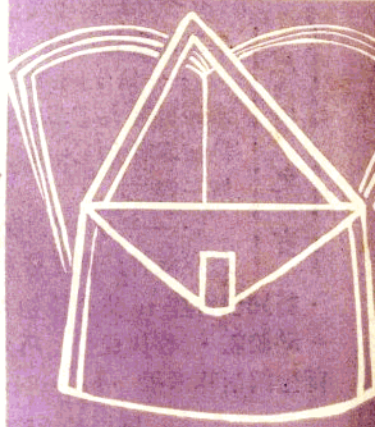
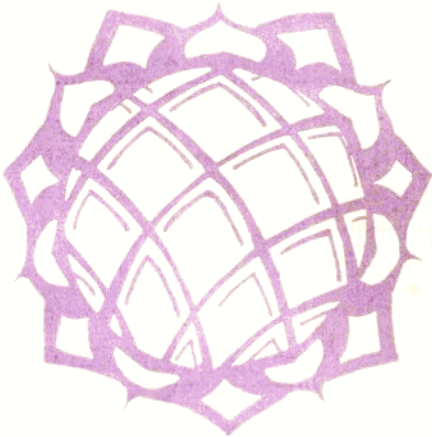
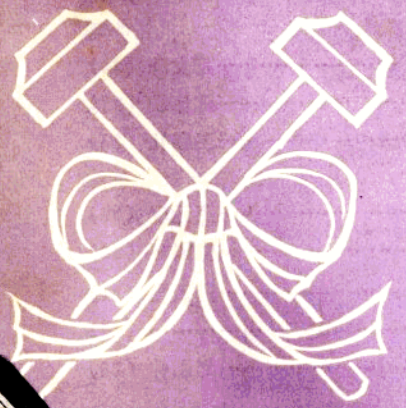
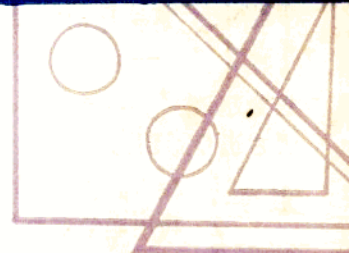
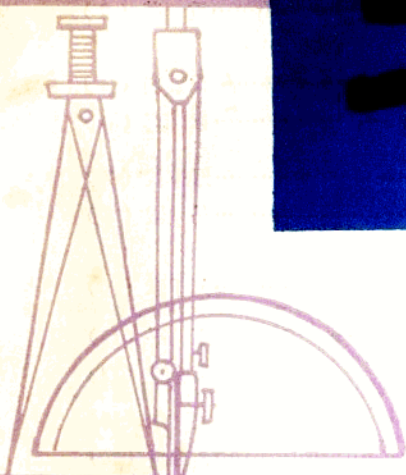
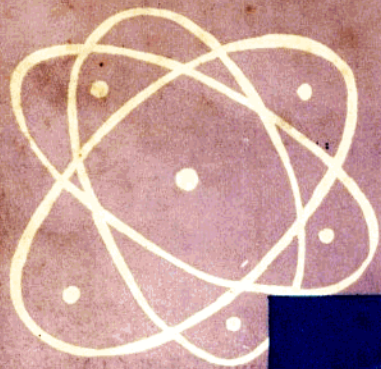


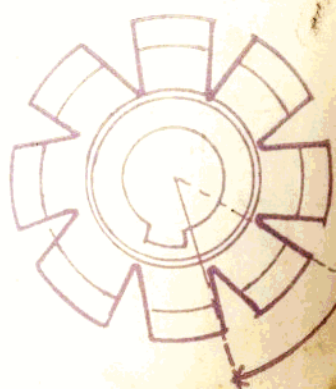
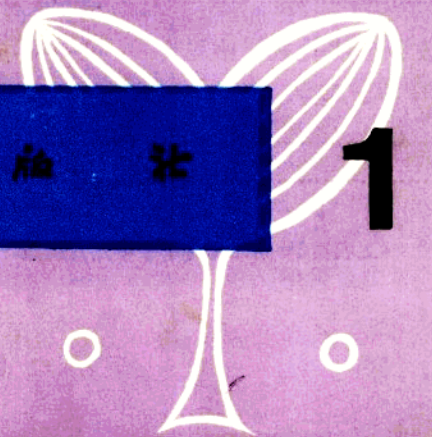
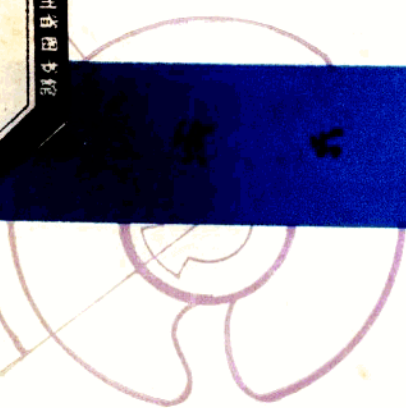
工农联盟



012
貴州省圖書館

工农联盟

1



树雄心，立壮志，向科学技术现代化进军

——和青年同志们谈学习数学

中国科学院数学研究所

陈景润

近几年来，我几乎每天都收到全国各地青年同志们的来信，询问我是怎样学习数学的。这些信反映了青年一代奋发向上的学习热情，反映了我们祖国的大好未来。读了这些信，我感到非常高兴。我是研究数学的，我想就自己二十多年来的研究实践，谈谈自己的体会，供青年同志们参考。

高速度发展工农业，是摆在我们面前的一项紧迫任务，没有科学技术，就不可能发展工农业。从小学起，我们就开始学习建设伟大社会主义祖国的本领。自然界中存在有大量的数和图形。例如，一个人、二个人、三个人…，其中的一、二、三就是数。又如，圆、三角形、正方形等就是图形。在小学里，算术是最重要的课程之一；在中学，数、理、化则是课程中最重要的一部分，如果数学学得不好，那么，物理、化学也不可能学好。在理工科大学中，数学更是一个基础。在工农业生产中，我们都希望能够多、快、好、省地完成生产任务。例如在现有条件下，如何合理地安排生产过程，使产量最高，质量最好，使消耗费用最小，又能在最短时间内完成任务，在这类问题中就存在有大量的数学理论和计算问题。所以数学在我们社会主义建设中能够并且应该起很大的作用。

古今中外的科学家、工程师中，有相当部分是出身于贫穷家庭的。他们吃不饱，穿不暖，哪里有钱去上学。但他们通过刻苦自学，为科学技术的发展作出了很大贡献。例如，我的老师华罗庚教授，是我国最著名的数学家。他小时候由于家中经济困难，上完小学就无法

上初中了，只好去当店员。他在数学方面的不少工作是在做店员时经过刻苦自学做出来的。所以说，有条件上大学当然是好的，没有条件上大学通过自学也能为四个现代化做出贡献。由于我国目前还很贫穷，大多数青年不能够上大学。但是在工作岗位上也一定能够自学好的，特别是数学。

学习首先要谦虚。有一些青年人很骄傲自满，或者说夜郎自大。他们对近代数学缺少起码的了解，就想解决世界有名的数学难题。每当我看到这些情况，心里感到十分痛惜，因为他们浪费了宝贵的时间。青年时代要踏踏实实进行认真的学习，不要想入非非，浪费精力。我们说要有信心，主要是说通过刻苦的努力，就一定能学好数学，攻克难关，为祖国实现四个现代化作出贡献。

有了决心和信心，还必须有恒心，这就是说要有坚强的意志和毅力，要长期努力，坚持不懈。青年同志们，祖国在期待着你们，人民在期待着你们，为了祖国四个现代化，我们一定要做出这样的努力！

有了决心、信心和恒心，我们还必须注意学习方法。

第一，知识面要宽些，基础要打扎实。前些年，在青年学习上出现了一些偏差。有的青年以为学好数理化就行了，至于语文学得不好无所谓。这种看法是错误的。有的理工科大学学生数理化还好，但写个实验报告却文理不通，错别字很多。这样，即使你很有创造性，别人还是看不懂。数理化固然重要，但语文却是各门学科最基本的工具，语文学得好，阅读写

作能力提高了,就有助于学好其它学科,有助于知识的积累和思路的敞开,这个意见我是很赞成的。我希望青年同志们千万不要忽视语文学习。

有的青年问我学数学有什么“秘诀”,我觉得学习上没有捷径好走,也无“秘诀”可言。要说有,那就是扎扎实实地打好基础,练好基本功。在学习中不可平均使用力气,而要把劲头特别用在一门新功课,一个新篇章的开头,用在最基本的东西上。要打好坚实的基础,循序渐进。自然科学,特别是数学,有很强的系统性和连贯性。只有把前面的基础打牢,才好进入后一步的学习。只有一步一个脚印,学得扎扎实实,才可能逐步提高,最后才有希望达到科学的顶峰。

第三,要注意独立思考。拿数学来说,它是一门着重于理解的学科,在学习中要防止不求甚解的倾向。一定要勤分析,多思考。对每部分内容和每个问题,要从正面、反面各个角度多想想。要善于找出它们之间的联系,总结

出规律性的东西。不要一遇到不会的东西就马上去问别人,自己不动脑子,专门依赖别人,而是要自己先认真地思考一下,这样就可能依靠自己的努力克服其中的某些困难。对经过很大努力仍不能解决的问题,再虚心请教别人,这样往往能受到更大的帮助和锻炼。

第三,学习态度要端正,要注意培养良好的习惯,刻苦钻研。要做到专心致志。不论复习、做题、阅读参考书籍,都要精力集中。要争分夺秒,提高效率,切忌分心。学习中还要养成严肃认真、踏踏实实的好学风,不要好高骛远,更不能夸夸其谈。自己要多动手,从一点一滴做起,日积月累,逐步有所提高。

以上是我的一点粗浅体会,供青年同志们参考。希望青年同志们能积极响应党中央的号召,发奋努力,学政治,学文化,树立爱科学、讲科学、用科学的风气。让我们每个人都在四化的征途中留下值得自豪的不间断的深深的脚印吧!

(上接第7页)

2. 必要非充分条件

如果命题“若 \bar{A} 则 \bar{B} ”成立,而命题“若 A 则 B ”(或“若 \bar{B} 则 \bar{A} ”)不成立,那么 A 就叫做 B 成立的必要非充分条件。

例7 命题“如果凸多边形各边不相等,那么它不是正多边形”,成立。

命题“如果凸多边形各边相等,那么它是正多边形”,不成立。

\therefore “各边相等”是“凸多边形成为正多边形”的必要非充分条件。

例8 命题“如果 $\sin\alpha \neq \sin\beta$,那么 $\alpha \neq \beta$ ”,成立。

命题“如果 $\sin\alpha = \sin\beta$,那么 $\alpha = \beta$ ”,不成立。

\therefore “ $\sin\alpha = \sin\beta$ ”是“ $\alpha = \beta$ ”的必要非充分的条件。

由例7、例8可以看出,必要非充分条件是不允许撤换的,但它也不能够保证结论一定成立。

3. 充分必要条件

如果命题“若 A 则 B ”和“若 \bar{A} 则 \bar{B} ”(或“若 B 则 A ”)同时成立,那么 A 就叫做使 B 成立的充分必要条件。

例9 命题“如果 $b^2 - 4ac = 0$,那么方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有二相等实根”,成立。

命题“如果 $b^2 - 4ac \neq 0$,那么方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 没有二相等实根”,成立。

\therefore “ $b^2 - 4ac = 0$ ”是方程“ $ax^2 + bx + c = 0$ 有二相等实根”的充分必要条件。

例10 命题“若三角形的两边相等,则其对角也相等”,成立。

命题“若三角形的两角相等,则其对边也相等”,成立。

\therefore “三角形的两边相等”是其“对角相等”的充分必要条件。

从例10可以看出,如果 A 是 B 的充分必要条件,那么 B 也是 A 的充分必要条件, A 与 B 互为充分必要条件。在数学中叙述充分必要条件常用“当且仅当”或“必须且只须”等等。

通过上面的讨论可以看出,当命题“若 A 则 B ”成立时,其逆否命题“若 \bar{B} 则 \bar{A} ”也成立。因此,若 A 为 B 的充分条件时, B 就是 A 的必要条件;同样,当命题“若 \bar{A} 则 \bar{B} ”成立时,其逆否命题“若 B 则 A ”也成立,因此,若 A 为 B 的必要条件时, B 就是 A 的充分条件。

错 在 哪 里 ？

——请看张虎的答卷——

重 基

张虎在学习上、工作上都很努力，就是有个粗心大意、马马虎虎的毛病。业校刚开学，学校举行了一次别开生面的基础知识和基本训练的摸底测验。张虎一看考题，心想：“这太容易了”，于是不加思索地在试卷的括号中填上了答案。我们这里先发表他的答卷中的前十个题(其余的题目以后还要陆续刊登)。请你帮他看一看，哪几个题答错了？错误原因是什么？怎样改正？

计算：

(1) $-5-4=(-1)$;

(2) $-3^2-(-3)^2=(0)$;

(3) $\sqrt{9}=(\pm 3)$;

(4) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=(\sqrt{5})$;

(5) $a \div b \times \frac{1}{b}=(a)$;

(6) $(b-a)^2=[-(a^2-2ab+b^2)]$;

(7) $\sqrt{a^2}=(a)$;

(8) $a^6 \div a^3=(a^3)$;

(9) $5x^2-2x^2=(3)$;

(10) $\frac{-x-y}{x-y}=(-1)$.

张虎的这十个题都答错了。下面逐题进行分析：

(1) 这是 -5 与 -4 的代数和，即 $(-5)+(-4)$ 。

根据有理数的加法法则，这两个数的和应当等于 -9 ；

(2) -3^2 中， 2 是 3 的指数，不是 -3 的指数，

因为这里没有括号，也就是说要分清 $-3^2=-3 \times 3=-9$ ，与 $(-3)^2-(-3) \times (-3)=9$ 是有区别的，

所以， $-3^2-(-3)^2=-18$ 。

(3) 我们规定符号“ $\sqrt{\quad}$ ”代表算术根。算术根是这样定义的：正数的正的方根叫算术根，零的算术根是零。因为 9 的平方根有两个： 3 和 -3 ，所以 $\sqrt{9}$ 只能等于 3 。

(4) 只有同类根式才能相加减。同类根式是指根指数相同，被开方数也相同的根式。因为 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 不是同类根式，所以它们不能够相

加。

(5) 按照运算顺序的规定，在一个式子中，应该先乘除，后加减。若式中只有乘除法或只有加减法时，则由前到后按顺序运算。这里 $a \div b \times \frac{1}{b}$ 应先算

$a \div b = \frac{a}{b}$ ，再算 $\frac{a}{b} \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b^2}$ 。

(6) 因为 $(b-a)^2=[-(a-b)]^2=(a-b)^2$ ，其中的负号是不能提出来的。所以 $(b-a)^2=a^2-2ab+b^2$ 。

(7) 首先应当明确， a 可以代表正数，也可以代表零和负数。根据算术根的意义， $\sqrt{a^2}$ 只能是正数或零。但当 $a \geq 0$ 时， $\sqrt{a^2}=a$ 是对的。当 $a < 0$ 时， $\sqrt{a^2}$ 就不能等于 a 了，它只能等于 a 的相反数 $-a$ ，这时 $-a$ 就是正数。例如 -8 的相反数 $-(-8)=8$ ，

$\therefore \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (\text{当 } a \geq 0 \text{ 时}), \\ -a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}). \end{cases}$

(8) 这个题应该利用 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 计算，即 $a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3$ 。

(9) 合并同类项的法则是：把同类项的系数相加，所得的结果作为系数，字母和字母的指数不变。因此， $5x^2-2x^2$ 不能把 x^2 也给减去了，所以， $5x^2-2x^2=3x^2$ 。

(10) $-x-y=(-1) \cdot x+(-1) \cdot y=-x-y$ 。

$\therefore \frac{-x-y}{x-y} = -\frac{x+y}{x-y}$ 。

(未完，待续)



自 我 测 验 题

——给投考高中、中专、中技的读者

乔 家 瑞

一、填空(共 20 分)

1. 如果 $a < 0$, 那么 $\sqrt{a^2} =$ ____; (2 分)
2. 已知 $ax^2 - bx + c = 0$ ($a \neq 0, b^2 - 4ac \geq 0$), 则 $x_1 =$ ____, $x_2 =$ ____; (2 分)
3. $\lg 0.01 =$ ____, $\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} =$ ____; (2 分)
4. 函数 $y = \sqrt{x^2 - 4}$ 的定义域是 ____; (2 分)
5. 二次函数 $y = 3x^2 + 5$ 的顶点坐标是 (x, y) , 则 $x =$ ____, $y =$ ____; (2 分)
6. $\cos 120^\circ =$ ____, $\sin 150^\circ =$ ____; (2 分)
7. 三角形的重心是三条 ____ 的交点, 外心是三条 ____ 的交点, 内心是三条 ____ 的交点; (3 分)
8. 圆内接四边形两个对角和等于 ____; (1 分)
9. 两个相似三角形的相似比是 2:3, 那么它们的周长比是 ____, 面积比是 ____; (2 分)
10. 圆内接正三角形的边长是 4, 则它的边心距 $r =$ ____.

二、已知 $f(x) = 4x^2 - 5x^4, g(x) = 2x^2 - 2x^4 - x^6$. (共 10 分)

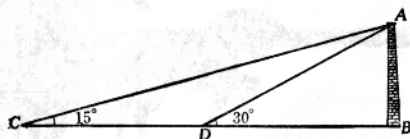
1. 求 $f(x) - g(x)$; (5 分)
 2. 将 $f(x) - g(x)$ 分解因式. (5 分)
- 三、写出并证明几何中的“切割线定理”. (8 分)

四、化简: $\frac{8x^2 + 24x}{x^2 + x - 6} \div \left(\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2}\right)$.

(8 分)

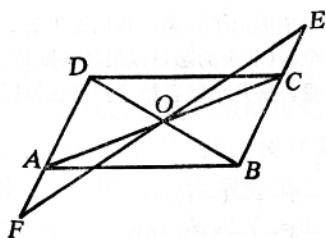
五、解方程: $\sqrt{2x^2 + 7x} = x + 2$. (8 分)

六、要测量烟囱 AB 的高, 在地面上找一点 C , 使 $\angle ACB = 15^\circ$, 然后再向烟囱方向前进到 D 点, 使 $\angle ADB = 30^\circ$, 且 C, D 之间的距离是 54 米, 求烟囱的高. (8 分)



(第六题)

七、已知: $ABCD$ 是平行四边形(如图), O 是对角线 AC 和 BD 的交点, 过 O 点的直线分别交 DA 和 BC 的延长线于 F 和 E . 求证: $OE = OF$. (8 分)



(第七题)

八、已知抛物线 $y = 2x^2 - 4x + k$ 过点 $(1, 2)$. (共 12 分)

1. 求 k ; (4 分)
2. 求顶点坐标; (4 分)
3. 画出抛物线. (4 分)

九、甲乙两人做同样的机器零件. 如果甲先做 1 天, 乙再开始做, 4 天后, 两人做的零件就同样多了. 如果甲先做 10 个, 乙再开始做, 3 天后, 乙多做 5 个, 求两人每天各做多少个? (10 分)

十、已知方程 $2x^2 - 3x + m = 0$ 的两根差是 $2\frac{1}{2}$, 求 m 值. (8 分)

(以上试卷限在 100 分钟内答完)

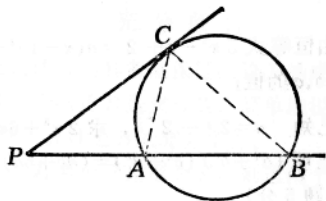
答案

1. $-a$; 2. $\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
3. $-2, \frac{5}{2}$; 4. $x \leq -2$ 或 $x \geq 2$; 5. 0, 5;
6. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; 7. 中线, 边垂直平分线, 内角平分线; 8. 180° ; 9. 2:3, 4:9; 10. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

二、1. $f(x) - g(x) = 4(x^2 - 5x^4)$
 $- (2x^2 - 2x^4 - x^6)$
 $= 4x^2 - 5x^4 - 2x^2 + 2x^4 + x^6$
 $= x^6 - 3x^4 + 2x^2;$

2. $x^6 - 3x^4 + 2x^2$
 $= x^2(x^4 - 3x^2 + 2)$
 $= x^2(x^2 - 1)(x^2 - 2)$
 $= x^2(x+1)(x-1)(x^2 - 2).$

三、切割线定理：从圆外一点到圆的一条割线和一条切线，割线上从这点到两个交点的线段的积，等于切线长的平方。



(第三题)

已知：PAB 是圆的割线，PC 是圆的切线。

求证：PA · PB = PC²。

证明：

连结 CA, CB。

∵ ∠PCA = ∠PBC, ∠P = ∠P,

则 △PCA ∽ △PBC,

于是 $\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB},$

∴ PA · PB = PC²。

四、原式 = $\frac{8x(x+3)}{(x-2)(x+3)} \div \frac{(x-2)^2 - (x+2)^2}{(x+2)(x-2)}$
 $= \frac{8x}{x-2} \div \frac{-8x}{(x+2)(x-2)}$
 $= \frac{8x}{x-2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{-8x}$
 $= -(x+2).$

五、 $\sqrt{2x^2 + 7x} = x + 2,$

两边平方，得 $2x^2 + 7x = x^2 + 4x + 4$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

∴ $x_1 = 1, x_2 = -4.$

经检验， $x_2 = -4$ 是增根。

故原方程的解为 $x = 1.$

六、∵ ∠ADB = ∠C + ∠CAD, 则
 $\angle CAD = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ.$

∴ AD = CD = 54.

在 Rt△ADB 中, AB = 27.

答：烟囱高 27 米。

七、证明：

∵ ABCD 是平行四边形, 则 AD ∥ BC.

∴ ∠E = ∠F (两直线平行, 内错角相等).

又 OA = OC, ∠AOE = ∠COF.

∴ △AOF ≅ △COE (角、角、边),

∴ OE = OF.

八、1. 令 $x = 1, y = 2,$

代入 $y = 2x^2 - 4x + k,$ 得

$2 = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + k,$

∴ $k = 4;$

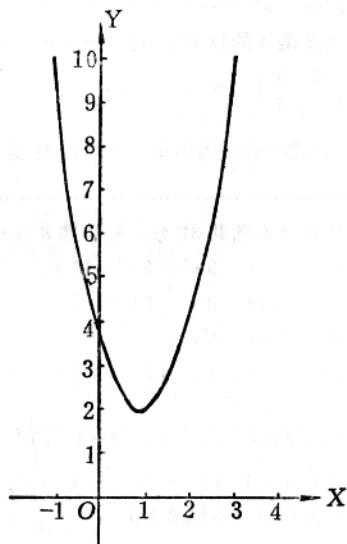
2. $y = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x^2 - 2x + 2)$

$= 2(x-1)^2 + 2,$

∴ 顶点坐标是 (1, 2).

3.

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	10	4	2	4	10	...



(第八题)

九、设甲每天做 x 个, 乙每天做 y 个, 则

(下转 23 页)

你能正确回答这两份试题吗？

章 真

今年一月底，北京市工农教育研究室在北京市的范围内进行了一次“中学数学基础”电视讲座的测验，目的是了解学员们对代数预备知识和前四章的掌握程度。为了便于未参加这次测验的学员也能自我检查一下学习效果，现将北京市测验时所使用的(A)、(B)两份试题发表出来，供同志们参考。

试 题 (A)

一、判断下列各结论是否正确，如果正确就在后面括号内画上“√”号，否则画“×”。(本题共20分，每小题2分)

(1) -0.5 的倒数是 2 ()

(2) $(-\sqrt{7})^2 = -7$ ()

(3) $|-2| - |-3| = -1$ ()

(4) $\frac{x}{x+1}$ 是假分式 ()

(5) $\sqrt{50}$ 是最简根式 ()

(6) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ ()

(7) $a^5 \cdot a^5 = a^{30}$ ()

(8) ± 2 是 4 的算术平方根 ()

(9) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ()

(10) 分式 $\frac{1}{x^2+2}$ 的字母 x 取值范围是一切实数 ()

二、计算(本题共32分，每小题8分)

(1) 已知 $f(x) = 9x^2 + 8x^3 - 16x$,

$g(x) = 3x^2 - 4 + 2x^3$,

求 $f(x) - g(x)$;

(2) $3(2x+1)(2x-1) - 4(3x-2)(3x+2)$;

(3) $\frac{1}{(x-3)(2-x)} + \frac{1}{(x-2)(3-x)}$;

(4) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.

三、解方程组(本题8分)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21, \\ 5x - 2y = 5. \end{cases}$$

四、有含盐8%的盐水40公斤，要配成含盐20%的盐水，需加盐多少公斤？(本题12分)

五、把下列各式分解因式(本题共12分，每小题6分)

(1) $x^3 + x^2y - x^2z - xyz$;

(2) $4x^2 - 9y^2$.

六、求值(本题共11分，1小题6分，2小题5分)

(1) 由恒等式 $3x^2 - x + 2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ ，求 a, b, c 的值；

(2) 已知 $x = 2^{\frac{1}{5}} - 2^{-\frac{1}{5}}$ ，求 $2x^5 + 6x$ 的值。

七、证明 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ 。(本题5分)

试 题 (B)

一、判断下列各结论是否正确，如果正确就在后面括号内画上“√”号，否则画“×”号。(本题共20分，每小题2分)

(1) $\sqrt{2}$ 是有理数 ()

(2) $\sqrt{a^2} = |a|$ ()

(3) $-|5| > |-4|$ ()

(4) $\frac{1}{x+1}$ 是真分式 ()

(5) $-3x^2y + 2xy^2 - 5$ 是字母 x, y 的三次齐次式 ()

(6) 根式 $\frac{x}{\sqrt{x-2}}$ 的变数字母 x 取值范围是大于或等于2的一切实数 ()

(7) $\sqrt{18}$ 是最简根式 ()

(8) $\left| \frac{2}{0} - \frac{1}{5} \right| = 10$ ()

(9) $(a^7)^8 = a^{15}$ ()

(10) 25的平方根是5 ()

四、计算(本题共32分，每小题8分)

(1) 已知 $f(x) = 9x^2 + 8x^3 - 16x$,

$g(x) = 3x^2 - 4 + 2x^3$.

求 $f(x) + g(x)$;

(2) $(x+4)^2 - 4(x-1)^2$;

(下转第9页)

充分条件和 必要条件

北京师范大学 原遵诚



充分条件

如果条件 A 的具备能保证结论 B 的成立, 那么就条件 A 对于结论 B 是充分的。简单地说, 命题“若 A 则 B ”成立, A 就是 B 的充分条件。

例 1 若两个三角形全等, 则这两个三角形面积相等。

这个命题的条件是“两个三角形全等”, 结论是“这两个三角形的面积相等”。命题中的条件足以保证结论的成立, 因而命题成立。

例 2 如果两个数相等, 则其绝对值也相等。

这个命题的条件足以保证结论成立。

从这两个例子可以看出, 所以用“充分”这个词, 是因为如果有 A 必然有 B , 说明只要有了 A , B 的成立就得到了“充分”的保证。如果把上面两个命题中的条件撤换之后, 命题的结论仍有成立的可能。如例 1 的条件可以换为“同底等高的两个三角形”, 同样能够保证命题结论的正确。因此, 充分条件是这样的一种条件, 有了它一定有某个结论, 没有它不一定没有这个结论。即“有之必然, 无之未必不然”的那种条件。

必要条件

如果没有条件 A , 也就没有结论 B , 那么就条件 A 对于结论 B 是必要的。简单地说, 命题“若 \bar{A} (非 A) 则 \bar{B} (非 B)”成立, A 就是 B 的必要条件。

例 3 “如果四边形对角线不互相垂直, 则此四边形不是菱形。”因此, “对角线互相垂直”是“这个四边形是菱形”的必要条件。对于菱形来说, “对角线互相垂直”的条件是不能撤换的。

例 4 “如果一个自然数的各位数字之和不能被 3 整除, 那么这个自然数也不能被 3 整除。”因此, “各位数字之和能被 3 整除”是“一个自然数能被 3 整除”的必要条件。

所以用“必要”这个词, 是因为“没有 A , 也没有 B ”。说明结论 B 的成立, 是必须要有条件 A 的。从上面两个例子可以看出, 必要条件是是不能撤换的, 但是当只具备这个条件时, 也不一定能够保证命题结论的成立。如例 3, 若对角线互相垂直, 这个四边形也不一定是菱形。因此, 必要条件是这样的条件: 没有它, 一定不会有某个结论, 但只有它也不一定有这个结论。即“无之必不然, 有之未必然”的那种条件。

综上所述, 充分条件完全保证了结论的成立, 必要条件则不一定能保证结论的成立; 充分条件是可以其他条件代替的, 必要条件则不可以用其他条件代替。

三种类型的条件

在学习中必须注意区分三种类型的条件:

1. 充分非必要条件

如果命题“若 A 则 B ”成立, 而命题“若 \bar{A} 则 \bar{B} ” (或“若 B 则 A ”) 不成立, 那么, A 就叫做使 B 成立的充分非必要条件。

例 5 命题“如果 $\alpha = \beta$, 那么 $\sin \alpha = \sin \beta$ ”, 成立。命题“如果 $\alpha \neq \beta$, 那么 $\sin \alpha \neq \sin \beta$ ”, 不成立。
 $\therefore \alpha = \beta$ 是 $\sin \alpha = \sin \beta$ 的充分非必要条件。

例 6 命题“如果两个角是对顶角, 那么这两个角相等”, 成立。

命题“如果两个角不是对顶角, 那么这两个角不相等”, 不成立。

\therefore “两个角是对顶角”是“这两个角相等”的充分非必要条件。

如果把例 5 的条件换成 $\alpha = 180^\circ - \beta$, 那么结论 $\sin \alpha = \sin \beta$ 也成立。因此, 充分非必要条件是可以撤换的, 撤换后代之以其他条件, 命题的结论仍然可能成立。

(下转第 2 页)

怎样利用三角形等积定理证题

北京医疗器械工程学校 马 骏

由三角形的面积 $= \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$ 可知, “同(等)底等(同)高的两个三角形必等积”。应用这个定理证题, 有时可使证明过程简捷。举例说明如下:

例 1 如图 1 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC > AB$, CE 和 BD 分别是 AB 与 AC 边上的高, 则 $CE > BD$ 。

证明:

在 $\triangle ABC$ 中,

$\therefore AC > AB$

则 $\frac{AC}{AB} > 1$ 。

又 $BD \perp AC$ 于 D , $CE \perp AB$ 于 E 。

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot CE = \frac{1}{2} AC \cdot BD$

因此 $AB \cdot CE = AC \cdot BD$ 。

$\Rightarrow \frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB} > 1$ 。

$\therefore CE > BD$ 。

说明: 有些直线形的问题, 常常可以用三角形面积定理来解。在已知条件中包含有直线形某边上的垂线时, 可以想办法将其转化为三角形的问题来考虑。若已知条件中不含有某边上的垂线, 则可以通过对该问题的分析, 适当添加垂线, 仍用三角形等积定理来证明。

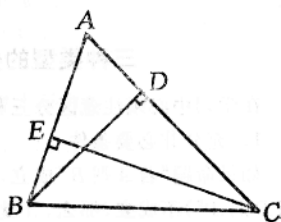


图 1

例 2 如图 2, $ABCD$ 为平行四边形, M 、 N 分

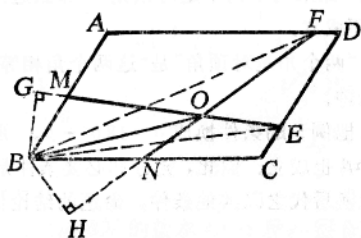


图 2

别是 AB 、 BC 的中点, NF 交 AD 于 F , ME 交 CD 于 E , 且 $NF = ME$, 又 NF 与 ME 交于 O , 求证: BO 平分 $\angle MON$ 。

分析:

要证明 BO 平分 $\angle MON$, 只要证明 B 点到 OM 的距离等于 B 点到 ON 的距离即可, 因而过 B 作 $BG \perp EM$ 于 G , $BH \perp FN$ 于 H 。

由于 $FN = EM$, 只要 $\triangle BFN = \triangle BME$ 即可, 又 M 、 N 分别为 BC 、 AB 的中点, 故 $\triangle BFN = \frac{1}{4} \square_{ABCD}$ 。

$\triangle BME = \frac{1}{4} \square_{ABCD}$, 显然可以得证。

证明:

连结 BE 、 BF , 过 B 作 $BG \perp EM$ 于 G ,

作 $BH \perp FN$ 于 H 。

$\therefore M$ 是 BA 的中点, 则 $BM = \frac{1}{2} AB$ 。

$\Rightarrow \triangle BME = \frac{1}{4} \square_{ABCD}$ 。

同理可证 $\triangle BNF = \frac{1}{4} \square_{ABCD}$ 。

$\therefore \triangle BME = \triangle BNF$, 而 $ME = NF$,

因此 $BG = BH$,

$\therefore BO$ 平分 $\angle MON$ 。

若上例中的 E 点或 F 点在平行四边形边的延长线上, BO 仍是 $\angle MON$ 的平分线。请读者试证之。

例 3 如图 3, 任作一条直线分别与 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 及 BC 边的延长线交于 F 、 E 、 D , 求证:

$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{EC}{AE} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$ 。

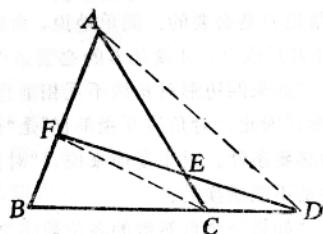


图 3

证明:

连结 AD 、 FC ,

∴ $\triangle FBD$ 与 $\triangle FCD$ 有同高,

$$\therefore \frac{\triangle FBD}{\triangle FCD} = \frac{BD}{CD};$$

同理 $\frac{\triangle AFD}{\triangle FBD} = \frac{AF}{BF}; \quad \frac{\triangle ECD}{\triangle AED} = \frac{EC}{AE};$

$$\frac{\triangle FEC}{\triangle AFE} = \frac{EC}{AE}.$$

$$\therefore \frac{EC}{AE} = \frac{\triangle ECD}{\triangle AED} = \frac{\triangle FEC}{\triangle AFE},$$

由等比定理可知

$$\frac{EC}{AE} = \frac{\triangle ECD + \triangle FEC}{\triangle AED + \triangle AFE} = \frac{\triangle FCD}{\triangle AFD}.$$

$$\therefore \frac{BD}{CD} \cdot \frac{AF}{BF} \cdot \frac{EC}{AE} = \frac{\triangle FBD}{\triangle FCD} \cdot \frac{\triangle AFD}{\triangle FBD}.$$

$$\cdot \frac{\triangle FCD}{\triangle AFD} = 1.$$

这就是有名的梅特劳斯定理.

例 4 如图 4, 设 $\triangle ABC$ 的三边为 a, b, c , 各边上的高分别为 h_a, h_b, h_c , $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 r , 且 $h_a + h_b + h_c = 9r$, 则 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

分析:

由题意可知, h_a, h_b, h_c 为 $\triangle ABC$ 三边上的高, 这使我们想到了三角形的面积. 而 $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆, 故必有过切点的半径与三角形各边垂直. 它也使我们想到了三角形 ABC 的面积 S . 这样, 就可以用三角形的面积把已知的三条高和三角形内切圆半径联系起来, 从而使问题得到解决.

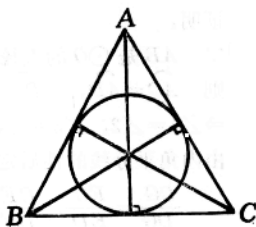


图 4

事实上, $h_a = \frac{2S}{a}, h_b = \frac{2S}{b}, h_c = \frac{2S}{c}$.

而 $S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$

$$\therefore r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

因此 $\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = 9 \cdot \frac{2S}{a+b+c}$

$$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 9$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(bc+ac+ab) = 9abc$$

$$\Rightarrow abc + b^2c + c^2b + a^2c + abc + ac^2 + a^2b + ab^2 + abc = 9abc$$

$$\Rightarrow b^2c + c^2b + a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2 - 6abc = 0$$

$$\Rightarrow c(a-b)^2 + b(a-c)^2 + a(b-c)^2 = 0.$$

而 a, b, c 是三角形的三边,

∴ $a=b=c$, 即 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

以上四个例子说明, 解题时应注意分析题目的条件, 找出解题的正确途径. 用三角形等积定理证题是常用的一个证题方法.

为了使读者能深入地了解这种证法, 再举出几个题供读者参考.

1. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F , 则 $AB \cdot DE = AC \cdot DF$.

2. 设 O 为 $\triangle ABC$ 内任意一点, AO, BO, CO 的延长线分别交 BC, AC, AB 于 D, E, F , 则 $\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$.

3. 梯形 $ABCD$ 中, 两对角线相交于 O , 过 O 作 OM 与腰 AB 垂直于 M , 作 ON 与腰 CD 垂直于 N , 则 $ON \cdot CD = OM \cdot AB$.

(上接第 6 页)

$$(3) \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1};$$

$$(4) 2\sqrt{12} - 4\sqrt{\frac{1}{27}} + 3\sqrt{48}.$$

三、解方程 (本题 8 分)

$$3x - 4(2x - 3) = \frac{1}{3}((x+1)).$$

四、产品出厂之前需检验和包装两道工序, 现有 34 人参加这两道工序, 已知每人每天可检验产品 400 件, 每人每天可包装产品 3000 件, 应分配多少人参加包装, 多少人参加检验, 才能使每天包装和检验的

件数相等? (本题 12 分)

五、把下列各式分解因式 (本题共 12 分, 每小题 6 分)

$$(1) x^5 - 3x^4 + 2x^3;$$

$$(2) 9x^2 + 6xy + y^2.$$

六、求值 (本题 11 分, 1 小题 6 分, 2 小题 5 分)

$$(1) \text{已知 } f(x) = x^2 - 5x - 6.$$

$$\text{求 } f(6), f(-1), f(0);$$

(2) $6x^4 + x^3 - 2x + k$ 正好能被 $2x^2 + x + 1$ 整除, 求 k 的值.

七、证明 $(x^a)^{b-c} (x^b)^{c-a} (x^c)^{a-b} = 1$ ($x > 0$). (本题 5 分)

三角形内(外)角平分线性质的应用

——平面几何学习辅导资料

北京石景山区高井中学 刘千章

三角形内(外)角平分线的性质定理,是平面几何中两条重要的定理。

三角形内角平分线性质定理:三角形任一内角平分线内分对边成两线段,这两条线段和夹这角的两边成比例,如图1。

三角形外角平分线性质定理:三角形任一外角平分线外分对边成两线段,这两条线段和夹相应的内角的两边成比例,如图2。

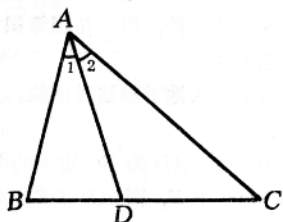


图 1

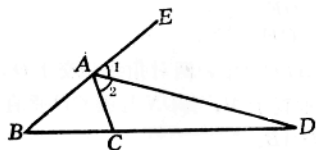


图 2

这两个定理的结论,都是四条线段成比例,因此,它们可以直接用来证明有关比例式的题目。同时,它们也常辅以其它定理,间接用来证明其它几何命题。

1. 证明比例式

例1 如图3, AB 是 $\odot O$ 的直径,从 A 、 B 各作一条弦 AF 和 BG , 两弦相交于 E 点,过 E 作弦 CD 垂直于 AB , 求证: $\frac{CG}{DG} = \frac{CF}{DF}$ 。

分析:

在已知条件中,直径 AB 与弦 CD 垂直,由垂径定理可以得到相等的弦与相等的弧,因而可以找到相等的角,应用三角形平分线的性质,可以达到证明比例题的目的。

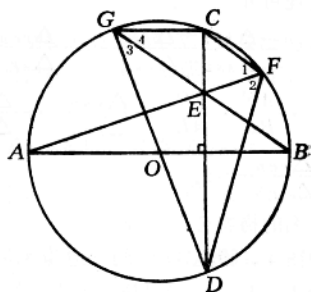


图 3

证明:

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $CD \perp AB$,
则 $\widehat{AC} = \widehat{AD}$, $\widehat{BC} = \widehat{BD}$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$ 。

由内角平分线的性质定理,得

$$\frac{CG}{DG} = \frac{EC}{ED}, \quad \frac{CF}{DF} = \frac{EC}{ED}$$

$$\Rightarrow \frac{CG}{DG} = \frac{CF}{DF}.$$

2. 证明两线平行

例2 圆上两点 A 、 B , \widehat{ACB} 的中点为 C , \widehat{AB} 上的任一点为 D , \widehat{AD} 的中点为 E , \widehat{BD} 的中点为 F . 在弦 CD 上取一点 P , AP 与 CE 交于 Q , BP 与 CF 交于 R , 求证: $QR \parallel AB$ 。

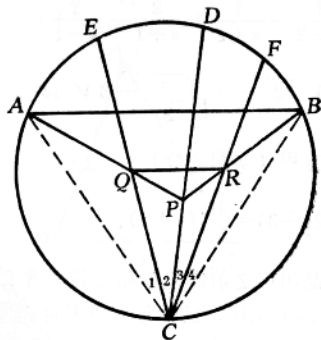


图 4

证明:

如图4, 连结 CA, CB .

$$\because \widehat{AE} = \widehat{DE},$$

$$\text{则 } \angle 1 = \angle 2.$$

$$\Rightarrow QP:QA = CP:CA.$$

$$\text{又 } \widehat{DF} = \widehat{BF},$$

$$\text{则 } \angle 3 = \angle 4.$$

$$\Rightarrow RP:RB = CP:BC.$$

$$\text{而 } \widehat{AC} = \widehat{BC},$$

$$\text{则 } CA = CB$$

由①, ②, ③得 $QP:QA = RP:RB$.

$$\therefore QR \parallel AB.$$

3. 证明两角相等

例3 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于 A, P 为两圆外的一点, PB 切 $\odot O_1$ 于 B, PC 切 $\odot O_2$ 于 C, PA 平分 $\angle O_1PO_2$. 求证:

$$\angle BPO_1 = \angle CPO_2.$$

证明:

如图5, 连接 BO_1, CO_2 .

$$\because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\text{则 } \frac{O_1A}{O_2A} = \frac{PO_1}{PO_2}.$$

$$\text{而 } O_1A = O_1B,$$

$$O_2A = O_2C,$$

$$\text{则 } \frac{O_1B}{O_2C} = \frac{PO_1}{PO_2}.$$

$$\text{又 } \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

$$\text{则 } \triangle PBO_1 \sim \triangle PCO_2,$$

$$\therefore \angle BPO_1 = \angle CPO_2.$$

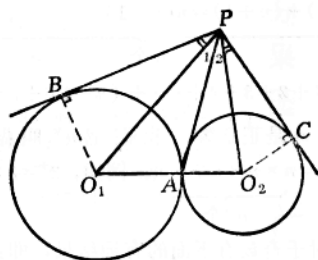


图5

4. 解几何中的一些计算题

例4 D, E, F 分别为 $\triangle ABC$ 的 AB, BC, AC 边上的点, 且 $ADEF$ 是菱形, AB 长 14 厘米, BC 长 12 厘米, AC 长 10 厘米, 求 BE 和 EC 的长.

解:

如图6, 连接 AE .

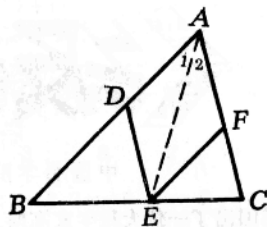


图6

$\because ADEF$ 是菱形,

$$\text{则 } \angle 1 = \angle 2.$$

$$\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{EB+EC}{EC} = \frac{AB+AC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{EC} = \frac{24}{10}.$$

$$\therefore EC = 5, BE = 7.$$

答: BE 长 7 厘米, EC 长 5 厘米.

5. 证明线段相等

例5 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B, \angle C$ 的平分线 BD, CE 分别交对边于 D, E 两点, 且 $BE = CD$. 求证: $\triangle ABC$ 为等腰三角形(如图7).

证明:

$$\because \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4.$$

由内角平分线的性质定理, 得

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}, \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

设 $AB = c, AC = b, BC = a,$

$$BE = CD = m.$$

代入上式, 得

$$\begin{cases} \frac{c-m}{m} = \frac{b}{a} & \text{①} \\ \frac{b-m}{m} = \frac{c}{a} & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} \div \text{②}, \text{得}$$

$$\frac{c-m}{b-m} = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow c^2 - cm + bm - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow c = b.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

以上几例说明三角形内(外)角平分线的性质在几何中的应用是比较广泛的, 我们应该把这两个定理掌握得更好, 运用得更活.

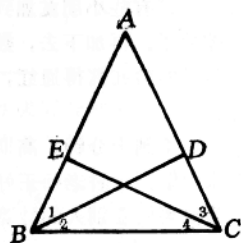


图7

级数趣谈

中国科学院数学研究所 陈景润 丁 平

十八世纪德国出了一位大科学家高斯。他生在一个很贫穷的家庭里，他的父亲是一个劳苦的工人。高斯在还不会说话时就开始学习算术了。当高斯三岁的时候，有一天晚上他看着父亲计算工钱，还纠正了父亲计算中的错误。

长大后他成长为当时最杰出的数学家、物理学家和天文学家，现在电磁学中的一些单位就是用他的名字命名的，数学家们则称他为“数学王子”。

高斯八岁时进入乡村小学读书。教算术的老师是一个从城里来的人，他觉得在乡下教几个穷小孩子读书真是大材小用。他认为，穷人的孩子天生都是笨蛋，这些蠢笨的孩子一定不会把书念好，如果有机会还应该打他们几下，以使自己在这枯燥的生活里增添一些乐趣。

有一天，算术老师情绪很低落。同学们看到老师非常不高兴的脸色，都害怕起来，心想今天可能又要挨老师的打了。

老师说：“你们今天替我算算 1 加 2 加 3 加 4 加 5 一直加到 100 的和，谁算不出来就罚他不准回家吃午饭！”老师讲完了这句话后，一言不发地拿起一本小说坐到椅子上看去了。

课堂里的小朋友们拿起石板开始计算：“1 加 2 等于 3，3 加 3 等于 6，6 加 4 等于 10，10 加 5 等于 15，15 加 6 等于 21，21 加 7 等于 28，28 加 8 等于 36……”有些小朋友加到几个数字后就把石板上的结果擦掉了。再加下去，数字越来越大，很不好算，不少孩子的脸涨得通红，有些孩子的头上渗出了汗珠。

还不到十分钟，高斯就停笔不算了，坐在凳子上东张西望。这时老师正好抬起头来，看到高斯这样，以为他要偷看别人的计算结果，于是很生气地走到他

面前，问他为什么不算。高斯回答说，他已经算出来了。老师根本不相信乡村里的一个穷孩子能算得这么快，因为他自己还算了半个多小时呢！

算术老师正要大怒起来，可是一看石板上整整齐齐写了这样的数：5050，老师惊奇起来，因为他自己得到的数值也是 5050。这个八岁的小孩子怎么这样快就得了这个答案呢？

高斯解释了他发现的一个方法。原来高斯的方法就是我国古代人用过的方法。我们把 1, 2, 3, 4, …… n, \dots 这些数叫做正整数。其中 1, 3, 5, 7, ……，叫做奇数；2, 4, 6, 8, ……，叫做偶数。在公元 1261 年左右，我国古代著名的数学家杨辉就算出了级数 $1+2+3+\dots+n$ 的答案。

当 $n \geq 6$ 时，杨辉的计算方法主要是使用 $1+2+3+4+\dots+(n-1)+n=n+(n-1)+\dots+4+3+2+1$ 。

$$\begin{array}{cccccccc} (+) & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ & n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 \\ \hline & n+1 & n+1 & n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{array}$$

总共有 n 个 $(n+1)$ ，所以我们有

$$\begin{aligned} & 2\{1+2+3+4+\dots+(n-1)+n\} \\ & = \{1+2+3+4+\dots+(n-1)+n\} \\ & \quad + \{n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\dots \\ & \quad \quad +2+1\} \\ & = (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + \\ & \quad (n+1) + (n+1) = n(n+1) \end{aligned}$$

n 个

$$\text{所以 } 1+2+3+4+\dots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

设 n, m 是正整数，我们把 n^m 叫做 n 的 m 次方，即 $n^m = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_m$ 。例如， $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ 。

经过计算对于奇数有下面的有趣结果，即：

$$\begin{aligned} 1 & \dots\dots\dots = 1=1^2 \\ 3+5 & \dots\dots\dots = 8=2^3 \\ 7+9+11 & \dots\dots\dots = 27=3^3 \\ 13+15+17+19 & \dots\dots\dots = 64=4^3 \\ 21+23+25+27+29 & \dots\dots\dots = 125=5^3 \\ 31+33+35+37+39+41 & \dots\dots\dots = 216=6^3 \\ 43+45+47+49+51+53+55 & \dots\dots\dots = 343=7^3 \\ 57+59+61+63+65+67+69+71 & \dots\dots\dots = 512=8^3 \\ 73+75+77+79+81+83+85+87+89 & \dots\dots\dots = 729=9^3 \\ 91+93+95+97+99+101+103+105+107+109 & \dots\dots\dots = 10000=10^4 \end{aligned}$$

图 1

现在我们自然地会想到，一般的情况是否成立呢？下面我们将证明，对一般的情况来说，上述结果也是成立的。由图1我们可以假设 $n \geq 11$ 。一般地说，对于第 n 行来说是

$$n(n-1)+1, n(n-1)+3, n(n-1)+5, \dots, n(n-1)+(2n-1).$$

如果我们能够证明

$$\{n(n-1)+1\} + \{n(n-1)+3\} + \dots + \{n(n-1)+(2n-1)\} = n^3 \quad (1)$$

成立，则对于所有正整数 n ，我们的结果是成立的。我们有

$$\begin{aligned} & \{n(n-1)+1\} + \{n(n-1)+3\} + \{n(n-1)+5\} + \\ & \{n(n-1)+7\} + \dots + \{n(n-1)+(2n-1)\} \\ & = n(n-1) + n(n-1) + 1 + 3 + \{n(n-1)+5\} \\ & + \{n(n-1)+7\} + \dots + \{n(n-1)+(2n-1)\} \\ & = n(n-1) + n(n-1) + n(n-1) + 1 + 3 + 5 + \\ & \{n(n-1)+7\} + \dots + \{n(n-1)+(2n-1)\} \\ & = \dots \\ & = \underbrace{n(n-1) + n(n-1) + n(n-1) + \dots + n(n-1)}_{n \text{ 个}} \\ & + 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) \end{aligned}$$

$$= n^2(n-1) + 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1), \quad (2)$$

又当 $n \geq 11$ 时，我们有

$$\begin{aligned} & 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-3) + (2n-1) \\ & = (2n-1) + (2n-3) + \dots + 7 + 5 + 3 + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{由于} \\ & \begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-3 & 2n-1 \\ (+) & & & & & & \\ \hline 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & 2n-7 & \dots & 3 & 1 \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \dots & 2n & 2n \end{array} \end{aligned}$$

上面共有 n 个 $2n$ ，所以我们有

$$\begin{aligned} & 2\{1+3+5+7+\dots+(2n-3)+(2n-1)\} \\ & = \{1+3+5+7+\dots+(2n-3)+(2n-1)\} + \\ & \{(2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+(2n-7)+\dots+3+1\} \\ & = n \cdot (2n) = 2n^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } & 1+3+5+7+\dots+(2n-3)+(2n-1) \\ & = n^2 \end{aligned} \quad (3)$$

由(2)，(3)即得

$$\begin{aligned} & \{n(n-1)+1\} + \{n(n-1)+3\} + \dots \\ & + \{n(n-1)+(2n-1)\} \\ & = n^2(n-1) + n^2 = n^3 - n^2 + n^2 = n^3 \end{aligned}$$

这就证明了(1)式是成立的。

动脑筋

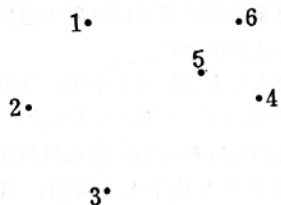
· 移树成行 ·

图中的六个点代表六棵树。

显然，三棵树成一行的只有两行。现在，移动这六棵中的某一棵，使得三棵树成一行的共有四行，问如何移法？

答案：

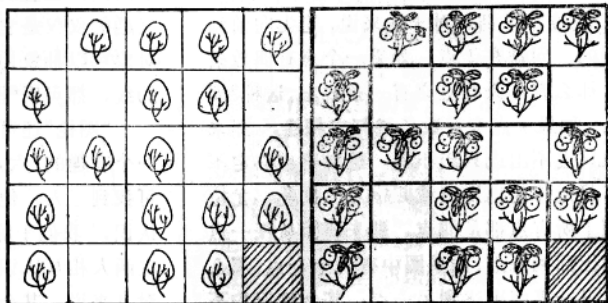
参看下图，将2号树移到1号树和6号树所在的直线上，使2号树与3号和4号树成一直线。（翟工拓）



· 巧分果园 ·



如下图，某生产队有一个正方形的果园，果园一角修有一幢果树作业所（图中阴影部分）。现在要将果园分成六块，每两块形状相同，面积相等，且果树棵数一样



是几倍？

如果在大小两个数中，都减去小数的一半，那么大数的差数则是小数的差数的3倍。

问大数是小数的几倍？

答案：

大数是小数的二倍，理由是：设两个数为 x 、 y ，且 $x > y$ 。

$$\text{又设 } \frac{y}{2} = m, \text{ 则 } x - m = 3(y - m) \Rightarrow x - m = 3m, x = 4m$$

$$\therefore \text{大数是小数的 } (4m) \div (2m) = 2 \text{ (倍)} \quad (\text{摘录})$$

多。这六块果园分别由六个作业组管理，而作业所归它们共同使用。

问地块应如何划分？

答案：

按左图所示的方法划分。

（翟工拓）

说古道今话图论

上海市普陀区业余大学 岑咏震

“图论”这一早在二百四十余年前就已经出现的数学理论，在电子计算机科学的刺激下，近年来焕发了青春的活力，成为一门十分活跃的数学分支，受到全世界数学界和工程技术界的重视。

“图论”的内容是如此丰富多采，以至在一篇短文中作一粗略介绍也是极其困难的。我们只能在这繁花盛开的树木上摘取几朵美丽的小花奉献给读者，以启发青年朋友去探索“图论”的新奥秘。

祖师尤拉

话说“图论”不能不提大名鼎鼎的数学家尤拉。

相传东普鲁士的普雷格尔河横贯肯尼希堡城，奈发夫岛居于河的中央，河上架桥七座(图1)。周围景色宜人，招来不少游客。有人提出，是否可以从某一陆地出发经过每座桥又不重复地回到原地。这个难题轰动一时，可无人能找到一条理想的游览线路。消息传到尤拉那里，他竟把问题处理得十分简洁漂亮。尤拉用点表示陆地，用线表示桥。于是得到图2。问题

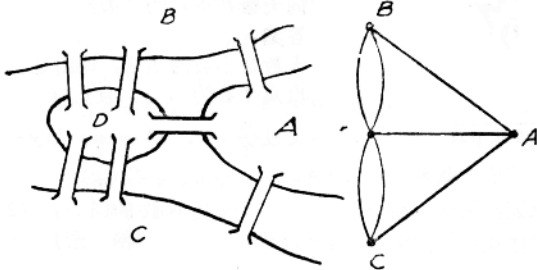


图1

图2

就归结为能否从某点出发不重复地走过所有线又回到原点了。也就是说能否笔尖不离开纸从某点出发“一笔画出图2”。尤拉考虑到，对于线来说，笔尖向前画总是可以做到的。问题在于点。如果一个点有偶数条线与之相连，那么有一条线进必有一条线出，这种“偶点”必能通过。如果一点有奇数条线与之相连，那末一定有一条线只进不出或只出不进，这种奇点必定不能通过，最多只能作为出发点或归宿点。据此，尤拉断言，如果图上所有点都是偶点，那末该图从任一点出发可一笔画出回到原点；如果图中有两个奇点，那么从其一点出发可一笔画出达到另一点；其余情况均不

可一笔画出。图2的四点均为奇点，所以人们寻找的游览线路根本不存在。

1736年尤拉以此项研究成果发表了题为“肯尼希堡的七座桥”的论文。这是“图论”史上公认的首篇论文。尤拉由此也获得了“图论”祖师的桂冠。

当然，尤拉决不仅仅解决了一个数学游戏。其实，诸如邮递线路、送货线路、洒水车线路、飞机巡视道路等等无一不是“一笔画”问题。如果图形不能一笔画出，那么只要添加一些线，也即允许走重复路，总可一笔画出。例如将图2改为图3，即有图4所示的一笔画了。当时，尤拉同时给出了一个具体地寻找一笔画的方法。但图1复杂，眼花缭乱，工作量很大。在电子计算机时代，人们自然想到请“电脑”帮助。据有关刊物去年报道，我国科学工作者已编制出“一笔画”程序。无论图多么复杂，现在寻找一笔画只是几秒钟的事了！

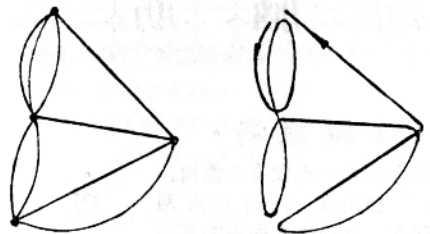


图3

图4

“六人相会”

“图论”研究的对象就是尤拉首先采用的由点及连接点的线所组成的图形。不过和几何不同的是，这里点的具体位置及线的具体形状是无关紧要的，我们感兴趣的仅仅是它们的连接关系。原则上说，凡是研究对象可以抽象为点，对象之间关系可以抽象为连接点的线，都可用“图论”方法加以处理。

“图论”还可以研究人与人之间的关系呢！这里举一个有趣的“六人相会”的例子：“任意六人相会，必可找到三人，他们或是两两互相认识，或是两两互不认识。”我们干脆用六个点代表六个人(图5)，且规定两人相互认识用实线连之，互不认识用虚线连之。对A来说，其余五点中至少有三点是可以与之用同一

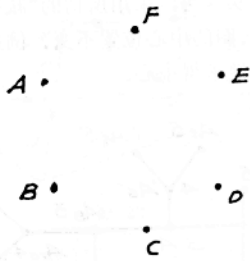


图 5

类线连接的。因为如果和 A 可用实线连接的点等于或小于三个，那么和 A 可用虚线连接的点就必定大于或等于三个。所以不妨用实线连接 AB, AC, AD (图 6)。对 B, C, D 三点来说，如有两点可用实线连之 (如 BC) (图 6)，则结论已经成立。因为 A, B, C 三人已为两两相互认识。如这三点无一可用实线连之，那么结论也已获证明，因为 B, C, D 间必可用虚线连之 (图 7)，此三人已为两两互不认识。于是我们证明了论断。

这个结论实际上正是“图论”的一条定理哩！

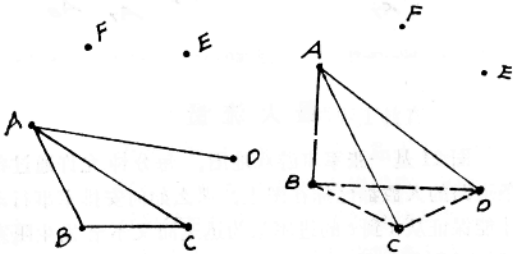


图 6

图 7

遇线架“桥”

图 8 中有两条线相交，如改画成图 9，那么除端点外再无相交了。这种能画在一个平面上，并且除端点外没有两条线相交的图称为平面图。而图 10、图 11，无论如何也无法把它线不相交地改画在一个平面上 (图 12、13)。这种图就是非平面的。

在“图论”史上平面性问题一直引人注目。这不仅是因为它和有名的世界难题“四色问题”直接有关，更

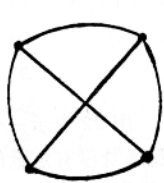


图 8

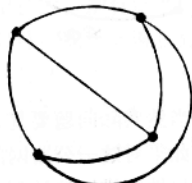


图 9

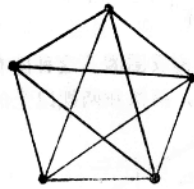


图 10

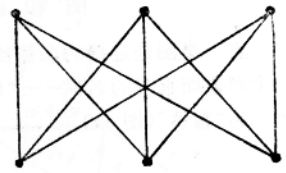


图 11

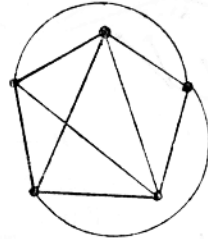


图 12

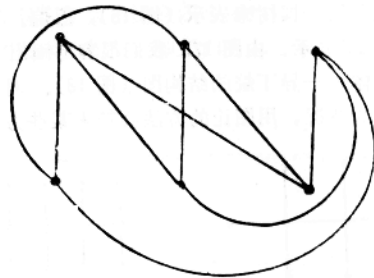


图 13

重要的是它有巨大的实用价值。在电子技术工艺向微型方向发展的今天，这一点显得更为突出。众所周知，电子工业中往往要在块极小的平面上布满密密麻麻的电路。如把元件作为点，连接导线视为线，就好像一张图了。显然，当图是平面的，就可做在一张平面上，否则导线间将要短路。为了避免这种情况，必须象立体交叉路口一样，遇线架“桥”。要不要架“桥”，“桥”架在什么地方最合理，都得好好计算。这正是电子技术向图论提出的课题。

经过几代人的艰苦探索，人们对图的平面性已经有了一定的认识。例如人们发现，如果两条串连的线可以看作一条线的话，那么任何非平面图一定包含图 10 或图 11。换句话说，图 10 和图 11 是两个最小的基本非平面图。近年来图的平面性问题已成为热门的研究课题，新的判别法也陆续有所报道。但至今为止，人们还没有找到一个用电子计算机判别图的平面性及处理架“桥”问题的方案。这正是留待有志者大显身手的领域。

“树”和“森林”

有一类图是连接的，并且不构成圆圈。这种图有一个形象而直观的名称——“树”，两棵和两棵以上的树称为“森林”(图 14)。

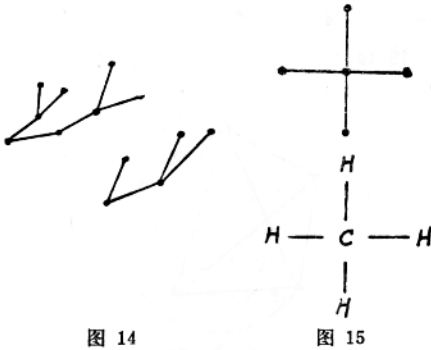


图 14

图 15

如果用点表示原子，用线表示键，那末甲烷的分子结构就可用一棵树来表示(图 15)，乙烷、丁烷可用图 16、17 表示。由图 17，我们很容易画出了烷的同分异构体——异丁烷的结构图(图 18)。对于分子结构复杂的情况，用图论的方法会带来某些方便。

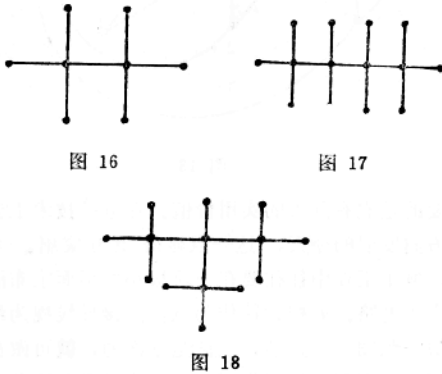


图 16

图 17

图 18

对“树”还有一个饶有趣味的研究，就是“树”的中心。

图 19 是一棵树。连接两点的线条数称为两点间的距离。例如，对 A_1 来说，到 A_2-A_{12} 各点的距离顺次为 1、2、4、4、3、2、3、4、4、5、5。我们把其中最大的数值 5 记在 A_1 上。这一数值表示了 A_1 的离心程度。类似地，其余各点都可标上相应的数值(图 19)。其中 A_7, A_8 两点的离心程度最小，称为图的中心。如果图 19 表示一个军事设施图，那么总可用线上添点的方法使两点距离和实际距离相当。为了较快地传递信息，指挥中心显然设置在树的中心较为合理。

那么如何较快地求得中心呢？用上面的方法显然

太繁琐了。其实，可以采用所谓的“减端点法”：同时减去树的端点，图的中心位置不变。例如可用图 20 所示的变换较快地求得中心。

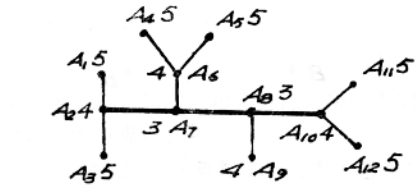


图 19

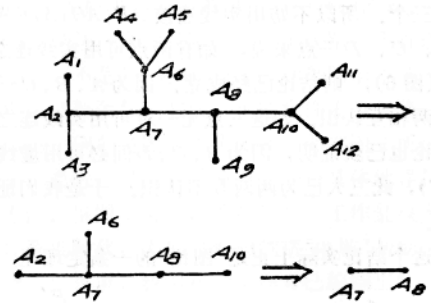


图 20

最大流量

图 21 是一张军事游戏地图。每分钟允许通过每条道路的人数都已标在图上。那么如何安排军事行动才能保证从 s 到 t 的进军最为迅速而又不至发生阻塞拥挤现象呢？显然，因为独木桥上每分钟只能通过 50 人，这就决定了从 s 到 t 每分钟最多也只能通过 50 人。

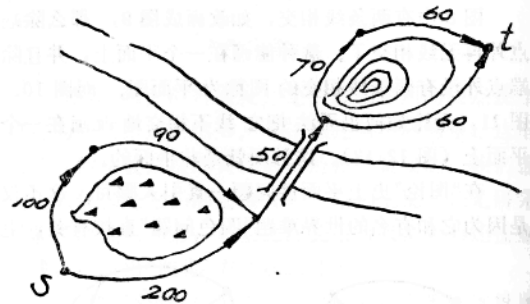


图 21

当然实际问题要复杂得多。图 22 表示一个公路网。如果对这一公路网的最大流量没有定量的认识而盲目地安排运输计划，那势必会造成“阻塞”和“空闲”并存的现象。图论中已得出一个计算运输网络