高等学校教材
GAODENG XUEXIAO JIAOCAI

计算电磁学快速方法

JISUAN DIANCIXUE KUAISUFANGFA

童创明 编著

西北工業大學出版社

计算电磁学快速方法

童创明　编著

西北工业大学出版社

【内容提要】 随着计算机硬件和软件技术的飞速发展,计算电磁学已逐渐取代经典电磁学而成为现代电磁理论研究的主流。针对传统的计算电磁学方法在求解电磁场边值问题时所存在的内存需求与计算速度的瓶颈,本书系统介绍了目前计算电磁学加速技术的新进展及其基本原理。

全书共分7章。第1章介绍电磁场基本理论;第2章介绍电磁场基本边值问题;第3章介绍正交多项式外推技术;第4章介绍有理分式降阶模型插值与外推技术;第5章介绍混合域基函数加速技术;第6章介绍快速非均匀平面波算法;第7章介绍时域有限体积法。

本书可供高等学校相关专业研究生使用,也可供从事电磁场理论研究的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算电磁学快速方法/童创明编著.—西安:西北工业大学出版社,2010.6
ISBN 978-7-5612-2800-5

Ⅰ.①计… Ⅱ.①童… Ⅲ.①电磁计算 Ⅳ.①TM153

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第096035

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号 **邮编**:710072
电　　话:029-88493844 88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西天元印务有限责任公司
开　　本:787 mm×1 092 mm 1/16
印　　张:14.75
字　　数:359千字
版　　次:2010年6月第1版 2010年6月第1次印刷
定　　价:32.00元

前　　言

麦克斯韦在前人理论和实验的基础上建立了统一的电磁场理论，即经典电磁学理论——麦克斯韦方程组，从而所有的宏观电磁问题都可以归结为麦克斯韦方程组在各种边界条件下的求解问题。从整个电磁问题的求解过程来看，可以大致把求解的方法分为两个阶段，20 世纪 60 年代以前的解析或渐近计算方法和 60 年代以后的数值计算方法。以基于积分方程的矩量法和基于微分方程的差分类方法为代表的数值计算方法的运用标志着计算电磁学阶段的到来，当然这也得益于电子计算机的迅速发展，使大型数值计算成为可能。计算电磁学之所以能得以迅速发展并逐步取代经典电磁学，除了计算机硬件水平的提高这一基本条件外，它所能处理的问题范围及复杂程度远胜于经典电磁学是一个主要原因。

数值解法原则上适用于任何复杂的电磁场边值问题，且可得到所要求的精度。任何数值解法的主要特征都是将连续函数离散化，再解联立方程组得到数值解。传统的时、频域方法在求取时、频域响应时，是以一定的频率、时间间隔，逐点重复求解矩阵方程，当响应变化比较剧烈时，为了精确刻画，就必须减小步进间隔，这使得计算量显著增加，从而花费了大量的计算时间，特别是当响应变化迅速时，要求所取计算步进间隔更小，计算时间成倍增长。

本书主要是通过采用加速技术来突破传统电磁场数值计算方法在内存需求与计算速度的瓶颈。

第 1 章不加证明地介绍电磁场理论基础，为后续各章提供必要的理论知识，包括描述电磁问题的基本方程、定理、本构关系、边界条件、位函数、格林函数等。

第 2 章概括并推导了电磁场边值问题，包括导波问题、散射问题和辐射问题；介绍了电磁场边值问题的一般求解方法；从统一的观点，总结了数值方法的基本思想。

第 3 章首先介绍多项式逼近与插值的一般方法，然后介绍 Prony 外推技术，并介绍 Prony 方法与 Padé 逼近的关系，接着介绍正交多项式外推技术的基本原理，并给出了两种非常有用的基函数：Hermite，Laggere 正交多项式，最后介绍多项式外推技术在电磁宽带响应和（或）完全时域响应获取中的应用。

第 4 章首先介绍有理分式函数插值与逼近的一般方法，然后介绍连分式逼近、Padé 逼近、Cauchy 逼近等方法，最后介绍有理分式外推技术在电磁宽带响应获取问题中的应用。

第 5 章首先介绍用两种形状简单的基本形状类型对物体表面进行有效近似：一个是广义导线，主要用于导线近似，另一个是广义四边形，主要用于金属表面近似。然后介绍了求取广义导线及广义四边形上的电流分布，已知电流分布的广义导线及广义四边形所产生的电磁场。最后介绍了采用 Galerkin - MOM 对上述目标模型的电磁散射、辐射特性进行分析与计算。

第 6 章首先介绍了矩量法的关键技术，然后对二维导体目标散射的快速非均匀平面波算法展开了系统的研究，另外研究了基于体积分方程和基于体/表面积分方程的快速非均匀平面波算法，分别用于求解介质及金属介质复合结构的散射问题。在此基础上，将二维问题拓展到

三维，成功求解了任意三维目标的散射。文中详尽地阐述了多层快速非均匀平面波算法的基本原理和数值实现过程，并研究了快速远场近似多层快速非均匀平面波算法，进一步提高了求解效率。

第7章首先介绍了时域有限体积法的基本原理，然后给出了将时域有限体积法应用到电磁散射计算时平面波源的加入、振幅相位的提取和时域近-远场变换技术，讨论了金属涂覆目标时的散射问题，给出了反射系数的计算公式，并将时域有限体积法应用到电磁散射计算上。最后，研究了三维的非结构的时域有限体积法。该算法采用半离散方式，空间离散采用近似黎曼解，着重研究了非结构算法中的基于一阶泰勒展开的重构方法。以几种典型物体的雷达散射截面计算为例，分析、研究了非结构时域有限体积法在电磁散射中的应用，得出了很多有用的结论。

本书是在笔者给硕士研究生和博士研究生开设的“电磁场数值计算快速方法”课程以及在东南大学毫米波国家重点实验室做博士后研究期间的研究报告的基础上编写而成的。参加本书部分章节编写的还有白渭雄教授、张旭春副教授、张学礼讲师以及笔者指导的李西敏博士、付树洪博士、赵玉磊博士、吕丹博士、姬伟杰博士、钟卫军博士、耿方志博士、黄泽贵博士、闫沛文博士、王欣博士和项春望硕士、周明硕士等。

本书出版得到了军队“2110工程”电磁场微波技术学科专业领域建设基金、毫米波国家重点实验室开放课题基金(K200818，K200907)和陕西省自然科学计划基金(2005F23)的资助，同时得到了西北工业大学出版社的大力支持，在此一并表示衷心的感谢！

由于水平有限，书中难免还存在一些缺点和不足，敬请广大读者批评指正。

编著者

2009年12月

目　录

第1章 电磁场基本理论

本章不加证明地简要介绍电磁场的基本理论，为后续各章提供必要的理论支持，包括描述电磁问题的基本方程、定理、本构关系、边界条件、位函数、格林函数等。

1.1 电磁场数学模型

1.1.1 引言

在19世纪之前，电学和磁学是分别进行研究的；19世纪之后，人们才发现电和磁之间的内在联系。1819年丹麦物理学家H.C.奥斯特(1777—1851年)发表了《关于磁针上电流碰撞的实验》的论文，第一次揭示了电流可以产生磁场。1820年法国物理学家A.M.安培(1775—1836年)对这一物理现象做了进一步研究，并讨论了两平行导线有电流通过时的相互作用问题，提出了著名的安培定理，人们才开始认识到电和磁的关系。1831年英国物理学家M.法拉第(1791—1867年)首次报道了电磁感应现象，即通过移动磁体可在导线上感应出电流，他最先提出了电场和磁场的观点，认为电力和磁力两者都是通过场起作用的，使人们对电和磁的关系有了更为深刻的认识。奥斯特、安培和法拉第等人的工作为电磁学的建立奠定了实验基础。电磁学真正上升为一门理论则应归功于伟大的苏格兰物理学家J.C.麦克斯韦(1831—1879年)。麦克斯韦于1855年发表了《论法拉第的力线》的论文，建立了电、磁之间的数学关系，指出了电与磁不能孤立地存在。1862年，麦克斯韦又发表了《论物理学的力线》一文，创造性地提出了"位移电流"的假设。1865年麦克斯韦在总结静态场的高斯定理、恒定电流场的安培环路定律和时变场的法拉第电磁感应定律的基础上，写出了《电磁场的动力理论》，建立了系统的、反映电磁场时空变化规律的麦克斯韦方程组，即我们现在所熟知的麦克斯韦方程，并预言了电磁波的存在，从而奠定了经典电磁理论的基础。1887年德国物理学家H.R.赫兹(1857—1894年)用实验证明了电磁波的存在。后经意大利工程师M.G.马可尼(1874—1937年)进一步的实验研究，电磁波逐渐发展成一种应用范围最广的信息载体，是当今无线电通信的基础。

电磁理论经过100多年的发展已经根深叶茂。20世纪下半叶所发生的信息革命和材料革命又给人们提出了许多新的电磁学问题，使这一古老的学科仍然生机勃勃，充满活力，新的内容层出不穷，可以发展的方向不可胜数。

经典电磁场理论以麦克斯韦方程作为其基本内容。麦克斯韦方程是电磁理论这座宏伟大厦的根基，是我们研究一切宏观电磁现象的出发点。

1.1.2 麦克斯韦方程

众所周知，麦克斯韦是在总结已有的电磁学基本定律，如法拉第的电磁感应定律、安培定律、库仑定律的基础上，并加上麦克斯韦自己的位移电流的概念以补充安培定律，从而创立了

著名的麦克斯韦方程组,奠定了电磁场理论的基础。麦克斯韦方程描述了场源及其所产生的电磁场之间的关系。描述空间任意一点处场与源之间时空变化关系的微分形式的麦克斯韦方程组为

$$\nabla\times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.1a}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.1b}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.1c}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.1d}$$

式中,$\boldsymbol{J}$ 为电流密度,单位为“安[培]/ 米^2($\mathrm{A/m^2}$)”;$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$ 为磁流密度(等效);ρ 为电荷密度,单位为“库[仑]/ 米^3($\mathrm{C/m^3}$)”;ρ_{m} 为磁荷密度(等效);$\boldsymbol{H}$ 为磁场强度,单位为“安[培]/ 米^2($\mathrm{A/m^2}$)”;$\boldsymbol{E}$ 为电场强度,单位为“伏[特]/ 米($\mathrm{V/m}$)”;$\boldsymbol{B}$ 为磁通密度,单位为“韦[伯]/ 米^2($\mathrm{Wb/m^2}$)”;$\boldsymbol{D}$ 为电通密度,单位为“库[仑]/ 米^2($\mathrm{C/m^2}$)”;($\boldsymbol{r},t$) 为空间位置矢量和时间变量。

值得指出的是,到目前为止在自然界中尚未发现客观存在的磁流和磁荷。引入等效磁流和等效磁荷的目的在于,一方面使麦克斯韦方程组看起来具有对称性,另一方面使得在有些情况下简化问题的分析。

此外,在源之间满足如下连续性方程:

$$\nabla\cdot \boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{1.1.2a}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}+\frac{\partial\rho_{\mathrm{m}}}{\partial t}=0 \tag{1.1.2b}$$

事实上,对麦克斯韦方程组中的前两个方程两边作散度运算,然后代入后两个方程即可得电流连续性方程(1.1.2a) 和磁流连续性方程(1.1.2b),也就是说这两个方程是麦克斯韦方程组的导出方程而非独立的方程。

值得指出的是,我们应该特别注意麦克斯韦方程组的物理内容:

(1) 方程(1.1.1b) 的物理基础就是库仑定律,它是一个独立的实验定律。

(2) 方程(1.1.1a) 作为安培定律时是一个独立的物理定律,它描述了直流电流产生的磁场的规律。而一旦考虑了时变项,即加入了麦克斯韦的位移电流后,式(1.1.1a) 就不再是一个独立的规律,因为从这个方程,对于确定的外加源 $\boldsymbol{J}$,并不可能求出确定的电场或磁场来,只有把它和式(1.1.1b) 结合起来,才能完整地描述交流电流激励的电磁场的规律。

(3) 在麦克斯韦方程组中有两种不同性质的实际源 —— 电荷密度 ρ 和电流密度 $\boldsymbol{J}$。虽然这两种源之间服从连续性方程(1.1.2),但这并不说明这两种源之间有确定的因果关系。也就是说,对于确定的电荷分布,无法确定电流分布。这一点使式(1.1.2) 与式(1.1.1c) 有本质上的区别,虽然它们在形式上是相似的。式(1.1.1c) 是反映库仑定律的,所以电荷密度 ρ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 之间必定存在某种确定的因果关系,否则就不能称其为物理定律。因此式(1.1.2) 和式(1.1.1) 的性质是不同的,它只是对两种源所加的一种补助性的关系,一般称为补助方程。补助方程的使用更需要注意一定的条件。

与方程组(1.1.1) 相对应的积分方程形式的麦克斯韦方程组为

$$\oint_{\partial S}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+I(t) \tag{1.1.3a}$$

$$\oint_{\partial S}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}S-I_{\mathrm{m}}(t) \tag{1.1.3b}$$

$$\oiint_{\partial\Omega}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=q(t) \tag{1.1.3c}$$

$$\oiint_{\partial\Omega}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=q_{\mathrm{m}}(t) \tag{1.1.3d}$$

式中，S 为一空间曲面域，其边界为空间曲线 ∂S；Ω 为一体积域，其边界曲面为 $\partial\Omega$；$I(t)$，$I_{\mathrm{m}}(t)$ 分别为穿过曲面 S 的电流和磁流；$q(t)$，$q_{\mathrm{m}}(t)$ 分别为包含在体积域 Ω 内的电荷和磁荷，它们分别为

$$I(t)=\frac{\partial}{\partial t}\iint_S\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.1.4a}$$

$$I_{\mathrm{m}}(t)=\frac{\partial}{\partial t}\iint_S\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.1.4b}$$

$$q(t)=\iiint_\Omega\rho(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V \tag{1.1.4c}$$

$$q_{\mathrm{m}}(t)=\iiint_\Omega\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}V \tag{1.1.4d}$$

在实际中最常见的是正弦信号或时谐信号，这种信号随时间的变化可用时谐因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 描述（$\omega=2\pi f$ 为角频率）。事实上，对于非正弦信号，我们仍然可以将之用于傅里叶级数或傅里叶积分展开成不同频率时谐信号的叠加。对于时谐信号，所有的场量和源量关于时间的变化都可用时谐因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 来描述，这时麦克斯韦方程组(1.1.1)退化为下列频域形式：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.5a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.5b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\rho(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.5c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.5d}$$

其中，关于时间的导数已用 $\mathrm{j}\omega$ 代替，而且略去了公共因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$。值得指出的是，式(1.1.5)即为式(1.1.1)的傅里叶变换，所以电磁场的频域解即为时域解的傅里叶变换。在频域中，电流连续性方程(1.1.2)可表示为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\rho=0 \tag{1.1.6a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}+\mathrm{j}\omega\rho_{\mathrm{m}}=0 \tag{1.1.6b}$$

当 $\omega\to 0$，也就是说场不随时间变化时，式(1.1.5)所示的麦克斯韦方程组又可退化为两组独立的分别描述静电场和静磁场的方程。

静电场：
$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})&=\boldsymbol{0}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\rho(\boldsymbol{r})\end{aligned}\right\} \tag{1.1.7a}$$

静磁场：
$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})&=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}&=0\end{aligned}\right\} \tag{1.1.7b}$$

静电场和静磁场统称为静态场，在静态场中电场与磁场之间没有耦合。

如果将麦克斯韦方程组近似后既能反映出式(1.1.7a)的静电场的主要特征，又保持电场与磁场的耦合，就得到准静电场方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.8a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0} \tag{1.1.8b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\rho(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.8c}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=0 \tag{1.1.8d}$$

类似地，如果将麦克斯韦方程组近似后既能反映出式(1.1.7b)的静磁场的主要特征，又保持电场与磁场的耦合，就得到准静磁场方程

$$\nabla\times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.9a}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.9b}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=0 \tag{1.1.9c}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=0 \tag{1.1.9d}$$

准静电场和准静磁场统称为准静态场。当所描述的物理问题的定义域与工作波长相比小得多时，采用准静态场方程进行求解可以获得满意的结果。在准静态场中，电流连续性方程和广义欧姆定理仍然成立，即

$$\nabla\cdot \boldsymbol{J}=-\mathrm{j}\omega\rho \tag{1.1.10a}$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{1.1.10b}$$

式中，σ 是有耗媒质的电导率，单位是“西[门子]/ 米(S/m)”。

1.1.3 本构(Constitution)关系

考虑到电流和磁流连续性方程(1.1.2)，麦克斯韦方程组中只有前两个方程是独立的，如果将各场量和源量都写成分量形式，则这前两个方程可分解为 6 个标量方程，而场量 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 却有 12 个分量，也就是说未知量的个数大于方程个数。因此，这些场矢量之间以及电流密度 $\boldsymbol{J}$ 与这些场量之间并不是独立的，依据场所在媒质的电磁特性，它们之间存在一定的组合关系，这种关系称为场的本构关系，其一般表达式如下：

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}) \tag{1.1.11a}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}) \tag{1.1.11b}$$

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}) \tag{1.1.11c}$$

对于非线性媒质，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的非线性函数；对于一般的线性、非均匀、时变各向异性媒质，上述关系又可写成下面的形式：

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\bar{\bar{\boldsymbol{\xi}}}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.12a}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\bar{\boldsymbol{\zeta}}}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.12b}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.12c}$$

其中，顶标“=”表示并矢(张量)。下面将给出一些常用媒质的本构关系。

(1) 自由空间。

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.13a}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.13b}$$

其中，$\varepsilon_0=10^{-9}/(36\pi)$ F/m 和 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ H/m 分别为自由空间的介电常数和磁导率。

(2) 理想介质。

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.14a}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.14b}$$

其中，$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$，$\mu=\mu_r\mu_0$。$\varepsilon_r$ 和 μ_r 都是正实数，分别称为相对介电常数和相对磁导率。

(3) 简单有耗媒质。

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.15a}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.15b}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.15c}$$

或

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t),\quad \varepsilon=\varepsilon_0(\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon'') \tag{1.1.16a}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t),\quad \mu=\mu_0(\mu'-\mathrm{j}\mu'') \tag{1.1.16b}$$

其中，$\varepsilon'(\mu')$ 和 $\varepsilon''(\mu'')$ 都是实数，分别代表相对介电常数（相对磁导率）的无耗部分和有耗部分。

（4）电各向异性媒质（旋电媒质）。

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.17a}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.17b}$$

式中，$\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix}$。特别地，当 $\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & -\mathrm{j}\varepsilon_2 & 0\\ \mathrm{j}\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{bmatrix}$ 时所描述的媒质就是等离子体(Plasma)。

（5）磁各向异性媒质（选磁媒质）。

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.18a}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.1.18b}$$

式中，$\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}=\begin{bmatrix}\mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz}\\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz}\\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz}\end{bmatrix}$。特别地，当 $\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}=\begin{bmatrix}\mu_1 & -\mathrm{j}\mu_2 & 0\\ \mathrm{j}\mu_2 & \mu_1 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3\end{bmatrix}$ 时所描述的媒质就是铁氧体(Ferrite)。

（6）手征媒质(Chiral Medium)。

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=\varepsilon_c\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\mathrm{j}\mu\xi_c\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.19a}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\mathrm{j}\mu\xi_c\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.19b}$$

式中，ε 和 μ 的意义同前，$\varepsilon_c=\varepsilon+\mu\xi_c$，$\xi_c$ 称为媒质的手征导纳。

在自然界中手征媒质很少见，但可以采用在介质中掺入金属小螺旋等办法实现人工手征媒质。

1.1.4　边界条件

在实际中所面临的绝大部分电磁场问题都不是定义在无限自由空间内的简单问题，而是定义在复杂区域和复杂媒质上的电磁场边值问题、初值问题或边值 / 初值问题。这时，我们就需要知道电磁场量在各种边界，如理想 / 非理想导体表面、理想磁导体表面、两种介质分界面等上所满足的边界条件。

无论是静态场还是动态场，在理想导体表面切向电场和法向磁感应强度总是等于零，而切向磁场等于表面电流密度，即

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{0}\\ \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)&=0\\ \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}\right\} \tag{1.1.20}$$

而在理想磁导体表面

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{0}\\ \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)&=0\\ \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=-\boldsymbol{J}_{ms}(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}\right\} \tag{1.1.21}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 表示法向单位矢量，$\boldsymbol{J}_s$ 和 $\boldsymbol{J}_{ms}$ 分别为导体表面上的面电流密度和面磁流密度。理想导

体表面亦称作电壁，而理想磁导体表面亦称作磁壁。

在良导体(电导率 σ 很大)表面，有阻抗边界条件

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}=Z_s\hat{\boldsymbol{n}}\times(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H})\tag{1.1.22}$$

其中，表面阻抗

$$Z_s=R_s+\mathrm{j}X_s,\ R_s=X_s=\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}\tag{1.1.23}$$

对于静电场，在理想导体表面上的法向电位移等于表面电荷密度，即

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=D_n=\rho_s(\boldsymbol{r})\tag{1.1.24}$$

在两种媒质的分界面上，切向电磁场和法向电磁场分别满足如下连续性条件：

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times[\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r},t)]&=\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t)\\ \hat{\boldsymbol{n}}\times[\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r},t)]&=-\boldsymbol{J}_{ms}(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}\right\}\tag{1.1.25a}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot[\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{r},t)]&=\rho_s(\boldsymbol{r},t)\\ \hat{\boldsymbol{n}}\cdot[\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{r},t)]&=\rho_{ms}(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}\right\}\tag{1.1.25b}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 表示分界面上从媒质2指向媒质1的法向单位矢量，$\boldsymbol{J}_s$ 和 $\boldsymbol{J}_{ms}$ 分别为两种媒质分界面上的面电流密度和面磁流密度，而 ρ_s 和 ρ_{ms} 分别为分界面上的面电荷密度和面磁荷密度。

以上边界条件都是直接由麦克斯韦方程组导出的，因而是最基本的边界条件。具体问题的具体边界条件都可以由以上边界条件导出。比如，两种有耗电各向异性媒质分界面在准静电场情况下的连续性条件为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{n}}\times[\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})]=\boldsymbol{0}\\ &\hat{\boldsymbol{n}}\cdot[(\sigma_1\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}+\mathrm{j}\omega\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_1)\cdot\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r})-(\sigma_2\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}+\mathrm{j}\omega\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}})\cdot\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})]=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1.26}$$

其中，$\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}$ 表示单位并矢。第一个条件是明显的，而第二个条件用到了式(1.1.25b)中的第一个条件和下列关系式：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}_s)&=\boldsymbol{J}_{s1}(\boldsymbol{r}_{s1})-\boldsymbol{J}_{s2}(\boldsymbol{r}_{s2})\\ \boldsymbol{J}_{s1}(\boldsymbol{r}_{s1})&=\sigma_1\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}_{s1})\\ \boldsymbol{J}_{s2}(\boldsymbol{r}_{s2})&=\sigma_2\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}_{s2})\end{aligned}\right\}\tag{1.1.27}$$

式中，$\boldsymbol{r}_s$ 表示分界面上一点的位置矢量，而 $\boldsymbol{r}_{s1}$ 和 $\boldsymbol{r}_{s2}$ 表示分别从媒质1一侧和媒质2一侧趋近 $\boldsymbol{r}_s$ 的点的位置矢量。

在自由空间中，场量必须满足辐射条件和无穷远条件。设 $\psi(\boldsymbol{r})$ 表示无穷远处的电磁场的任一分量，则著名的索莫菲尔辐射条件为

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{r\to\infty}r\left[\frac{\partial}{\partial r}\psi(\boldsymbol{r})+\mathrm{j}k\psi(\boldsymbol{r})\right]=0\\ &\lim_{r\to\infty}r\psi(\boldsymbol{r})=\text{有限值}\end{aligned}\right\}\tag{1.1.28a}$$

电场：

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to\infty}r\left[\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{H}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\boldsymbol{E}\right]=\boldsymbol{0}\\ &\lim_{r\to\infty}r\boldsymbol{E}=\text{有限值}\end{aligned}\tag{1.1.28b}$$

磁场：

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{r\to\infty}r\left[\boldsymbol{H}-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{E}\right]=\boldsymbol{0}\\ &\lim_{r\to\infty}r\boldsymbol{H}=\text{有限值}\end{aligned}\right\}\tag{1.1.28c}$$

式(1.1.28)表明的辐射条件的物理意义是，在自由空间中，对任何实际的电磁系统，有限的源在距场源无穷远处的电磁场应为零，且电磁波为外向波，而理想的无损系统则被看成是实际系统的极限。式(1.1.28)要求，在离开场源很远的地方，场量的幅值随距离的变化至少按 $1/r$ 减小；当 $r\to\infty$ 时，对 $1/r$ 的数量级来说，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\hat{\boldsymbol{r}}$ 三者是相互垂直的。这和球心发出的 TEM 波向外传播的情况相同。因此，式(1.1.28)保证通过球面的波是从波源向无穷远发散的波，故称它们为无穷远条件。

1.1.5　波动方程

实际中我们常常遇到由已知源 $\boldsymbol{J}$ 和 ρ 分布，求解电磁场的问题。例如，辐射问题一般就是由天线表面的电流、电荷分布求得空间的场分布；在涉及场与运动电荷之间相互作用的问题中，必须将电磁场作为电荷和电流的函数。因此，推导出用场源 $\boldsymbol{J}$ 和 ρ 表示的电磁场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的方程是很有用的。该方程描述作为时间和空间坐标函数的电磁场 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 的运动规律以及与场源的依赖关系，这就是波动方程。下面由麦克斯韦方程组出发导出电磁场量的波动方程。

对于均匀各向同性的线性媒质，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，麦克斯韦方程组(1.1.1)可以简写成

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\tag{1.1.29a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\tag{1.1.29b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\varepsilon}\tag{1.1.29c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=0\tag{1.1.29d}$$

将式(1.1.29a)两端取旋度并利用式(1.1.29b)，或将式(1.1.29b)两端取旋度，并利用式(1.1.29a)，可得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\tag{1.1.30a}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)+\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\tag{1.1.30b}$$

式(1.1.30)即为均匀各向同性线性媒质中电磁场量的非齐次矢量波动方程。利用矢量微分恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ 并考虑到式(1.1.29c)与式(1.1.29d)，则式(1.1.30)可以改写为

$$\left(\nabla^2-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)+\nabla\left[\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\varepsilon}\right]\tag{1.1.31a}$$

$$\left(\nabla^2-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=-\nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\tag{1.1.31b}$$

式(1.1.31)表明，电磁场以波的形式运动变化，而电荷和电流是电磁场的源。

对于均匀各向同性线性媒质中的时谐场，非齐次矢量波动方程(1.1.31)可写成

$$(\nabla^2+k^2)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})+\nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)=\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{J})\tag{1.1.32a}$$

$$(\nabla^2+k^2)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=-\nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\tag{1.1.32b}$$

式中，$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$。方程(1.1.32)称为非齐次矢量亥姆霍兹方程。

在无源区域内，$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$，$\rho=0$，则波动方程简化为

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{1.1.33a}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)+\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{1.1.33b}$$

或

$$\left(\nabla^2-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{1.1.34a}$$

$$\left(\nabla^2-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{1.1.34b}$$

式(1.1.33)或式(1.1.34)即为均匀各向同性线性媒质中电磁场量的齐次矢量波动方程。它一般用来表征空间的电磁波传播特性以及导波系统中电磁波的传输特性。

对于无源区中的时谐场，波动方程(1.1.32)可写成

$$(\nabla^2+k^2)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0} \tag{1.1.35a}$$

$$(\nabla^2+k^2)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0} \tag{1.1.35b}$$

方程(1.1.35)称为齐次矢量亥姆霍兹方程。

1.1.6 位函数

麦克斯韦方程组从形式上可以看成是欧氏空间中的一组矢量偏微分方程组。经典的电磁场理论致力于在欧氏空间中求解麦克斯韦方程组，这首先就要把矢量偏微分方程组在欧式空间的坐标上进行投影，以便得到对于这些投影的分离的标量偏微分方程。但是遗憾的是，即使考虑了本构关系和电磁流的连续性方程，直接求解麦克斯韦方程组仍然是一个关于六个标量函数($\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$的六个分量)的一阶耦合偏微分方程组的求解问题。这样不论对于电场$\boldsymbol{E}$还是磁场$\boldsymbol{H}$都不可能得到它们在欧氏空间中投影的分离的标量偏微分方程组形式，因而无法对此进行精确的求解。那么，是否有什么办法可以减少未知量和方程的个数，从而简化问题的求解呢？为此，人们引入了位函数，并且还要假设一个洛仑兹规范，才能将麦克斯韦方程组变成分离的标量偏微分方程组。但是，洛仑兹规范既没有物理上的依据，在数学上也无法证明引入这一规范后的解就一定是原方程唯一的精确解，人们应用洛仑兹规范仅仅是因为在经典数学的范围内，只有依靠这一规范，麦克斯韦方程组才能求解。具有代表性的位函数有矢量电位、矢量磁位、标量电位、标量磁位、赫兹电矢量位和磁矢量位。下面将从统一的观点出发引入一般的位函数，上述各种位函数都可以看成是其特例。

对于线性媒质，麦克斯韦方程组是线性偏微分方程组，因此其解满足线性叠加性。为简明起见，假设媒质为服从本构关系式(1.1.14)的理想媒质。如果将激励源分成$\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t),\rho(\boldsymbol{r},t)\}$和$\{\boldsymbol{J}_m(\boldsymbol{r},t),\rho_m(\boldsymbol{r},t)\}$两组，并将它们所产生的场量分别用上角标“$e$”和“$h$”表示，则可将麦克斯韦方程组拆成下面两组：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{H}^e(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r},t)\\&\nabla\times\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r},t)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}^e(\boldsymbol{r},t)\\&\nabla\cdot\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t)/\varepsilon\\&\nabla\cdot\boldsymbol{H}^e(\boldsymbol{r},t)=0\end{aligned}\right\} \tag{1.1.36a}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\times \boldsymbol{H}^h(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^h(\boldsymbol{r},t)\\
&\nabla\times \boldsymbol{E}^h(\boldsymbol{r},t)=-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)-\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}^h(\boldsymbol{r},t)\\
&\nabla\cdot \boldsymbol{E}^h(\boldsymbol{r},t)=0\\
&\nabla\cdot \boldsymbol{H}^h(\boldsymbol{r},t)=\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)/\mu
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.36b}$$

根据线性叠加性知：由所有的源产生的总场等于上述两组麦克斯韦方程组解的叠加，即

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}^h(\boldsymbol{r},t)\\
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{H}^e(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{H}^h(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.37}$$

令

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{H}^e(\boldsymbol{r},t)=\xi^e\,\nabla\times \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t)\\
\boldsymbol{E}^h(\boldsymbol{r},t)=-\xi^h\,\nabla\times \boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.38}$$

其中 $\xi^{e,h}$ 为常数，$\boldsymbol{F}^{e,h}(\boldsymbol{r},t)$ 为矢量位函数。将之分别代入式(1.1.36a) 和式(1.1.36b) 并考虑到电磁流连续性方程(1.1.2)，得

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t)=-\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)/\xi^e\\
&\nabla^2\varphi^e(\boldsymbol{r},t)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^e(\boldsymbol{r},t)=-\rho(\boldsymbol{r},t)/\varepsilon\\
&\boldsymbol{H}^e(\boldsymbol{r},t)=\xi^e\,\nabla\times \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t)\\
&\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r},t)=-\nabla\varphi^e(\boldsymbol{r},t)-\mu\xi^e\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t)\\
&\nabla\cdot \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t)=-(\varepsilon/\xi^e)\frac{\partial}{\partial t}\varphi^e(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.39a}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r},t)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r},t)=-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)/\xi^h\\
&\nabla^2\varphi^h(\boldsymbol{r},t)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^h(\boldsymbol{r},t)=-\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)/\mu\\
&\boldsymbol{E}^h(\boldsymbol{r},t)=-\xi^h\,\nabla\times \boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r},t)\\
&\boldsymbol{H}^h(\boldsymbol{r},t)=-\nabla\varphi^h(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon\xi^h\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r},t)\\
&\nabla\cdot \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t)=-(\mu/\xi^h)\frac{\partial}{\partial t}\varphi^h(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.39b}$$

式(1.1.39) 每组方程中，前两式分别为矢量位函数和标量位函数所满足的非齐次波动方程，也称作达朗贝尔方程；中间两式为电磁场量与位函数之间的关系式；最后一式就是所谓的洛仑兹规范。该规范是在导出位函数所满足的波动方程时自然引入的，它们同时也保证了上述方程的完备性。在上面两组方程的导出过程中，用到了恒等式$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{F}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{F}-\nabla^2\boldsymbol{F}$，这里 $\boldsymbol{F}$ 为任意二阶可微矢量函数。

由线性叠加性知，总场量

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}^h(\boldsymbol{r},t)=\\
-\xi^h\,\nabla\times \boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r},t)-\nabla\varphi^e(\boldsymbol{r},t)-\mu\xi^e\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t)=
\end{aligned}$$

$$-\xi^h\ \nabla\times \boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r},t)+\frac{\xi^e}{\varepsilon}\nabla\nabla\cdot\int \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}t-\mu\xi^e\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t) \qquad (1.1.40\text{a})$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{H}^e(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{H}^h(\boldsymbol{r},t)=\\ &\xi^e\ \nabla\times \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t)-\nabla\varphi^h(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon\xi^e\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r},t)=\\ &\xi^e\ \nabla\times \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t)+\frac{\xi^h}{\mu}\nabla\nabla\cdot\int \boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}t-\varepsilon\xi^h\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \qquad (1.1.40\text{b})$$

用 $\mathrm{j}\omega$ 和 $1/(\mathrm{j}\omega)$ 分别代替关于时间的微分和积分算子 $\partial/\partial t,\int\mathrm{d}t$，即可得频域中的方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})&=\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{E}^h(\boldsymbol{r})=\\ &-\xi^h\ \nabla\times \boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r})-\nabla\varphi^e(\boldsymbol{r})-\mathrm{j}\omega\mu\xi^e\boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r})=\\ &-\xi^h\ \nabla\times \boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r})+\frac{\xi^e}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla\nabla\cdot \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r})-\mathrm{j}\omega\mu\xi^e\boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r})\end{aligned} \qquad (1.1.41\text{a})$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})&=\boldsymbol{H}^e(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{H}^h=\\ &\xi^e\ \nabla\times \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r})-\nabla\varphi^h(\boldsymbol{r})-\mathrm{j}\omega\varepsilon\xi^h\boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r})=\\ &\xi^e\ \nabla\times \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r})+\frac{\xi^h}{\mathrm{j}\omega\mu}\nabla\nabla\cdot \boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r})-\mathrm{j}\omega\varepsilon\xi^h\boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r})\end{aligned} \qquad (1.1.41\text{b})$$

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r})+k^2\boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})/\xi^e\\ &\nabla^2\varphi^e(\boldsymbol{r})+k^2\varphi^e(\boldsymbol{r})=-\rho(\boldsymbol{r})/\varepsilon\\ &\boldsymbol{H}^e(\boldsymbol{r})=\xi^e\ \nabla\times \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r})\\ &\boldsymbol{E}^e(\boldsymbol{r})=-\nabla\varphi^e(\boldsymbol{r})-\mathrm{j}\omega\mu\xi^e(\boldsymbol{r})\boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r})\\ &\nabla\cdot \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\varepsilon\varphi^e(\boldsymbol{r})/\xi^e\end{aligned}\right\} \qquad (1.1.42\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r})+k^2\boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})/\xi^h\\ &\nabla^2\varphi^h(\boldsymbol{r})+k^2\varphi^h(\boldsymbol{r})=-\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})/\mu\\ &\boldsymbol{E}^h(\boldsymbol{r})=-\xi^h\ \nabla\times \boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r})\\ &\boldsymbol{H}^h(\boldsymbol{r})=-\nabla\varphi^h(\boldsymbol{r})-\mathrm{j}\omega\varepsilon\xi^h(\boldsymbol{r})\boldsymbol{F}^h(\boldsymbol{r},t)\\ &\nabla\cdot \boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\varepsilon\varphi^h(\boldsymbol{r})/\xi^h\end{aligned}\right\} \qquad (1.1.42\text{b})$$

式中，$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=2\pi/\lambda$ 称作波数，λ 为波长。上述两组方程中的前两式称作非齐次的亥姆霍兹方程，在无源区退化为齐次亥姆霍兹方程。

若令 $\xi^e=\mathrm{j}\omega\varepsilon$，$\xi^h=\mathrm{j}\omega\mu$，则 $\boldsymbol{F}^e$ 和 $\boldsymbol{F}^h$ 就分别表示赫兹电矢量位函数 $\boldsymbol{\Pi}^e$ 和磁矢量位函数 $\boldsymbol{\Pi}^h$，而 φ^e 和 φ^h 分别为赫兹电标量位函数和磁标量位函数；若令 $\xi^e=\xi^h=1$，则 $\boldsymbol{F}^e$ 和 $\boldsymbol{F}^h$ 就分别表示磁矢量位函数 $\boldsymbol{A}$ 和电矢量位函数 $\boldsymbol{A}^*$，而 φ^e 和 φ^h 分别为磁标量位函数 φ 和电标量位函数 φ^*。$\xi^{e,h}$ 的取值具有一定的任意性，也就是说在实际解决问题时到底采用哪种位函数具有一定的任意性。事实上，当解决一个问题时，只要 $\xi^{e,h}$ 的取值自始自终保持不变，就可以获得正确的解。

在充满理想媒质的无界空间中，矢量位函数和标量位函数的解可以表示为如下非常简明的形式：

$$\boldsymbol{F}^e(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\xi^e}\iiint_{\Omega}\frac{\boldsymbol{J}(t-v^{-1}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \qquad (1.1.43\text{a})$$