概率统计与随机过程

习题解集

◎ 邢家省 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

概率统计与随机过程习题解集

邢家省　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是《概率统计与随机过程》的习题解集，适用于理工科大学学生的学习．本书对概率统计与随机过程中的常规性练习题目给出了解答，题型多样，覆盖面较全．通过练习和对照使用，有助于学生巩固已学的知识和理论，掌握解决基本问题的方法和手段，提高解决问题的能力，以期能熟练灵活地解决更多的问题，取到较好的效果．

本书既可作为理工科大学生学习概率统计的自我训练和检测的辅导教材，也可作为考研、考博复习的参考书，亦可作为教师的教学参考书．

图书在版编目（CIP）数据

概率统计与随机过程习题解集/邢家省编著．—北京：机械工业出版社，2010.4

ISBN 978-7-111-30197-4

Ⅰ．①概…　Ⅱ．①邢…　Ⅲ．①概率论—解题②数理统计—解题③随机过程—解题　Ⅳ．①O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 050464 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码 100037）
策划编辑：张金奎　责任编辑：张金奎　孙志强
版式设计：张世琴　责任校对：姜　婷
封面设计：张　静　责任印制：乔　宇
三河市国英印务有限公司印刷
2010年6月第1版第1次印刷
169mm×239mm・15印张・287千字
标准书号：ISBN 978-7-111-30197-4
定价：23.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务　网络服务
社服务中心：（010）88361066　门户网：http://www.cmpbook.com
销 售 一 部：（010）68326294　教材网：http://www.cmpedu.com
销 售 二 部：（010）88379649
读者服务部：（010）68993821　**封面无防伪标均为盗版**

前　　言

《概率统计与随机过程》是理工科大学的一门重要的公共基础课，是理工科大学生必备的知识体系.掌握这门课程的研究对象和理论、方法、知识等，对于相关专业课程的学习和开展科学研究，都是必要的.

《概率统计与随机过程》是以自然界和社会中的不确定现象和各种随机现象为研究对象，提出了对问题的阐述，产生了研究解决问题的思想方法、理论、工具和手段，得到了大量的结果.这门课程与其他数学课程有很大的不同.学习概率统计课程，需要有对以往数学知识的扎实基础和灵活运用，需要思考解决应用问题的灵活思维能力.

《概率统计与随机过程》几乎是理工科大学生的最后一门数学课程，出现了许多新问题、新理论、新方法，理论深度和知识增进梯度大，应用范围广阔.多数初学者在学习过程中往往会遇到一定的疑难，不仅难以解题，而且解错了题难以发现.本书专为帮助读者学好概率统计与随机过程知识而编写.对常规性练习题目给出了解答，题型多样，覆盖面较全，给出了类型与数量众多的典型习题的解析，对其中一些典型习题给出了较新颖的解法.学习数学知识最有效的方法就是上课听好老师讲解和课后自学复习及做习题进行练习.读者可通过反复多次的训练和对照使用，熟能生巧，实践出真知.这样有助于理解概念和理论方法，掌握解决基本问题的方法和手段，提高解决问题的能力，以期能熟练灵活地解决更多的问题，取得较好的效果.

本书在编写过程中参考引用了国内外众多图书中的许多资料和习题的解答，无法一一列举，在此一并致谢.概率统计的题目浩如烟海，已积累了丰富的知识体系，并不断更新，但核心的问题是不变的.由于编者经验和水平所限，书中难免有欠妥和不足之处，敬请读者不吝指正.

编者
于北京航空航天大学
数学与系统科学学院

目　　录

第一章　随机事件的概率

第一节　随机事件的关系及运算

例 1　试将事件 $A+B+C$ 表示为互不相容的事件之和.

解　利用公式 $A-B=A-AB=A\overline{B}$(这个公式利用率较高),

$$A+B=A+(B-A)=A+(B-AB)=A+B\overline{A},$$

或
$$A+B=(A-AB)+AB+(B-AB),$$

于是
$$\begin{aligned}A+B+C&=A+(B+C)=A+(B+C)\overline{A}\\&=A+(B+C\overline{B})\overline{A}=A+B\overline{A}+C\overline{B}\,\overline{A}\\&=A+(B-AB)+[C-(A+B)C].\end{aligned}$$

(还有其他分解表示法,分解方式不唯一)

例 2　互不相容(互斥)与互相对立(互逆)有何联系和区别?

解　事件 A 与 B 互不相容表示事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\phi$;

事件 A 与 B 互逆表示 $AB=\phi$ 且 $A+B=S$.

注:(1)事件 A 与 B 互逆$\Rightarrow$事件 A 与 B 互斥,反之不真.

(2)互不相容的概念适用于多个事件,但对立的概念只适用于两个事件.

(3)两个事件互不相容是指这两个事件不能同时发生,即任一基本事件在这两个事件中至多只能发生一个,但可以有都不发生的基本事件;而两事件对立则表示对任一基本事件在这两个事件中有且仅有一个发生.

例 3　设 A,B 为任意两事件,则下列关系成立的有(　)

(A)$(A+B)-B=A$　　　　(B)$(A+B)-B\subset A$

(C)$(A-B)+B=A$　　　　(D)$(A-B)+B=A+B$

解　因为$(A+B)-B=(A+B)\overline{B}=A\overline{B}\subset A$,故(B)成立, 又因为 $A+B=(A-B)+B$,故(D)成立. 由上述推理可知(A),(C)均不成立. 于是(B),(D)入选.

例 4　若事件 A,B,C 满足 $A+C=B+C$,问 $A=B$ 是否成立?

答　不一定成立. 例如 $A=\{1,2\}$,$B=\{5,6\}$,$C=\{1,2,3,4,5,6\}$,则有 $A+C=B+C=\{1,2,3,4,5,6\}$,但显然 $A\neq B$.

例 5　设 A,B,C 为三个事件,试用 A,B,C 表示下列各事件.

(1)A,B,C 中恰好 A 发生;　　(2)A,B,C 恰有一个发生;

(3)A,B,C 恰有两个发生;　　(4)A,B,C 至少有一个发生;

(5)A,B,C 至少有两个发生；　　(6)A,B,C 不多于一个发生；

(7)A,B,C 不多于两个发生；　　(8)A,B,C 同时发生；

(9)A,B,C 都不发生.

解　(1)$A\bar{B}\bar{C}$. (2)$A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$. (3)$AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$. (4)$A+B+C$.

(5)$AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC=AB+AC+BC$.

(6)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C=\bar{A}\bar{B}+\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{C}$或$\overline{AB+AC+BC}$.

(7)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$ 或$\overline{ABC}=\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$.

(8)ABC. (9)$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

例 6　盒中装有 10 只晶体管. 令事件 $A_i=10$ 只晶体管中恰有 i 只次品，$B=10$ 只晶体管中不多于 3 只次品，$C=10$ 只晶体管中次品不少于 4 只. 问事件 $A_i(i=0,1,2,3)$，B 和 C 之间哪些有包含关系？哪些互不相容？哪些互逆？

解　根据题意知 $B=A_0+A_1+A_2+A_3=\sum\limits_{i=0}^{3}A_i$，$C=\sum\limits_{i=4}^{10}A_i$，于是 $A_i\subset B(i=0,1,2,3)$；A_0,A_1,A_2,A_3,C 两两互不相容；B 与 C 互不相容；B 与 C 互逆.

第二节　古典概率的计算

例 1　将 3 本概率书(上、中、下三册)和 7 本其他书任意摆放在书架的同一层.

求：(1)3 本概率书摆放在一起的概率；

(2)恰有 2 本概率书摆放在一起的概率；

(3)3 本概率书按上、中、下次序摆放在一起的概率.

解　设 $A=3$ 本概率书摆放在一起，$B=$ 恰有 2 本概率书摆放在一起，$C=3$ 本概率书按上、中、下次序摆放在一起，则有

(1)$P(A)=\dfrac{A_8^8A_3^3}{A_{10}^{10}}=\dfrac{8!\times3!}{10!}=\dfrac{1}{15}$(3 本概率书放在一起作为 1 本和其他 7 本进行任意摆放).

(2)$P(B)=\dfrac{A_7^7C_3^2A_8^2A_2^2}{A_{10}^{10}}=\dfrac{7!\times3!\times8\times7}{10!}=\dfrac{7}{15}$(先摆放其他 7 本书，把 3 本书分成两部分，放在 8 个位置的任两个位置).

(3)$P(C)=\dfrac{A_7^7A_8^1\times2}{A_{10}^{10}}=\dfrac{7!\times8\times2}{10!}=\dfrac{1}{45}$(先摆放其他 7 本书，把 3 本概率书放在一起按上、中、下或下、中、上放在 8 个位置中的任一个位置).

例 2　(1)某校一年级新生共 1000 人，设每人的生日是一年中的任何一天的可能性相同，问至少有一人的生日是元旦这一天的概率是多少？(一年以 365 天计)

(2)某小组学生有5人是同一年出生的,设每人在一年中任何一个月出生是等可能的,求此5人的出生月份各不相同的概率.

解　(1)设A=至少有一人的生日是元旦这一天,则$\overline{A}$=没有一人的生日是元旦这一天,则$P(\overline{A})=\frac{364^{1000}}{365^{1000}}$,于是$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{364^{1000}}{365^{1000}}$.

(2)设B=此5人的出生月份各不相同,则$P(B)=\frac{A_{12}^{5}}{12^{5}}$.

例3　将n个不同编号的球随机放入$N(N\geqslant n)$个盒子中,每个球都以相同的概率被放入每个盒子中,每盒容纳球数不限,求下列事件的概率.

(1)A=某指定的n个盒子中各有一个球;

(2)B=恰有n个盒子中各有一个球=每盒最多一个球;

(3)C=某指定的盒中有$m(m\leqslant n)$个球;

(4)D=至少有两个球在同一盒中.

解　每一个球可以放入N个盒子中的任一个盒子中,共有N种不同放法,故n个球放入N个盒子中应有N^n种不同的方法,所以基本事件的总数为N^n.

(1)事件A所含基本事件的个数为$n!$,故$P(A)=\frac{n!}{N^n}$.

(2)从N个盒子中取出n个的组合数为C_N^n,再由(1),得$P(B)=C_N^n\frac{n!}{N^n}$.

(3)从n个球中取m个放入某指定的盒中有C_n^m种可能,而其余$n-m$个球可随机放入$N-1$个盒中,共有$(N-1)^{n-m}$种不同放法,因而事件C包含的基本事件数为$C_n^m(N-1)^{n-m}$,故$P(C)=C_n^m\frac{(N-1)^{n-m}}{N^n}$.

(4)因为D与B互逆,故$P(D)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-C_N^n\frac{n!}{N^n}$.

注:对E=有一盒中有$m(m\leqslant n)$个球,这时盒子有N种选法,故事件E包含的基本事件数为$C_N^1C_n^m(N-1)^{n-m}$,故$P(E)=C_N^1C_n^m\frac{(N-1)^{n-m}}{N^n}$,但是这样得出的结果是错误的,因为第一盒有$m$个球时,第二盒也可以有$m$个球;第二盒有$m$个球时,第一盒也可以有$m$个球,所以第一盒有$m$个球与第二盒有$m$个球是相容的,基本事件有重复的.假若这个结果是正确的,我们可给出如下反例:对$n=N=2$,$m=1$,此时$P(E)=C_2^1C_2^1\frac{(2-1)^{2-1}}{2^2}=1$,这显然矛盾.

例4　把n个不同的小球随机地投入$N(N\geqslant n)$个盒子中,假定每个盒子最多只容纳一个小球,试求下列事件的概率.

(1)A = 指定某盒是空； (2)B = 指定的 n 个盒子各有一小球.

解 由题设知，小球互异，且每个盒子最多只容纳一个小球，故属元素的不重复排列问题. 其基本事件的总数为

$$A_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1),$$

(1)事件 A 所含基本事件个数为 $A_{N-1}^n = (N-1)(N-2)\cdots(N-n)$，故

$$P(A) = \frac{A_{N-1}^n}{A_N^n} = \frac{(N-1)\cdots(N-n+1)(N-n)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} = \frac{N-n}{N}.$$

(2)事件 B 包含的基本事件个数为 $A_n^n = n!$，故

$$P(A) = \frac{A_n^n}{A_N^n} = \frac{n!}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} = \frac{n!(N-n)!}{N!}.$$

例 5 设有 n 个球，每个球都能以同样的概率$\frac{1}{N}$落到 N 个格子($N\geqslant n$)的每一个格子中，试求：(1)某指定的格子中各有一个球的概率；(2)恰有 n 个格子中各有一个球的概率.

解 设 A = 某指定的格子中各有一个球，B = 恰有 n 个格子中各有一个球，根据题意得

$$(1)P(A) = \frac{n!}{N^n}. \quad (2)P(B) = \frac{C_N^n n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

例 6 设袋中有 10 个相同的球，上面依次编号为 1,2,…,10，每次从袋中任取一球，取后不放回，求第 5 次取到 1 号球的概率.

解 设 A = 第 5 次取球时摸到 1 号球，则

方法 1
$$P(A) = \frac{A_9^4 A_1^1}{A_{10}^5} = \frac{1}{10}.$$

方法 2 把试验一直进行到取完为止，则第 5 次取到 1 号球的概率为

$$P(A) = \frac{A_9^4 A_1^1 A_5^5}{A_{10}^{10}} = \frac{1}{10}.$$

例 7 设一袋中有 n 个白球与 m 个黑球，现在从中无放回地连续抽取 N 个球，求第 i 次取时得到黑球的概率($1\leqslant i\leqslant N\leqslant n+m$).

解 设 A_i = 第 i 次取时得到黑球，显然

$$P(A_1) = \frac{m}{n+m},$$

$$P(A_i) = \frac{A_{n+m-1}^{N-1} A_m^1}{A_{n+m}^N} = \frac{m}{n+m} \quad (1 \leqslant i \leqslant N \leqslant n+m).$$

本题表明，摸得黑球的概率与摸球的先后次序无关. 这个结论与我们日常的生

活经验是一致的.

例 8　一盒装有 3 个红球,12 个白球,从中不放回取 10 次,每次取一个球,求第 5 次取到的是红球的概率.

解　设 A_5 = 第 5 次取时得黑球, 则 $P(A_5)=\dfrac{3}{3+12}=\dfrac{1}{5}$.

例 9　10 个标签中有 4 个难签,3 人参加抽签考试,不重复地抽取,每人一次,甲先、乙次、丙最后,证明 3 人抽到难签的概率相等.

解　设 A_i = 第 i 人抽到难签$(i=1,2,3)$,则 $P(A_i)=\dfrac{A_4^1A_9^2}{A_{10}^3}=\dfrac{4}{10}\quad(i=1,2,3)$.

例 10　袋中装有 2 个伍分、3 个贰分、5 个壹分的硬币,任取其中 5 个,求:(1)总值超过壹角的概率;(2)总值不少于壹角的概率;(3)总值等于壹角的概率.

解　设 A = 总值超过壹角;B = 总值不少于壹角;C = 总值等于壹角,则

(1)$P(A)=\dfrac{C_2^2C_8^3+C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2}{C_{10}^5}=\dfrac{126}{9\times7\times4}=\dfrac{1}{2}$.

(2)$P(B)=\dfrac{C_2^2C_8^3+C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2+C_2^1C_3^1C_5^3}{C_{10}^5}=\dfrac{186}{9\times7\times4}=\dfrac{31}{42}$.

(3)$P(C)=\dfrac{C_2^1C_3^1C_5^3}{C_{10}^5}=\dfrac{60}{9\times7\times4}=\dfrac{5}{21}$.

例 11　从 0 ~9 这 10 个数码中任意取出 4 个排成一串数码,求:(1)所取 4 个数码排成四位偶数的概率;(2)所取 4 个数码排成四位奇数的概率; (3)没有排成四位数的概率.

解　(1)设 A = 排成四位偶数,(末尾是 2,4,6,8 之一,或末尾是 0),则

$$P(A)=\frac{C_8^1A_8^2C_4^1+A_9^3C_1^1}{A_{10}^4}=\frac{41}{90}.$$

(2)设 B = 排成四位奇数,则 $P(B)=\dfrac{C_8^1A_8^2C_5^1}{A_{10}^4}=\dfrac{40}{90}$.

(3)设 C = 没有排成四位数,则 $P(C)=\dfrac{A_1^1A_9^3}{A_{10}^4}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$.

例 12　民航机场的一辆送客汽车载有 5 位旅客,设每位旅客在途中 8 个站的任何一站下车的可能性相同. 试求:(1)至少两位旅客在同一站下车的概率;(2)某站(指定的一站)恰有两位旅客下车的概率; (3)仅有一站恰有两位旅客下车的概率.

解　(1)A = 至少两位旅客在同一站下车,$\overline{A}$ = 每站最多有一位旅客下车,

$$P(\overline{A})=\frac{A_8^5}{8^5},P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{A_8^5}{8^5}=1-\frac{105}{8^3}\approx 0.7949.$$

(2)设 B = 某站(指定的一站)恰有两位旅客下车,则 $P(B)=\dfrac{C_5^2\times 7^3}{8^5}\approx 0.1047.$

(3)设 C = 仅有一站恰有两位旅客下车,则 $P(B)=\dfrac{C_8^1C_5^2A_7^3+C_8^1C_5^2A_7^1}{8^5}\approx 0.5298$
(8 站中有一站有两人下车,其他三人在其他 7 站中各下一站或三人同一站下).

例 13 将 4 只有区别的球随机放入编号为 1 ~ 5 的五个盒中(每盒容纳球的数量不限). 求:(1)至多两个盒子有球的概率; (2)空盒不多于两个的概率.

解 方法一 设 A = 至多两个盒子有球, B = 空盒不多于两个,A_i = 恰有 i 个空盒($i=1,2,3,4$),则 $B=A_1+A_2$,且 A_1,A_2 互不相容,则 $P(A_1)=\dfrac{C_5^1\cdot 4!}{5^4},P(A_2)=\dfrac{C_5^2\cdot C_4^2 3!}{5^4},P(B)=P(A_1)+P(A_2)=\dfrac{96}{125}=0.768,\overline{B}$ = "空盒多于两个" = "至少有三个空盒" = "至多两个盒子有球" $=A,P(A)=P(\overline{B})=1-P(B)=0.232.$

方法二 设 A = 至多两个盒子有球,B = 空盒不多于 2 个,B_i = 恰有 i 个盒子有球($i=1,2,3,4$),则 $A=B_1+B_2$,且 B_1,B_2 互不相容, 则 $B=\overline{A},P(B_1)=\dfrac{C_5^1}{5^4},P(B_2)=\dfrac{C_4^1C_3^3A_5^2+C_4^2\frac{1}{2}A_5^2}{5^4}$(把 4 个球分成两组,一种是 1 个和 3 个,另一种是从 4 个球中取出 2 个球在一起和余下 2 个球自然在一起,考虑到对称性,不分组顺序),所以

$$P(A)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{29}{125}=0.232,P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=0.768.$$

例 14 在一副(不含大小王)52 张的扑克牌中,随机抽取 2 张,求恰取到 2 张不同花且最大点数为 7 的扑克牌的概率.

解 设 A = 恰取到 2 张不同花且最大点数为 7 的扑克牌,

方法一 $P(A)=\dfrac{C_4^2(C_2^1C_6^1+C_2^2)}{C_{52}^2}=\dfrac{6\times 13}{\frac{52\times 51}{2}}=\dfrac{1}{17}$(先取两色,只一个 7 或两个 7).

方法二 $P(A)=\dfrac{C_4^1C_{18}^1+C_4^2}{C_{52}^2}=\dfrac{72+6}{\frac{52\times 51}{2}}=\dfrac{1}{17}$(取出一张花色的 7,然后从其他三种花色的 1 ~ 6 中任取一张,或直接取出两个花色的 7).

方法三　$P(A)=\dfrac{C_4^2(7^2-6^2)}{C_{52}^2}=\dfrac{6\times13}{\dfrac{52\times51}{2}}=\dfrac{1}{17}$(先取两色,从每色的 1 ~7 取出一张,去掉不含 7 的).

如果 $P(A)=\dfrac{C_4^1C_{21}^1}{C_{52}^2}=\dfrac{4\times21}{\dfrac{52\times51}{2}}=\dfrac{28}{26}\times\dfrac{1}{17}$,则错了,这种想法是从 4 色中取出一个 7,然后从其他三色的 1 ~7 中取出一个.这样计算会有重复的,如先取出红桃 7,再取出方块 7 与先取出方块 7,再取出红桃 7,是一样的.

方法四　$P(A)=\dfrac{C_4^1C_{21}^1-C_4^2}{C_{52}^2}=\dfrac{84-6}{\dfrac{52\times51}{2}}=\dfrac{78}{26\times51}=\dfrac{1}{17}$.

例 15　从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,求下列事件的概率:(1)没有成对的鞋子;(2)至少 2 只配成一双.

解　设 A = 没有成对的鞋子,B = 至少 2 只配成一双,则 $B=\overline{A}$.

方法一　$P(A)=\dfrac{C_5^4(C_2^1)^4}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$(从 5 双中任取 4 双,再从每双中任取 1 只),则

$$P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

方法二　$P(A)=\dfrac{C_{10}^1C_8^1C_6^1C_4^1}{A_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$(第一次从 10 只中任取 1 只,第二次从其他 4 双中任取 1 只,第三次从其他 3 双中任取 1 只,第四次从其他 2 双中任取 1 只).

方法三　$P(B)=\dfrac{C_5^1C_4^2(C_2^1)^2+C_5^2}{C_{10}^4}=\dfrac{13}{21}$(恰有两只成一双另两只来自不同双,或恰成两双).

方法四　$P(B)=\dfrac{C_5^1\left(C_8^1C_6^1\cdot\dfrac{1}{2}\right)+C_5^2}{C_{10}^4}=\dfrac{13}{21}$.

方法五　$P(B)=\dfrac{C_5^1C_8^2-C_5^2}{C_{10}^4}=\dfrac{13}{21}$(从 5 双中任取 1 双,然后从其他 4 双鞋中任取两只,其中成 2 双鞋的次数计了两次,去掉).

例 16　有 $n(n\geqslant3)$个人排队,(1)排成一行,其中甲、乙两人相邻的概率是多少?(2)排成一圈,甲、乙两人相邻的概率是多少?

解　(1)设 $A=n$ 个人排成一行,其中甲、乙两人相邻,n 个人的全排列有 $n!$

种，甲、乙两人相邻可以设想甲、乙占一个位置参加排列，则有$(n-1)!$种，但甲、乙相邻位置可以互换，故事件A包含基本事件数为$2(n-1)!$种，于是$P(A)=\frac{2(n-1)!}{n!}=\frac{2}{n}$.

(2)设$B=n$个人排成一圈，甲、乙两人相邻，排成一圈是环排列，n个人的环排列有$(n-1)!$种，甲、乙相邻占一个位置与其他$(n-2)$个人的环排列有$(n-2)!$种，考虑甲、乙相邻位置可以互换，故事件A包含基本事件数为$2(n-2)!$种，故$P(B)=\frac{2(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{2}{n-1}$.

更为简单的想法是：设想一个圆周上有n个位置，甲占了一个位置后，乙还有$(n-1)$个位置可选，其中乙与甲相邻位置有两个，所以$P(B)=\frac{2}{n-1}$，或设想一个圆周上有n个位置(从某处开始按顺时针方向)，则$P(B)=\frac{2n(n-2)!}{n!}=\frac{2}{n-1}$.

例17 k个朋友随机地围绕圆桌而坐，求甲、乙两人坐在一起(座位相邻)的概率.

解 基本事件总数为k个朋友随机地围绕圆桌而坐的所有可能的坐法，共有$k!$种坐法，故$n=k!$. 设$B=$甲、乙两人坐在一起，事件B可分两步完成，先把甲、乙两人坐在一起，有$2!$种坐法，对于每一种坐法，其余$k-2$个人随机围绕圆桌而坐，共有$(k-2)!$种坐法，由乘法原理，完成事件B的方法数即B包含的基本事件数$m=2!\ (k-2)!$，故所求之概率为

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{2!(k-2)!}{k!}=\frac{2}{k(k-1)}.$$

此题同上一题的(2)，但两者结果不同，谁对谁错？

举个例子，对$k=3$，显然B是必然事件，$P(B)=1$；而按此公式$P(B)=\frac{2}{3(3-1)}=\frac{1}{3}$，这与常识不符，这里的结果是错的. 这里考虑的基本事件是分座位的位置并从一个座位起按某一时针的顺序，$n=k!$；甲、乙两人坐在一起，应考虑甲还有k种坐法，则$m=2k\times(k-2)!$.

例18 有n个白球与n个黑球任意地放入两个袋中，每袋装n个球. 现从两袋中各取一球，求所取两球颜色相同的概率.

解 设$A=$所取两球颜色相同，表面来看此题很难求解，但实质上是从$2n$个球中任取两个球，颜色恰好相同的概率. 可以设想先任取一个，则第二个球有$2n-1$种取法，而有利事件是$n-1$种，故$P(A)=\frac{n-1}{2n-1}$，或$P(A)=\frac{C_2^1C_n^2}{C_{2n}^2}=\frac{n-1}{2n-1}$.

例 19　若有 $n(n\geqslant 3)$ 个人随机站成一行，其中有甲、乙两人，求夹在甲、乙两人之间恰有 $r(0\leqslant r\leqslant n-2)$ 个人的概率.

解　设 A = 夹在甲、乙两人之间恰有 $r(0\leqslant r\leqslant n-2)$ 个人，则有

$$P(A)=\frac{2(n-r-1)(n-2)!}{n!}=\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

例 20　如果 $n(n\geqslant 3)$ 个人随机围成一个圆圈，其中有甲、乙两人，求从甲到乙的顺时针方向，夹在甲、乙两人之间恰有 $r(0\leqslant r\leqslant n-2)$ 个人的概率.

解　设 A = 夹在甲、乙两人之间恰有 $r(0\leqslant r\leqslant n-2)$ 个人，则有

$$P(A)=\frac{n(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n-1}.$$

第三节　几何概率的计算

例 1　在半径为 a 的圆内，取定一直径，过直径上任一点作垂直于此直径的弦，求弦长小于 $\sqrt{2}a$ 的概率.

解　设 $S=\{x\mid -a\leqslant x\leqslant a\}$，$A$ = 弦长小于 $\sqrt{2}a=\left\{x\,\middle|\,-a\leqslant x<-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right\}\cup\left\{x\,\middle|\,\frac{\sqrt{2}}{2}a<x\leqslant a\right\}$，则

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{2\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)}{2a}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=0.2929.$$

例 2　甲、乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时刻是等可能的. 如果甲船停泊的时间是 3h，乙船停泊的时间为 2h，求它们中任何一艘都不需等待码头空出的概率.

解　设 A = 它们中任何一艘都不需等待码头空出，设甲、乙轮船分别于 x,y 后到达码头，根据题意知

$$S=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 24,0\leqslant y\leqslant 24\},$$

则

$$A=\{(x,y)\in S\mid y-x>3\}+\{(x,y)\in S\mid x-y>2\}$$

（甲先到，乙不需等待，或乙先到，甲不需等待），于是

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}=\frac{\frac{1}{2}\times 21^2+\frac{1}{2}\times 22^2}{24\times 24}=0.803.$$

例 3　某码头只能容纳一只船，现预知某日将独立来到两只船，且在 24h 内各时刻来到的可能性都相等，如果它们需要停靠的时间分别为 3h 及 4h，试求一只船在江中等待的概率.

解 设 x,y 分别为此二船到达码头的时间，则 $S=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 24,0\leqslant y\leqslant 24\}$，设 A = 一船要在江中等待空出码头，则

$$A=\{(x,y)\in S\mid 0\leqslant y-x\leqslant 3\}+\{(x,y)\in S\mid 0\leqslant x-y\leqslant 4\}$$

（甲先到，乙需等待，或乙先到，甲需等待），所以

$$P(A)=\frac{\left[24^2-\left(\frac{1}{2}\times 21^2+\frac{1}{2}\times 20^2\right)\right]}{24^2}=\frac{311}{1152}=0.27.$$

例 4 在(0,1)区间内任取两个实数，求它们的乘积不大于$\frac{1}{4}$的概率.

解 设 x 和 y 为所取的实数，则 $S=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，设 A = 它们的乘积不大于$\frac{1}{4}$，则 $A=\left\{(x,y)\in S\mid xy\leqslant\frac{1}{4}\right\}$，$A$ 的面积为

$$\mu(A)=\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4=0.597,$$

于是

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}=0.597.$$

例 5 某公共汽车站每隔 5min 有一辆汽车到达，乘客到达汽车站的时刻是任意地. 求一个乘客候车时间不超过 3min 的概率.

解 设 x 为乘客候车时间，根据题意知，$S=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$，令 A = 一个乘客候车时间不超过 3min，则 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$，$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}=\frac{3}{5}$.

例 6 在平面上画有等距的一些平行线，相邻平行线间的距离为 $a(a>0)$，向平面上随机投掷一枚长为 $l(l<a)$ 的圆柱形针，求此针与任一平行线相交的概率.

解 令 M 表示针的中点；x 表示针投在平面上，M 与最近一条平行线的距离；φ 表示针与最近一条平行线的夹角.

记 $B=\{(x,\varphi)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$，为使针与平行线相交，必须 $0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi$，$A=\{(x,\varphi)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi\}$，于是

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(B)}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\frac{1}{2}a\pi}=\frac{2l}{\pi a}.$$

第四节　利用概率的性质求复杂事件的概率

例 1　从佩戴号码为 1 ~ 10 的 10 名乒乓球运动员中任意选出 4 人参加比赛. 求比赛的 4 人中至少有一人号码为奇数的概率.

解　设 C = 比赛的 4 人中至少有一人号码为奇数，从 10 人中任选 4 人，每种不同的选法即为一基本事件，故基本事件总数为 C_{10}^4. 令 B_i = 比赛的 4 人中恰有 i 个偶数号码($i=3,4$). 由于事件 B_i 发生意味着比赛的 4 人中有 i 个是从佩戴偶数号码的 5 名运动员选出，而其余 $4-i$ 个只能从佩戴奇数号码的 5 名运动员中任意选出. 故事件 B_i 所含基本事件数为 $C_5^i C_5^{4-i}$($i=3,4$). $P(B_i)=\dfrac{C_5^i C_5^{4-i}}{C_{10}^4}$($i=3,4$)，因 $\overline{C}=B_4$，于是

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(B_4)=1-\frac{C_5^4}{C_{10}^5}=\frac{41}{42}$$

(有人按下列方法做，至少有一个号码为奇数，就任选出一个奇数，其他三个从 9 个号码中任选，$P(C)=\dfrac{C_5^1 C_9^3}{C_{10}^4}=2$，这显然错了，错在这种计算是有重复的，例如：先选出 1，然后选 3，2，4 与先选出 3，然后选出 1，2，4 两个是同样的). 求 $P(C)$ 时，也可将 C 表成互不相容的事件之和，即 $C_1+C_2+C_3+C_4$，其中 C_i = 比赛的 4 人中恰有 i 个奇数号码($i=1,2,3,4$). 分别求出 $P(C_i)$ 后再利用概率的有限可加性便得到$P(C)$，即

$$P(C_i)=\frac{C_5^i\cdot C_5^{4-i}}{C_{10}^4}\quad(i=0,1,2,3,4),$$

且　　$$C=C_1+C_2+C_3+C_4,\ C_1,C_2,C_3,C_4\ \text{互不相容},$$

则　　$$P(C)=P(C_1)+P(C_2)+P(C_3)+P(C_4)=\frac{41}{42}.$$

例 2　一部四卷文集，按任意次序放到书架的同一层上，问各卷自左向右或自右向左的卷号顺序恰好为 1，2，3，4 的概率是多少?

解　设 A = 各卷自左向右或自右向左的卷号顺序恰好为 1，2，3，4. 根据题意知，基本事件总数为 $n=4!$，事件 A 包含的基本事件个数为 $m=2$，于是 $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{4!}=\dfrac{1}{12}$.

例 3　从 52 张扑克牌(一副扑克牌，去掉大小王)中任意抽取两张，试求：(1)两张点数相同的概率；(2)两张同花的概率.