概率与统计应用导引

P. L. 迈耶 著

李学光译　　王展经校

一九八五年十月

译　序

《概率与统计应用导引》是高等院校一期用概率统计教科书。作者迈耶（Meyer）在美国华盛顿大学任教。该书已出第二版。

该书特点：①阐述直观、细致、通俗易懂，但对定义、定理的叙述又注意力求严密；②例题多，习题多。引入一概念，证明一定理，大多举例说明其意义与用法，并在其中又结予读者以新知识，开拓读者眼界。在书未附有大多数习题的答案或提示，便于读者查对；③几乎所有的定义、定理之后都写有“注”，用以阐述直观意义，说明需要注意之点，沟通前后内在联系；④该书编写系统与对教材内容的处理有自己的特色，对常用的各种概率分布之间的联系较之于我国已公开发行的几种教科书都讲得详细明了得多，而且注意通过实例来阐明这种联系，使读者通过应用加深对内容的理解；⑤作者注意对学生兴趣与能力的培养，学生阅读后，易于理解，懂得应用，自然地对本学科产生浓厚的兴趣。综合上述，本书确是一本很好的教科书，又是较好的自学用书与教学参考书。

感谢我校各级领导的热情关心与大力支持，使得译印工作顺利进行；感谢王展经同志对译稿的详细的校对，使翻译更为准确，文字较之原来通达得多。由于译者水平有限，错误一定难免，敬请使用此译本的同志热情批评指正，译者表示衷心的谢意。

李学光

1985·10·

第一版前言

本书作为概率论导引及其某些应用的教程，可教一个学期或两个季度。必备的知识是一年的微积分学，并假定没有概率或统计的初步知识。得以发展完善成本书的教程已在华盛顿州立大学教过多年，主要是用于主修工程或自然科学的学生。这些学生中的大多数只能用一学期来学习这门学科。然而由于这些学生熟悉微积分学，故除了确实只有初等水平者之外，他们可以开始学习这门学科。

在困难的转化阶段可以引入许多数学课题，对于概率也自然是这样。本书力图运用读者已有的数学基础知识而不超过。运用精确的数学语言但注意不变得沉浸于不必要的数学细节中。当然这根本不是一本“烹调书”，虽然非正式地引入和讨论了许多概念，但是在叙述定义和定理时还是小心的，如果定理的详细证明行不通或不必要，那么至少也提供出重要思路的一个概略。这本书的一个明显特点是在大多数定理与定义后面有“注释”，在这些注释中用直观的观点讨论了所提出的特定的结果与概念。

由于我强制自己要写出一本相当简洁而又内容很广泛的教科书，因此关于某些课题的取舍必须作出许多考虑，在这里似乎是用不明显的方式去解决这个问题。当然我不是说，对于某些被舍弃的课题不是在本书中一处也不能找到，也不是说没有忽略一点必要的材料，但是在很大程度上都强调了那些以相当详细的方式所提出的基本概念。只有关于可靠性的第十一章可以认为蜻蜓点水式地点了一下，但是即使在这里我也感到关于可靠性问题的概念对许多人是有基本的兴趣的，而且可靠性概念对于阐述本书前面所引入的很多概念是一个极好的工具。

虽然现有的教学时间限制了可达到的广度，但还是达到了对课题的非常广泛的选择，看一下目录表就很清楚，大约本书的四分之三是关于概率的内容，而最后的四分之一被用于讨论统计推断。关于概率与统计之间重点的这种特定的安排虽然没有什么特色，但我深深感到关于概率的基本原理的牢固基础对于正确理解统计方法是必不可少的。在观念上，应当在概率教程后面是统计理论与方法教程，但是正如我早先所说的，采用这个教材的大多数学生没有两学期的时间来展示这门学科领域。因此，我感到不得不最少地去讨论统计推断的一般领域中一些更重要的方面。

科目内容的一定安排的可能成功与否，应该不只用所学过的具体概念及所获得的具体方法来加以判断，而最终的鉴定还必须考虑到是不是能很好地为学生通过自学或者后续的正式课程的学习继续研究这个科目作好了准备。如果这个标准被认为是重要的，那么基本概念和基本技巧就应予强调，而高级的专门方法及课题应被降为次要任务就变得很明显了。这就成了决定所包含的课题的一个重要因素。

要叙述清楚概率论的重要性是困难的。由大量观察到的现象的研究所得的恰如其分的数学模型是概率模型，而不是确定性模型。又统计推理的全部科目都建立在概率研究的基础之上，统计方法是科学家及工程人员最重要的工具之一。为了合理地应用这些方法就需要对概率的概念有透彻的理解。

读者除了要熟悉许多具体的方法及概念以外，还要树立起一种观点：概率地进行思考，不问如“这个部件会运行多久？”而问“这个部件以多大的可能性运行100小时以上？”在很多情况下，后一个问题不仅更为适宜，而且事实上只有这种问法才有意义。

在传统上，概率的很多重要概念是借助于各种“靠碰运气取胜的游戏”来阐明的，如掷硬币或骰子，从一副纸牌中抽牌，旋转铜钱等等。我没有完全避免提到这些游戏，因为它们确能很好地解释基本概念。但是我已作出努力使学生同概率应用的一些更恰当的实例相接触，诸如从放射源放射α粒子，批量抽样，电子装置的寿命以及与部件和系统的可靠性有关的一些问题，等等。

我顺便地提一下任何一本数学教科书的一个最明显的特点：习题。值得指出的是必须把解题看作是课程的一个组成部分。只有自己亲自去提出和解答习题，学生才能真正地加深对概念的理解和运用，也才能熟悉有关的方法。因此本书包含有330多道习题 其中大部分在书末附有答案。除了要读者解答的问题以外，全书中还散布着大量的已解出的例题。

本书是用非常连贯的方式写成的，大多数章节的理解需要熟悉前面的章节。但是对于第10章和11章不是那么紧要，特别当人们感兴趣花更多的时间于第13—15章中所讨论的统计应用的时候。

……（略）

Paul・L。迈耶

1965年4月于华盛顿普尔门

第二版前言

鉴于在过去几年中，我收到的来自于使用本书第一版的学生和教师两方面的许多善意的意见，我已作了一些相应的修改。在我自己重复使用本书中，我发现材料的基本组织与所反映出的总的水平（即严密的数学论证与更多的非正式的解释和例题相结合）是差不多与采用本教材的这类学生相适应的。

然而，还是作了许多修改与补充。首先力图消去在第一版中出现的各种印刷错误。作者极为感谢许多读者，他们发现其中某些错误，而且以足够关心的态度向我指出了这些错误。

其次，力图更加清楚地阐明各种概率分布之间的关系，使学生更好地理解怎样用不同的概率模型去逼近另一个模型。

最后，添加了一些新的问题于第一版中的已经很冗长的目录之中。

……（略）

P·L。迈耶

1969年12月于华盛顿普尔门

目　录

第一章　概率的引入

1.1　数学模型

在本章我们将讨论一类在全书中我们所关心的现象。还要阐述一个数学模型，这个数学模型能使我们相当精确地研究这类现象。

首先，重要的是区分所观察的现象本身和这个现象的数学模型。当然，这决不影响我们观察的现象。然而，在选择一个模型时人们可以使用自己的意见。关于这一点，J. Nemyan教授阐述得很好，他写道："每当我们应用数学去研究某些所观察的现象时，实质上我们必须从建立起这些现象的一个数学模型（确定的或随机的）开始；这个模型就不可避免地要将实际问题简化，忽略其某些细节。这个模型的成功与否取决于那些被忽略了的细节在所研究的现象的发展过程中是否确实无关重要。归结出的数学问题的解答可能是正确的，也可能正由于所作的基本假定不合理而与观测得到的数据有着相当的不一致。在观测数据得到之前，要确定所给数学模型是否适当，通常是困难的，为了检验一个模型的有效性，我们必须导出模型的一定量的结果，然后将这些预测的结果与观测值作比较。"

当我们研究某些所观察的现象以及作为描述这些现象而采用的各种模型的时候，我们必须牢记住上述思想，让我们首先考虑什么方可称为确定性模型。所谓确定性模型我们指的是这样一种模型：这个模型被一组条件所规定，在这组条件下进行试验，便确定了试验结果。例如，若我们把一个电池接入一个简单电路中，那大致描述所观察到的电流的数学模型就是 $I=E/R$，即欧姆定律。只要给出E和R这个模型便预测I的值。换言之，如果上述试验重复多次，每次用同一个电路（即保持E和R,固定），那么我们可望观测到I的同一个值。可能产生的误差是如此小以至在大多数情况下　上述的描述（即模型）应该足够了。关键在于，一定的电池、导线、用于观测电流的安培表以及我们使用测量仪器的能力决定每次试验的结果。（存在某些一定的因素，他们使得这次试验与那次试验出现差别，然而这些因素并不显著地影响其结果。例如，实验室的温度、湿度或者读安培表的人的高度都有理由假定不影响其结果）

事实上存在着很多"试验"例子，对于这些试验，确定性的模型是适用的。例如，万有引力定律十分精确地描述了在一定条件下一个下落物体会出现什么情况，Kepler定律为我们给出了行星的运动状态。在每一个位置，模型规定：使一定现象发生的条件确定了一定的可观测变量的值：速度的大小，在一定的时间内扫过的面积等。这些数值出现于我们所熟悉的许多公式之中。例如，我们知道在一定条件下，一物体（竖直地上抛）移动的距离由 $S=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t$ 给出，这里 V_0 是初始速度，t是运动的时间。我们集中注意力的问

题不是上述方程的特殊形式（即二次）而是存在着t和S之间的确定关系这一事实，即如果方程右边的量被给出，则方程左边的量便唯一确定。

对于大量的场合，上面描述的确定性数学模型已经够用，然而也存在着许多现象，为了研究这些现象需要另一种数学模型，这种模型我们将称之为不确定模型或概率模型。（更经常用的另一种术语是随机模型）在本章稍后，我们将要非常精确地研究这样的概率模型如何被描述出来。目前，让我们考察几个例子。

假设我们有一块正在发射α-粒子的放射性物质，通过计数装置我们可以记录出在一特定的时间间隔内发射这种粒子的数目。很清楚，即使我们知道了这块物体的精确形状、尺寸、化学成分和质量，我们也不可能精确地预计放射出粒子的数目，因而把所得到的放射出的粒子的数目n作为放射源物质的各种相关的特征数的函数这一个确定性模型显然是不适当的。相反，我们必须考虑一个概率模型。

作为另一个实例，考虑下面气象学的情形。由于一个特定的风暴扫过某一地区，我们希望确定其降雨量。利用记录降水量的仪器是可行的。气象观测能够为我们提供关于研究风暴的重要信息：各不同地点的气压、压力变化、风速、风源和风向以及各种有关的海拔数据。这个信息对于预测降水量的一般情况（比如说是少量、中等或大量）可能是有价值的，但要很精确地指出有多少水量降落下来是不可能的，我们又碰到了这样一个现象，对于它，确定性的方法是不适用的，概率模型可更精确地描述这种现象。

如果已经证明了概率模型的理论是有效的（还未证明），那么在大体上我们可以指出有多少雨量降落下来，因此我们利用概率模型。在处理放射性裂变的例子中，我们也必须使用概率模型，即使是大体上的。

让我们冒着超越我们自己的风险，利用以后将要定义的一个概念，简要指出，在一个确定性模型中假定实际结果（数值的或者其他形式的），由所进行的试验或过程的条件所决定，然而在一个非确定性模型中，试验的条件只确定观察结果的概率特性（更确切地说是概率规律）。

换句话说，在一个确定性的模型中我们利用“实实在在的研究”去预报结果 而在一个概率模型中我们用同样的研究去确定一个概率分布。

1.2 集合初步

为了讨论我们要研究的概率模型的基本概念，具有集合理论的一些通用的思想和概念将是非常方便的。这门学科是一门大学科，已有很多关于它的著作，但我们需要的仅仅是一些基本概念。

将一些对象放在一起就成为一个集合。集合通常用大写字母A、B等等表示，为了表示出被包含在集A中的对象可用三种方法。

（a）我们可以列举出A的对象，例如，$A=\{1, 2, 3, 4\}$表示由正整数1、2、3、4组成的集合。

（b）我们可以用描写语句表示集合，例如，我们可以说A是由一切介于0和1之间的实数以及0、1所组成的集合。

(c) 为了表示上述集合，我们可以简单地写作$A\{x\mid 0\leq x\leq 1\}$，即A是0、1之间的一切实数且包括0和1组成的集合。

构成集合的每个对象称为A的元素，或成员；当a是A的元素时我们写作$a\in A$，当a不是A的元素时我们写作$a\overline{\in}A$。

存在着两个使我们经常感兴趣的特殊集合。在许多问题中，我们所关心的是一个确定集合的对象的研究，而不管其他对象。例如，我们所关心的可能是全体实数，或24小时内生产线生产出的所有零件等等。我们规定研究中的一切对象所组成的集合为全集，这个集合通常用U表示。

必须提出来的另一个集合可由下法产生。假设集A表示满足方程$x^2+1=0$的一切实数x的集合。当然我们知道根本没有这样的实数。即集A根本不含有任何元素，这种情况非常经常地发生，因而有理由对这样一个集合引入一个专有名词。我们定义不含有任何元素的集合为空集或零集。通常用ϕ表示这个集。

当研究两个集A和B的时候，可能出现：凡是A的元素一定是B的元素，这时我们说A是B的一个子集并记作$A\subset B$。对于$B\subset A$可作类似的解释。因此当且仅当$A\subset B$和$B\subset A$时，我们说两个集A和B是同一个集，$A=B$，即当且仅当两个集合有同样的元素时它们便相等。

可以直接得到空集和全集的下述两个性质：

(a) 对于任何集A，有$\phi\subset A$。

(b) 一旦全集被认定，那么对于在U的意义上所研究的每一集A，我们总有$A\subset U$。

例1.1 假设U是全体实数所成的集，$A=\{x\mid x^2+2x-3=0\}$，

$B=\{x\mid(x-2)(x^2+2x-3)=0\}$，$C=\{x\mid x=-3,1,2\}$那么，$A\subset B$，$B=C$。

其次，我们考虑将已知集合联合，以形成新的集合。考虑两个基本的运算。这两种运算在一定意义上相当于于数的加法和乘法。设A和B是两个集，我们定义C作为A和B的并集（有时称为A和B的和）如下：

$C=\{x\mid x\in A$或者$x\in B$（或者两者）$\}$，我们把并集写作$C=A\cup B$，于是C是由在A中或在B中或在二者中的元素所组成。

我们定义D作为A和B的交集（有时称为A与B的积）如下：

$D=\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$，我们把交写作$D=A\cap B$，于是D是由既在A中又在B中的元素所组成。

最后，我们引入集A的补集的概念：用$\bar{A}$表示的集由一切不在A中（但在全集U中）的元素所组成，它被称为A的补集。即$\bar{A}=\{x\mid x\overline{\in}A\}$。

我们用上述方法对集进行运算时，使用一种称为Venn图的图示法显得很直观。图1.1的每个图形中，阴影部分表示所得到的集。

例1.2，设$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，那么，我们找到$\bar{A}=\{5,6,7,8,9,10\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\{3,4\}$。注意，在描述一个集（如$A\cup B$）时，对相同的元素我们只列一次。

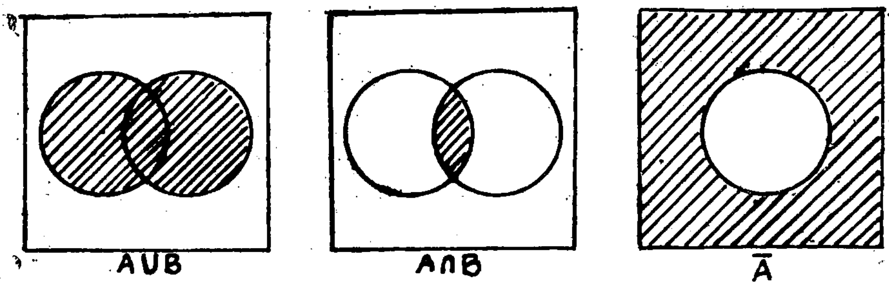

图1．1

上述两个集合的并与交的运算，显然可推广到任意有限个集，于是我们把$A\cup B\cup C$定义作$A\cup(B\cup C)$或者$(A\cup B)\cup C$，很容易验证二者是相同的。类似地，我们把$A\cap B\cap C$定义作$A\cap(B\cap C)$或者$(A\cap B)\cap C$，也容易验证它们是相同的。很显然，对于任意有限个已知集我们可以继续上述过程得到新的集合。

我们断言了某些集合例如$A\cap(B\cap C)$和$(A\cap B)\cap C$是同一个集，其实可证明存在大量的这样相等的集，其中一些列举于后。如果我们注意到两个集合只有当它们含有相同的元素时，它们才是同一个集合，那么，要证明上述的断言是正确的就很容易了。读者借助文氏图就会相信这些等式：

(a) $A\cup B=B\cup A$；　　(b) $A\cap B=B\cap A$；

(c) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；　　(d) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$。　　(1.1)

我们把（a）和（b）称为交换律，把（c）和（d）称为结合律。

还存在着大量的其它的包含有并、交、补的集恒等式，其中最重要的已在下面列出。每一个恒等式的正确性可以借助文氏图验证。

(e) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(f) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；　　(1.2)

(g) $A\cap\phi=\phi$；　(h) $A\cup\phi=A$；　(i) $(\overline{A\cup B})=\bar{A}\cap\bar{B}$；

(j) $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$；　(k) $\bar{\bar{A}}=A$。

我们注意：（g）和（h）表示ϕ在集合中（关于运算$\cup$和$\cap$）很象数0在数中（关于和与积运算）所起的作用。

已知两个或更多的集需要构造另一种集，方法如下：

定义，设A和B是两个集，所谓A和B的Cartesian乘积指的是集$\{(a,b):a\in A,b\in B\}$用$A\times B$表示，即它是一切有序对的集合，这里第一个元素取自A中，第二个元素取自B中。

例1.3　设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，那么，$A\times B=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,4)\cdots,(2,4),(3,1),\cdots,(3,4)\}$

注：一般$A\times B\neq B\times A$。

上述概念可以推广如下：如果$A_1,\cdots An$是集，那么，$A_1\times A_2\times\cdots\times An=\{(a_1,a_2,\cdots a_n):a_i\in A_i\}$即，一切n重有序组的集合。

如果我们取一个集同它自己的Cartesian乘积，即$A\times A$或$A\times A\times A$时，就出现了

一个重要的特殊情形。当我们处理欧几里得空间$R \times R$时就出现了这样的例子。这里R是一切实数所成之集，且三维欧几里得空间可表示为$R \times R \times R$。

一个集合的元素的个数对我们是相当重要的，如果在A中存在有限个元素，如a_1，$a_2 \cdots$，a_n，我们说A是有限集，如果集A中存在无穷个元素且可以同自然数一一对应，我们说A是一个可数集或无穷可数集（作为例子可以证明一切有理数所成的集是无穷可数集）。最后我们还要考虑无穷不可数的情形。这样的集合有无穷个元素，它不是可数的。作为例子，可以证明对于任何两个实数$b>a$，集$A=\{x \mid a \leq x \leq b\}$具有不可数个元素。因为我们能够把每个实数同实数轴上的一个点联系起来，故上面就是说任何的（非退化的）区间所含有的点多于可数个。

上面引入的概念，虽然只表示集合论的简短的一瞥，但是对于我们的目的：相当严格和准确地描述概率论的基本概念已是足够的了。

1.3 非确定型试验的例子

我们现在准备讨论所谓一个"随机的"或"非确定型的"试验意味着什么，（更具体地说，我们将给出不确定性模型对其适用的现象的例子。其特征读者应当牢牢记住。当我们对一个实验谈论关于非确定性模型时我们将反复提到不确定性的或随机的试验）。我们将不企图给出这个概念的精确的词典式的定义，我们仅仅引出大量的例子以阐明我们要记住什么。

E_1：掷一颗骰子并观察顶面出现的点数。

E_2：抛一枚硬币四次且观察正面出现次数。

E_3：抛一枚硬币四次且观察正反面出现的序列。

E_4：在一个生产线上制造零件且数出24小时内生产的次品零件的数目。

E_5：一个机翼要安装大量的铆钉，数出次品铆钉的数目。

E_6：生产一个灯泡，将它插入插座，记录出直至熄灭所经过的时间（以小时计），即试验它的寿命。

E_7：10个零件含有3个次品，一个接一个（不放回）选出零件直至得到最后一个次品零件，数出从这批零件取出的零件总数。

E_8：制造零件直至10个正品零件生产出来数出制造零件总数。

E_9：发射一颗导弹，在一定的时刻t得出它的三个速度分量V_x，V_y和V_z。

E_{10}：在时刻t_1，$t_2 \cdots$，t_n、观察一颗新发射的导弹，记录出导弹在每个时刻离地面的高度。

E_{11}：测量一个钢架的抗拉强度。

E_{12}：从一个只盛有黑球的缸中取出一球且指出它的颜色。

E_{13}：自动温度计连续记录了整个24小时的温度，"读"出一个特定地区在一个特定日期的温度曲线。

E_{14}：在E_{13}所描述的情况中，记录上述的24小时内的最低温度x和最高温度y。

上述的试验有什么共同点呢？对于一个随机实验的描述确有下述特征：

(a) 每一个试验都可在实质上不变的条件下重复任意次。

(b) 虽然我们一般不能指出一定的结果是什么，但我们能描述出试验的一切可能结果的集合。

(c) 当重复进行试验时，各单个的结果的出现看来是偶然的，然而当试验重复大量次数时一个一定的曲线或规律性便出现了，正是这个规律性使得有可能构造一个精确的数学模型，利用这个模型可以分析这个试验。以后我们将不得不更多地谈论这个规律的性质及重要性。现在读者只须考虑重复地抛一枚匀称的硬币，虽然正面和反面会以几乎完全任意的形式相继出现，但是一个众所周知的经验事实是，在大量的投掷以后出现正面和反面的比率将大约相等。

应该指出上述全部试验都满足这个一般的特征，（当然，最后提到的特征只能利用试验来加以证实。读者从直观上可以相信，如果试验重复了大量次数，则显示出规律性是很明显的了。例如，检验从同一个工厂来的大量灯泡，那么大体上燃点时间超过100小时的灯泡数目相当精确地预报出来）注意试验E_{12}具有特有的性质，它仅有一个可能结果，一般这样的试验是不令人感兴趣的，因为只有当进行一个试验时，我们并不知道什么特殊结果会产生这一情况才是我们感兴趣的。

注： 在描述各种试验时，我们不仅规定进行试验的程序，还要规定在观察中我们所感兴趣的东西（比如说，在前面提到的E_2和E_3之间的不同，这是一个重要之点，以后讨论随机变量时我们还将提到这一点。现在让我们简要地指出，作为一个单个试验的结果或者一个单个现象的发生，可能算出几种不同的数值，例如，如果从一大群人中选取一个人（实际的选取应是前面提到的试验程序），但我们可以对人的高度，重量，年收入。孩子的数目等等感兴趣，当然在大多情况下在开始试验之前我们知道我们要关心的是什么数字特性。

1.4 样本空间

定义：对我们所研究每一个试验$\mathscr{E}$，我们定义$\mathscr{E}$的一切可能结果的集合为它的样本空间。我们通常用S表示这个集合。（本书中，S还表示前述的全集）。

我们来考察上述每一个试验并写出它们每个的样本空间，把试验E_i的样本空间记为S_i。

S_1：$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

S_2：$\{0, 1, 2, 3, 4\}$。

S_3：{由a_1，a_2，a_3，a_4}组成的一切序列，这里每个$a_i = H$或者T由i次投掷时出现正面还是反面而定。

S_4：$\{0, 1, 2, \cdots, N\}$，这里N是在24小时能够生产零件的最大数目。

S_5：$\{0, 1, 2, \cdots, M\}$，这里M是安装铆钉的数目。

S_6：$\{t \mid t \geq 0\}$。

S_7：$\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$。

S_8：$\{10, 11, 12, \cdots\}$。

S_9：$\{v_x, v_y, v_z \mid v_x, v_y, v_z$是实数$\}$。

S_{10}：$\{h_1, h_2, \cdots hn \mid h_i \geqslant 0, i=1, 2, \cdots n\}$。

S_{11}：$\{T \mid T \geqslant 0\}$。

S_{12}：{黑球}。

S_{13}：这个样本空间是这里所研究的样本空间中的最复杂的一个，实际上我们可以假设在一个特定地区的温度不会超过或低于某个值，比如说M和m。除了这个限制外，我们必须允许带有某种其它条件的任何图形的可能性出现。如图形没有跳跃（即它表示一个连数函数），另外，图形还具有某种光滑程度的特性，即图形表示一个可微函数，因此，我们最后指出样本空间是：

$\{f \mid f$是一个可微函数，且对于一切t，满足$m \leq f(t) \leqslant M\}$。

S_{14}：$\{(x,y) \mid m \leq x \leq y \leq M\}$，即$S_{14}$由在二维$xy$平面上一个三角形内及边界上的点组成。

（本书中，我们不注重象S_{13}中所碰到的复杂的样本空间。然而，这样的样本空间确会出现。但是对于它们的研究需要比我们预先假定的更先进的数学工具。）

为了写出对应于一个试验的样本空间，对于我们测量或观察的东西必须有很清楚的概念，因此我们应该说相应于一个试验的“一个”样本空间，而不说一个试验的样本空间。关于这一点请注意S_2和S_3的区别。

还要指出，一个试验的结果不一定是一个数。例如，在E_3中每个结果是一个关于H和T的序列，在E_9和E_{10}中，每个结果是一个向量，而在E_{13}中每一个结果是一个函数。

讨论样本空间中结果的数目也是重要的。有三种可能：样本空间可以是有穷的，无穷可数的或无穷不可数的。对于上述例子，我们指出S_1、S_2、S_3、S_4、S_5、S_7和S_{12}是有穷的，S_8是无穷可数的，而S_6、S_9、S_{10}、S_{11}、S_{13}和S_{14}是无穷不可数的。

在这一点上，值得评论一下数学上“理想化”了的样本空间和实验中实际的样本空间的区别。为此，我们来考察试验E_6和与它相应的样本空间S_6，很清楚，当我们实际记录灯泡燃点的总时间t的时候，我们已成了测量仪器的精确度的“牺牲品”，假设我们有一部仪器，它能读时间到两个小数位，例如16.43小时。由于加上的这个限制其样本空间便变成无穷可数的：$\{0.00, 0.01, 0.02, \cdots\}$。而且如果更现实地假设：没有灯泡持续到超过H小时，这里H可以是很大的数，因此只要我们现实地写出这个样本空间，我们就实际得到一个有穷样本空间：$\{0.0, 0.01, 0.02, \cdots, H\}$结果的总数应是$\frac{H}{0.01}+1$，即便H是一个不太大的数，例如$H=100$，$\frac{H}{0.01}+1$也将是一个很大的数。这样当初假定$t \geq 0$的一切值都是可能结果因而规定其样本空间是$S_6$，但在这时在数学上就变得非常简单和方便了。

鉴于上述评论，所写出的大量样本空间都是理想化了的。在以后的一切场合中，所考察的样本空间都将是数学上最方便的。在大多数问题中关于样本空间的适当选择所出现的问题很少。

1.5 事件

另一个基本概念是事件的概念。一个事件A（关于相应于试验ε的一个特定的样本空间）不过是可能结果的一个集合。如用集合术语，一个事件是样本空间的一个子集，鉴于这种讨论这就意味着S本身和空集ϕ都是一个事件。任何一个单个的结果也可看作是一个事件。

下面是事件的一些例子。我们再次参照上面列举的试验，用A_i来表示相应于试验E_i的一个事件。

A_1：出现偶数：即$A_1=\{2,4,6\}$。

A_2：$\{2\}$；即出现两次正面。

A_3：{HHHH，HHHT，HHTH，HTHH，THHH}；即表示正面多于反面。

A_4：$\{0\}$；即全部零件都是正品。

A_5：$\{3,4,\cdots,M\}$；即多于两个铆钉是次品。

A_6：$\{t \mid t<3\}$；即灯泡燃点时间不到3小时。

A_{14}：$\{(x,y) \mid y=x+20\}$即最高温度比最低温度多$20°$。

当样本空间S是有限或无穷可数时，每一个子集，都可以看作是一个事件，〔其证明是一个容易的习题，我们仅简单指出，如果S有n个元素，那么恰好有“2^n”个子集（事件〕，然而若S是无穷不可数的，那么便出现了理论上的困难。可以证明不是每一个可能的子集，都能看作为一事件，某些“不可采用的”集必须予以排除，它超过了这里陈述的程度。幸而这种不可采用的集合在应用中实际不会出现，所以在这里我们不必关心。由此可以假定。我们论及的事件总是我们允许考虑的那一类事件。

现在我们可以将已知的集（即事件）用各种方法加以处理以便得到我们早先引入的新集（即事件）。

(a) 如果A和B是事件，那么$A\cup B$是事件，当且仅当A或B（或两者）发生时它发生。

(b) 如果A和B是事件，那么$A\cap B$是事件，当且仅当A和B都发生时它发生。

(c) 如果A是事件，那么$\bar{A}$是事件，当且仅当A不发生时它发生。

(d) 如果$\{A_1,\cdots,A_n\}$是任意一个有限事件集，那么$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$是事件，当且仅当事件A_i中至少一个发生时它发生。

(e) 如果$\{A_1,\cdots,A_n\}$是任意一个有限事件集，那么$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$是事件，当且仅当全部事件A_i发生时它发生。

(f) 如果$\{A_1,\cdots,A_n,\cdots\}$是任意一个无穷可数事件集，那么$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$是事件，当且仅当事件$A_i$中至少一个发生时它发生。

(g) 如果$\{A_1,\cdots,A_n,\cdots\}$是任意一个无穷可数事件集，那么$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$是事件，当