

上海市中学课本 · SHUXUE FUXI ZILIAO

数学复习资料



上海人民教育出版社

数学复习资料

上海市中学数学教材编写组

上海人民教育出版社

(上海编式类号)

宁夏人民出版社重印

宁夏新华书店发行

宁夏新华印刷厂印刷

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张7.75 字数175,000

1977年12月第1版 1978年7月宁夏第1次印刷

统一书号: K7171·1121 定价: 0.46元

目 录

第一章 数1

一、数的概念(1) 二、有理数(1) 附: 复数(7)

第二章 代数式12

一、代数式的一般概念(12) 二、整式(12) 三、分式(21)
四、根式(21) 五、有理数指数幂(23)

第三章 代数方程34

一、方程(34) 二、方程的解和解方程(34) 三、一元一次方程(34) 四、二元一次方程(34) 五、二元一次方程组(34) 六、一元二次方程(41) 七、可化为一元二次方程的方程(42) 八、二元二次方程组(43) 九、列方程解应用题(53)

第四章 不等式61

一、不等式(61) 二、不等式的解和解不等式(61) 三、不等式的基本性质(61) 四、一元一次不等式及其解法(61) 五、一元一次不等式组(62) 六、利用一元一次不等式组解简单的绝对值不等式(62) 七、一元二次不等式(62)

第五章 直线图形73

一、直线形的基本知识(73) 二、三角形和四边形(78) 三、相似形(88) 四、解三角形(93)

第六章 圆102

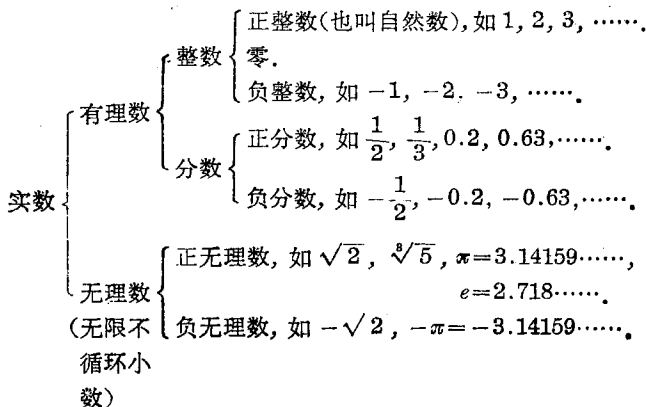
一、圆的基本性质(102) 二、圆和直线的位置关系(104) 三、两个圆的位置关系(105) 四、有关圆的一些计算(111) 五、一些基本轨迹(112)

第七章 直线和平面	122
一、平面(122) 二、线面关系(123)	
第八章 多面体与旋转体	134
第九章 任意角三角比及常用三角公式	148
一、任意角三角比(148) 二、常用三角公式及其应用(161)	
第十章 函数	172
一、函数的基本概念(172) 二、函数的一些重要性质(172)	
三、几个初等函数(178)	
第十一章 对数	191
一、对数(191) 二、对数的性质(191) 三、常用对数的概念和性质(191) 四、指数方程和对数方程(192)	
第十二章 曲线与方程	196
一、基本公式(196) 二、曲线和方程(196)	
第十三章 直线方程	201
一、直线的倾角和斜率(201) 二、直线的方程(201)	
三、两条直线的位置关系(202)	
第十四章 二次曲线	208
一、圆(208) 二、抛物线(212) 三、椭圆和双曲线(218)	
第十五章 极坐标和参数方程	227
一、极坐标(227) 二、参数方程(228) 三、等速螺线、渐开线、摆线(228)	
总复习题	236

第一章 数

一、数的概念

由于社会实践的需要,人们对数的认识不断扩大,我们中学数学里已经学习过的数可列表如下:



二、有理数

1. 有关的一些概念

(1) 数轴 规定了方向、原点和长度单位的直线,叫做数轴.

实数和数轴上的点是一一对应的.

(2) 相反的数 在数轴上原点的两旁, 离开原点距离相等的两点所表示的两个数,叫做互为相反的数,零的相反数是零. 例如, 3 和 -3; $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 互为相反数.

(3) 绝对值 在数轴上表示一个数的点，它离开原点的距离，叫做这个数的绝对值， a 的绝对值用符号 $|a|$ 表示。

正数的绝对值等于这个正数，负数的绝对值等于它的相反数，零的绝对值是零。例如， $|3|=3$ ， $|-2|=2$ ， $|0|=0$ 。

(4) 有理数的大小比较 两个正数，绝对值大的数较大；两个负数，绝对值大的数反而小。

正数都大于零，也大于一切负数；负数都小于零，也小于一切正数。

(5) 代数和 加数是正数或负数（也可以是零）的和，叫做代数和。

2. 有理数的运算

(1) 运算法则

加法：

同号两数相加，取相同符号，把绝对值相加；

异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并从较大的绝对值减去较小的绝对值；

两个相反数相加等于零；

任何数与零相加仍是这个数。

减法：

减去一个数，等于加上这个数的相反数。

乘法：

同号两数相乘，取“+”号，把绝对值相乘；

异号两数相乘，取“-”号，把绝对值相乘；

零同任何数相乘都得零。

除法：

同号两数相除，取“+”号，把绝对值相除；

异号两数相除，取“-”号，把绝对值相除；
零除以任何一个不等于零的数，都得零。

乘方：

正数的任何次幂都是正数；

负数的偶次幂是正数，奇次幂是负数；

零的任何正数次幂等于零。

(2) 运算规律

交换律： $a+b=b+a$ ，

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

结合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$ ，

$$(ab)c=a(bc).$$

乘法对加法分配律：

$$a(b+c)=ab+ac.$$

(3) 运算顺序

先算乘方、开方，再算乘、除，后算加、减。

如果有括号，先算括号里面的。

(4) 与运算有关的一些问题

$$a-b=a+(-b),$$

$$a \div \frac{1}{b} = \frac{a}{\frac{1}{b}}, \quad \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

去括号： $-(a+b+c)=-a-b-c$ 。

添括号： $a-b=-(-a+b) = -(b-a)$ 。

【例 1】在数轴上，把下列各数表示出来，并用不等号将它们连接起来：

$$-5, 0, 2.5, -1.5, -3, 4.$$

解 各点在数轴上表示如图 1.1.

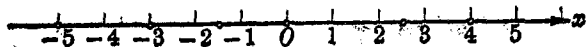


图 1.1

$$-5 < -3 < -1.5 < 0 < 2.5 < 4.$$

【例 2】 比较下列各数的大小:

$$-\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -0.1.$$

解

$$\therefore \frac{3}{4} > \frac{2}{3} > 0.1,$$

而在负数中, 绝对值大的数较小,

$$\therefore -\frac{3}{4} < -\frac{2}{3} < -0.1.$$

【例 3】 计算:

$$(+6) - (-3) + (-7) - (-1) - (-5) + (-9).$$

$$\text{解 原式} = 6 + 3 - 7 + 1 + 5 - 9$$

$$= 6 + 3 + 1 + 5 - 7 - 9$$

$$= -1$$

【例 4】 计算: $(1-2)^2 \times 3 + 77 \div (-7).$

$$\text{解 原式} = 1 \times 3 + (-11) = 3 - 11 = -8.$$

【例 5】 计算:

$$\frac{1}{(-0.2)^2} \div \left[2\frac{1}{2} - \left(-1 + 2\frac{1}{4} \right) \right] \times 0.4.$$

$$\text{解 原式} = \frac{1}{0.04} \div \left[2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4} \right] \times 0.4$$

$$= \frac{100}{4} \div \frac{5}{4} \times \frac{4}{10}$$

$$= \frac{100}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{10}$$

$$= 8.$$

【例 6】 计算:

$$(1) |-7-5| + |12| - |6 \div (-9)| + \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right| - |-5^2|;$$

$$(2) |a+b|.$$

解 (1) 原式 $= 12 + 12 - \frac{2}{3} + \frac{1}{12} - 25$

$$= -\frac{8}{12} + \frac{1}{12} - 1$$

$$= -\frac{7}{12} - 1$$

$$= -1\frac{7}{12}.$$

(2) 当 $a+b \geq 0$ 时,

$$|a+b| = a+b;$$

当 $a+b < 0$ 时,

$$|a+b| = -(a+b).$$

习 题 一

1. 在数轴上, 把下列各数表示出来, 并用不等号将它们连接起来:

$$(1) -3, -4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 0, +4.5, -1;$$

$$(2) \left| \frac{1}{5} \right|, \left| -\frac{1}{3} \right|, -|-2|, |0|, -\left| \frac{1}{3} \right|, -|4.5|.$$

2. 写出下列各数的相反数, 并把各对数在数轴上表示出来:

$$-7, +3\frac{1}{2}, 5, 0, -3.6, -\frac{1}{2}, 4.$$

3. 绝对值等于 6 的数有哪几个? 绝对值等于 0 的数又有哪几个?

4. 计算: $-\left|-\frac{2}{3}\right| - \left|-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right| - \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right| \div |-2|$.

5. 比较下列每组数的大小, 并用不等号连接起来:

(1) 2.4, -2.4; (2) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$;

(3) -10, 0; (4) $-\frac{12}{7}$, $-1\frac{3}{4}$;

(5) $|+5|$, $|-8|$; (6) $-(-5)$, $-|-5|$;

(7) 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; (8) -0.3, $-\frac{1}{5}$, $+\frac{2}{3}$.

6. 计算:

(1) $(-3) - (+5) - (-4) + (-6) - (-8)$;

(2) $(+9) - (+10) + (-2) - (-8) + (-3)$;

(3) $(-67) + 176 + (-25) - (-23)$;

(4) $-5.3 - 6.9 + 7.2 - 5.4 + 8.2$;

(5) $\left(-1\frac{1}{2}\right) - \left(-1\frac{1}{4}\right) + \left(-2\frac{1}{2}\right) - \left(-3\frac{3}{4}\right) - \left(1\frac{1}{4}\right)$.

7. 计算:

(1) $(+3) \times (-4) - (+2) \times (-1)$;

(2) $[(-12) + (+6) + (-9)] \div (-3)$.

8. 计算:

(1) $-2^3 + (-2)^2 - (-3)^2 - (-3)^3$;

(2) $(1-3)^2 \times (-2) - (1-3^2) \times (-2) + [1-3^2 \times (-2)]$.

9. (1) 3^2 和 3×2 有什么区别?

(2) 2×2^3 和 $(2^3)^2$ 有什么区别?

(3) -3^2 和 $(-3)^2$ 有什么区别?

(4) $(2 \times 3)^2$ 和 2×3^2 有什么区别?

10. 计算:

$$-3^2 \times (1.2)^2 \div (-0.3)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \times (-3)^3 \div (-1)^{25}.$$

11. 计算

$$(1) (-17) \div [18 - (2 \times 3 - 4 \div 2)] \times \frac{1}{4};$$

$$(2) 6.9 \times [(22 - 14) \times 3 \div (-12 + 2 \times 5)].$$

12. 计算:

$$(1) \left[1 \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\right) \div \left(-1 \frac{1}{9}\right) \div \frac{2}{3}\right] \div (-2)^3;$$

$$(2) -1 - \left[1 - \left(1 - 0.5 \times \frac{1}{3}\right)\right] \times [2 - (-3)^2].$$

13. 下列各数是几位数?

$$(1) 7 \times 10^8;$$

$$(2) 3.65 \times 10^5;$$

$$(3) 0.13 \times 10^5;$$

$$(4) 10^{11}.$$

14. 将下列各数写成 $a \times 10^n$ 的形式 ($1 \leq a < 10$):

$$(1) 9000000;$$

$$(2) 27000000000000;$$

$$(3) 1350000;$$

$$(4) 302000.$$

15. 计算:

$$(1) \frac{\frac{2}{5} + 1 \frac{1}{4}}{4 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{3}};$$

$$(2) \frac{4 \frac{1}{2} \times 5 \frac{2}{3} + 6}{6 \frac{3}{4}}.$$

附 复数

1. 复数的概念 有许多问题在实数范围内是被认为没法解决的, 如方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数范围内就没有解, 因为没有个数的平方等于 -1 . 人们为了实际的需要, 就引入了一种新的数——虚数. 这样, 数的范围就扩充到了复数.

(1) 虚数 负数开平方叫做虚数, 用记号 i 表示 $\sqrt{-1}$,

i 称为虚数单位. 显然, $i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=i^2 \cdot i=(-1) \cdot i=-i$, $i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$, $i^0=1$.

当 $a>0$ 时, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$.

(2) 复数 形式如 $a+bi$ (a, b 为实数) 的数叫做复数. a 称为复数的实部, bi 称为复数的虚部, b 叫做虚数系数. 当 $a=0$ 时, 复数 $a+bi$ 变成了纯虚数 bi ; 当 $b=0$ 时, 复数 $a+bi$ 变成了实数 a .

两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$ 相等, 必须而且只须 $a=c$, $b=d$.

一个复数 $a+bi$ 等于零, 必须而且只须 $a=0$, $b=0$. 复数之间, 没有大小规定.

(3) 共轭复数 $a+bi$ 和 $a-bi$, 这两个复数叫做共轭复数.

(4) 复数系 一切实数和一切虚数构成一种新的数系, 这种数系叫做复数系.

$$\text{复数 } (a+bi) \begin{cases} \text{实数} & (a+bi, b=0); \\ \text{虚数} & (a+bi, b \neq 0). \end{cases}$$

2. 复数的运算

(1) 加减法 两个复数相加减, 是将它们的实部和实部相加减, 虚部和虚部相加减. 例如,

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i.$$

两个复数的和差可能为实数, 例如共轭复数的和就是实数:

$$(a+bi) + (a-bi) = 2a.$$

(2) 乘法 两个复数相乘, 是先按两个二项式乘法展开, 再合并各展开项的实部和虚部. 例如,

$$\begin{aligned}
 (a+bi)(c+di) &= a(c+di) + bi(c+di) \\
 &= ac + adi + bci + bdi^2 \\
 &= (ac - bd) + (ad + bc)i; \\
 (a+bi)^2 &= (a+bi)(a+bi) \\
 &= a^2 + 2abi + b^2i^2 \\
 &= (a^2 - b^2) + 2abi.
 \end{aligned}$$

两个不等于零的共轭复数相乘，其积是实数，如

$$(a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

(3) 除法 两个复数相除，先把它写成分式形式，然后分子、分母同乘以分母的共轭复数，再化简。例如， $(a+bi) \div (c+di)$ (c, d 不同时为零) 可写成

$$\begin{aligned}
 \frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} \\
 &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i.
 \end{aligned}$$

【例 1】 计算: $\sqrt{-49} \cdot \sqrt{-4} - \sqrt{-16} \cdot \sqrt{-25}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= \sqrt{49}i \cdot \sqrt{4}i - \sqrt{16}i \cdot \sqrt{25}i \\
 &= 7i \cdot 2i - 4i \cdot 5i \\
 &= 14i^2 - 20i^2 \\
 &= -6i^2 \\
 &= 6.
 \end{aligned}$$

【例 2】 计算: $i^3 + i^{18} + i^{51} + i^{60}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= i^3 \cdot i + i^{16} \cdot i^2 + i^{48} \cdot i^3 + (i^4)^{15} \\
 &= (i^4)^2 \cdot i + (i^4)^4 \cdot i^2 + (i^4)^{12} \cdot i^3 + (i^4)^{15} \\
 &= i + i^2 + i^3 + 1 \\
 &= i - 1 - i + 1 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

【例 3】 计算: $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$.

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= \left[\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} \right]^{100} = \left(\frac{1-2i-1}{1+1} \right)^{100} \\ &= \left(\frac{-2i}{2} \right)^{100} = (-i)^{100} = [(-i)^4]^{25} = 1.\end{aligned}$$

【例 4】 在复数范围内解方程:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.\end{aligned}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

习 题 二

1. 写出下列复数的实部和虚部:

- (1) $-\sqrt{2}$; (2) $1+2i$;
(3) $-3i$; (4) $\sqrt{3}+i$.

2. 把下列各数表示为 $a+bi$ 的形式, 并写出各数的共轭复数:

- (1) $\sqrt{-36}$; (2) $\sqrt{121}$; (3) $-\sqrt{-9a^2}$;
(4) $-2i$; (5) $-2-3\sqrt{-3}$; (6) $-3+2\sqrt{-4}$;
(7) -6 ; (8) $4i$.

3. 计算:

- (1) i^{10} ; (2) i^{61} ; (3) $(-i)^{101}$;
(4) $i^5 \cdot i^{15}$; (5) $i^5 - (-i)^{12}$; (6) $(-2\sqrt{-3})^{10}$;

$$(7) -i^{80} + i^{20} + i^{70};$$

$$(8) i^7 + i^8 + i^{25} + i^{35} + i^{97} + i^{100}.$$

4. 计算:

$$(1) (3+2i) + (4-5i); \quad (2) (-3-2i) + (4+3i);$$

$$(3) (7+6i) - (5-7i); \quad (4) (-6-8i) - (5-i);$$

$$(5) (3+2i)(3-4i); \quad (6) (2+\sqrt{-16})(3-\sqrt{-9});$$

$$(7) (1+2i)^2; \quad (8) \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2;$$

$$(9) \frac{3}{2i}; \quad (10) \frac{13-\sqrt{-9}}{\sqrt{-16}};$$

$$(11) \frac{6i+5}{3+2i}; \quad (12) \frac{8+\sqrt{-4}}{5-\sqrt{-6}};$$

$$(13) \frac{2+5i}{1-i} \cdot \frac{5+2i}{2+i}; \quad (14) \frac{1}{-1+\sqrt{3}i}.$$

5. 计算:

$$(1) \sqrt{-121} \cdot \sqrt{-4} + \sqrt{-25} \cdot \sqrt{-169};$$

$$(2) \sqrt{-8} + \sqrt{-\frac{1}{2}} + \sqrt{-2};$$

$$(3) \frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i};$$

$$(4) \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{100}.$$

6. 在复数范围内解方程:

$$(1) 3x^2 - 2x + 4 = 0;$$

$$(2) 5x^2 = 3x - 20.$$

在以后各章中, 我们还是在实数范围内讨论问题.

第二章 代 数 式

一、代数式的一般概念

1. 代数式 用运算符号把数和表示数的字母连接起来的式子,叫做代数式. 用数值代替代数式里的字母,计算所得的结果,叫做代数式的值.

2. 恒等式 一个等式,不论用任何数值(只要是容许的)代替其中的字母,它都是成立的,这样的等式叫做恒等式. 例如, $2x+x=3x$, $a+b=b+a$ 等等.

3. 代数式的分类

$$\text{代数式} \begin{cases} \text{有理式} \begin{cases} \text{整式} & \text{如 } 3x, \frac{1}{2}ah, x^2+2x-5, \dots\dots \\ \text{分式} & \text{如 } \frac{1}{x}, \frac{5}{x+3}, \frac{25}{a+b}, \dots\dots \end{cases} \\ \text{无理式} & \text{如 } \sqrt{a}, \sqrt[3]{x}, \sqrt{x+3}, \sqrt{\frac{a}{b}}, \dots\dots \end{cases}$$

二、整式

1. 整式的运算 有整式的加法、整式的减法、整式的乘法(包括整式的乘方)和整式的除法.

2. 乘法公式

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2, \\(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3 + b^3, \\(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3 - b^3.\end{aligned}$$

3. 因式分解 把一个多项式分解成几个式子的乘积,叫做因式分解. 因式分解的一般方法有:

(1) 提取公因式法

例如, $x^3y - x^2y^2 + xy^3 = xy(x^2 - xy + y^2)$.

(2) 分组分解法

例如, $3ax - 4ay - 4by + 3bx$
 $= 3ax + 3bx - 4ay - 4by$
 $= 3x(a + b) - 4y(a + b)$
 $= (a + b)(3x - 4y)$.

(3) 应用乘法公式分解法

例如,

- (i) $9a^2 - 4b^2 = (3a)^2 - (2b)^2 = (3a + 2b)(3a - 2b)$;
(ii) $x^2 - 6ax + 9a^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot (3a) + (3a)^2 = (x - 3a)^2$;
(iii) $27a^3 - \frac{1}{8} = (3a)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$
 $= \left(3a - \frac{1}{2}\right)\left(9a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{1}{4}\right)$.

对于二次三项式还可以用下列方法进行分解:

(1) 配方法

例如,

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x + 1 &= 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left[x^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] \\ &= 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1). \end{aligned}$$

(2) 十字相乘法