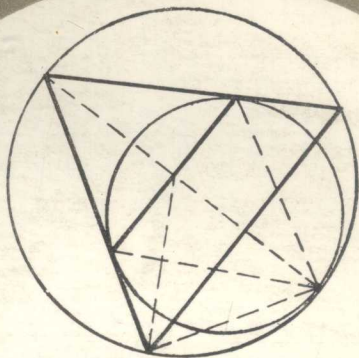


中学数学



GUOJISHUXUEJINGSAISHITIJIANGJIE

国际数学竞赛试题讲解

湖北教育出版社

1000-8185-875, 876



COLLEGE ENTRANCE EXAMINATIONS

国际数学竞赛试题讲解

陈维明 王 明 著

国际数学竞赛试题讲解

江仁俊 成应璩 蔡训武
梁法驯 樊 恺

湖北教育出版社

国际数学竞赛试题讲解

江仁俊 成应球 蔡训武

梁法驯 樊 恺

湖北教育出版社出版 湖北省新华书店发行

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 印张17.825 378,000字

1984年4月第1版 1984年4月第1次印刷

印数：1—62,700

统一书号：7306·72 定价：1.45元

出版说明

一九七九年，湖北人民出版社约请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了《代数解题引导》、《初等几何解题引导》、《三角解题引导》、《解析几何解题引导》和《国际数学竞赛试题讲解》，并于一九八〇年至一九八二年先后出版。为满足读者的需要，现稍作修改，以湖北教育出版社名义出版。

希望这套书和广大读者见面以后，能听到来自读者的热情的批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善。

一九八三年十二月

重 印 前 言

本书是《国际数学竞赛试题讲解》第Ⅰ、Ⅱ两册的合订本。第Ⅰ册包括第十九、二十两届国际中学生数学竞赛试题的分析、解答和附录，由江仁俊同志编写。第Ⅱ册包括第一届到第十八届国际中学生数学竞赛试题的分析与解答，由江仁俊、成应琼、蔡训武、梁法驯、樊恺等同志共同编写，江仁俊同志负责审稿。

试题总的看来，知识面较宽，难度较大，综合性较强，技巧性较高，灵活、新颖且具有趣味性。除少数试题外，多数试题对数学基础知识的要求较高，内容不仅包括初等数学的各个方面，还涉及到高等数学的一些分支。但利用我国中学生熟悉的数学知识来解，多数题仍能解出，而且还可借以提高分析推理、空间想象、抽象思维以及灵活运用所学知识的能力。

本书每道试题分“分析”、“解答”和“附注”三步阐述。解答部分除选择了国内外有关资料上的解(证)法外，为了开拓解题思路，我们还充实了一些自己的解(证)法；分析和附注是为了帮助读者窥视国际数学竞赛的水平，掌握解题思路，了解与试题有关的问题，总结某些带规律性的方法和技巧。

由于合订本是按原版重印，未作大的修改，加之我们水平有限，书中定有不妥和错误之处，请同志们批评指正。

编 者

1983年11月

目 录

第一届.....	1
第二届.....	25
第三届.....	52
第四届.....	88
第五届.....	122
第六届.....	142
第七届.....	157
第八届.....	191
第九届.....	210
第十届.....	235
第十一届.....	254
第十二届.....	278
第十三届.....	303
第十四届.....	322
第十五届.....	337
第十六届.....	356
第十七届.....	382
第十八届.....	406
第十九届.....	435
第二十届.....	462
附 录.....	508

第一届国际中学生 数学竞赛试题分析与解答

1959年在罗马尼亚举行

第一题 (波兰命题)

证明：分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 对任何自然数 n 皆不可约。

【分析】显然，对任何自然数 n ，关于 n 的一次式 $21n+4$ 、 $14n+3$ 皆为正整数，并且 $21n+4 > 14n+3$ ，从而 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 表示一系列的假分数。

欲证分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约，即证 $21n+4$ 与 $14n+3$ 互素，也就是证其最大公约数

$$(21n+4, 14n+3) = 1.$$

而两正数是否互素的判别，最大公约数的求法，又可直接利用辗转相除法实现，因此得知本题的一般证法。

此外，如下述的证法三，先设其最大公约数为 d ，再证 $d=1$ 亦可。

〈证法一〉对 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 作辗转相除法如下：

1	$21n+4$	$14n+3$	2
	$14n+3$	$7n+1$	
		1	

由此可知，最后的余数为 1，即

$$(21n+4, 14n+3)=1,$$

所以分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 对任何自然数 n 皆不可约。

〈证法二〉 假设 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 可约，则因

$$\frac{21n+4}{14n+3} = 1 + \frac{7n+1}{14n+3},$$

故 $\frac{7n+1}{14n+3}$ 可约，从而它的倒数 $\frac{14n+3}{7n+1}$ 可约。

类似地，又化假分数 $\frac{14n+3}{7n+1}$ 为带分数：

$$\frac{14n+3}{7n+1} = 2 + \frac{1}{7n+1},$$

于是 $\frac{1}{7n+1}$ 亦必可约。但对任何自然数 n ，真分数 $\frac{1}{7n+1}$

显然皆不可约，因此导致矛盾。证毕。

〈证法三〉 设 $21n+4$ 与 $14n+3$ 的最大公约数为 d ，则

$$21n+4 = pd; \quad (1)$$

$$14n+3 = qd, \quad (2)$$

其中 p, q 皆为正整数。

由 (1)、(2) 消去 n 并整理，得

$$(3q-2p)d=1. \quad (3)$$

由于 p, q 皆为正整数，所以 $3q-2p$ 为整数。因此，要 (3) 成立，必须正整数 $d=1$ 。证毕。

【附注】 1. 辗转相除法又称欧几里德 (Euclid) 演算法，是求最大公约数的一个切实可行的办法。证法二在形式上采用了反证，但实质上，是将证法一中辗转相除的过程分段进

行表述. 因此, 这一类问题, 一般都可用辗转相除法解决.

2. 记号 (f, g) 表示两个正整数 f 与 g 的最大公约数; “ f, g 互素”与“ $(f, g) = 1$ ”等价. 对于两个以上的数, 记法相同, 比如三个数 12、18、24 的最大公约数是 6, 即

$$(12, 18, 24) = 6.$$

关于最小公倍数, 常以方括号记之. 例如 12、18、24 三个数的最小公倍数是 72, 即

$$[12, 18, 24] = 72.$$

第 二 题 (罗马尼亚命题)

对于 x 的哪些实数值, 下列等式成立:

$$a) \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2};$$

$$b) \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = 1;$$

$$c) \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = 2,$$

这里根式仅表算术根.

【分析】由题设知, $x \geq \frac{1}{2}$ 是研究问题的前提, 否则, 二次根号内将出现负值.

在 $x \geq \frac{1}{2}$ 的许可值范围内, 可以对函数

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$$

进行讨论得到答案, 或按根式方程求解.

由于函数表达式是含有两层根号的复合二次根式, 首先考虑化简函数式是必要的.

〈解答〉将等式左边用 y 表示, 因 $x \geq \frac{1}{2}$, 故可作如下

变形:

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x - 2\sqrt{2x-1}}) \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} [\sqrt{(\sqrt{2x-1})^2 + 2\sqrt{2x-1} + 1} \\&\quad + \sqrt{(\sqrt{2x-1})^2 - 2\sqrt{2x-1} + 1}] \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} [\sqrt{(\sqrt{2x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-1} - 1)^2}] \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sqrt{2x-1} + 1) + |\sqrt{2x-1} - 1|].\end{aligned}$$

为去绝对值符号, 下面分两种情况讨论.

第一, 若 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, 则有:

$$1 \leq 2x \leq 2, \quad 0 \leq 2x-1 \leq 1, \quad 0 \leq \sqrt{2x-1} \leq 1.$$

此时

$$\begin{aligned}y &= \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sqrt{2x-1} + 1) + (1 - \sqrt{2x-1})] \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

第二, 若 $x > 1$, 则有:

$$2x > 2, \quad 2x-1 > 1, \quad \sqrt{2x-1} > 1.$$

此时

$$\begin{aligned}y &= \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sqrt{2x-1} + 1) + \sqrt{2x-1} - 1] \\&= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2x-1}.\end{aligned}$$

总之, 我们得到:

a) 当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 时, 等式成立;

b) 因为在 $x \geq \frac{1}{2}$ 的定义域内, 函数 y 的值不小于 $\sqrt{2}$, 故对 x 的任何实数值, 等式都不能成立;

c) 当 $x > 1$ 时, 原等式变为:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2x-1} = 2.$$

解之, 得 $x = \frac{3}{2}$. 也就是说, 当 $x = \frac{3}{2}$ 时, 等式成立.

【附注】 1. 对这道题, 我国的中学生是比较熟悉的. 但要注意的是: 对于

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0); \\ -a (a < 0), \end{cases}$$

特别是在 a 本身的符号未确定的情况下, 应该进行讨论, 分别写出结果.

2. 在化简形如 $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ 的复合根式, 考虑 $A \pm \sqrt{B}$ 能否配成完全平方时, 用“拼凑法”观察较为简捷:

第一, $\sqrt{B}$ 变成 $\sqrt{B'}$ 的 2 倍;

第二, A 变成 A_1 与 A_2 的和, 并且 A_1 与 A_2 的积恰好等于 B' .

本题中的函数式 $x \pm \sqrt{2x-1}$, 就是通过拼凑而配成完全平方的.

第 三 题 (匈牙利命题)

设 $\cos x$ (实数) 满足二次方程

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0,$$

其中 a, b, c 是实数, 求 $\cos 2x$ 所满足的一个二次方程. 在 $a=4, b=2$ 和 $c=-1$ 的情况下, 将此二方程进行比较.

【分析】 因为 $\cos x$ 与 $\cos 2x$ 之间存在着关系式（即余弦倍角公式）

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

即

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x,$$

故易将题设方程中的 $\cos x$ 用 $\cos 2x$ 表示，变形整理，即可求得所求方程。显然，它的系数也含有 a 、 b 和 c 。

此外，利用根与系数间的关系，也可求出所求的方程。

最后，在指定的情况下，比较两个方程在“结构”上的异同点。

〈解法一〉 将题设方程变形：

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0, \quad (1)$$

$$a\cos^2 x + c = -b\cos x. \quad (2)$$

(2)² × 4，并整理得：

$$a^2(2\cos^2 x)^2 + (4ac - 2b^2) \cdot 2\cos^2 x + 4c^2 = 0. \quad (3)$$

将 $2\cos^2 x = \cos 2x + 1$ 代入 (3)，得：

$$a^2(\cos 2x + 1)^2 + (4ac - 2b^2)(\cos 2x + 1) + 4c^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} & a^2\cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2)\cos 2x + a^2 \\ & + 4ac - 2b^2 + 4c^2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

显然，(4) 是要求的 $\cos 2x$ 所满足的一个二次方程。

将 $a = 4$ 、 $b = 2$ 和 $c = -1$ 代入 (1)，得

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0; \quad (5)$$

代入 (4)，得

$$4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0. \quad (6)$$

(5) 与 (6) 比较易知：在该种情况下，它们都是系数完全相同的一元二次方程，不过一个是以 $\cos x$ 为元，另一个则以

$\cos 2x$ 为元.

〈解法二〉 根据韦达定理, 题设方程两根有如下关系:

$$\cos x_1 + \cos x_2 = -\frac{b}{a}; \quad \cos x_1 \cos x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$\begin{aligned}\cos 2x_1 + \cos 2x_2 &= 2(\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 - 1) \\&= 2[(\cos x_1 + \cos x_2)^2 - 2\cos x_1 \cdot \cos x_2 - 1] \\&= 2\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} - 1\right] \\&= \frac{-(2a^2 + 4ac - 2b^2)}{a^2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2x_1 \cdot \cos 2x_2 &= (2\cos^2 x_1 - 1)(2\cos^2 x_2 - 1) \\&= 4(\cos x_1 \cdot \cos x_2)^2 - 2(\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2) + 1 \\&= 4\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}\right] + 1 \\&= \frac{a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2}{a^2}.\end{aligned}$$

因此, 要求的 $\cos 2x$ 所满足的二次方程为:

$$\begin{aligned}a^2 \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2) \cos 2x + a^2 \\+ 4ac - 2b^2 + 4c^2 = 0.\end{aligned}$$

关于题设方程与所求方程的比较, 同解法一.

【附注】 1. 如应用求根公式于题设二次方程, 可求 $\cos x_i (i = 1, 2)$; 再用余弦二倍角公式, 求出相应的 $\cos 2x_i$ 的值, 最后展开

$$(\cos 2x - \cos 2x_1)(\cos 2x - \cos 2x_2) = 0$$

的左边, 并以 $\cos 2x$ 为元进行整理, 亦可得到所求的二次方程.

2. 解答本题虽较容易,但它运用了有关代数与三角的基础知识,有一定的综合性,中学生平时练习这类题是必要的.例如把题中的“ $\cos x$ ”换为“ $\sin x$ ”,情况将怎样?请读者考虑.

第 四 题 (匈牙利命题)

试作一直角三角形,其斜边 c 给定,且使 c 边上的中线为二直角边的几何中项.

【分析】求作的是一直角三角形,因斜边 c 已知,故问题在于确定第三顶(即直角顶)点 C .

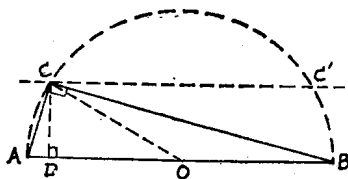


图 1—1

本题解法不止一种,这里着重分析一种作法.

设图已成,即 $Rt\triangle ABC$ 符合要求(如图 1—1 所示),易知 C 点在以 $AB (=c)$ 为直径的 $\odot O$ 的圆周上.为进一步弄清 C 点的确切位置,

作斜边 AB 上的中线 $OC (= \frac{c}{2})$ 和高 CD , 则

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = AC \cdot BC, \quad AC \cdot BC = c \cdot CD.$$

所以 $CD = \frac{c}{4}$, 即 C 点又在平行于 AB 并与 AB 相距 $\frac{c}{4}$ 的直线 CC' 上. 因此, 直角三角形的直角顶点就是 $\odot O$ 与直线 CC' 的交点.

〈解法一〉由上面的分析得到如下的作法(图 1—2):

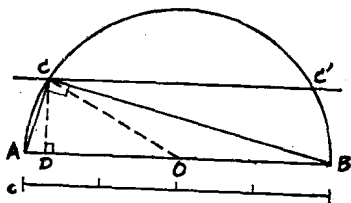


图 1—2

1) 作线段 $\overline{AB} = c$ (已知的);

2) 以 $\overline{AB}$ 为直径作 $\odot O$;

3) 作直线 $CC' \parallel AB$, 使 CC' 与 AB 的距离为 $\frac{c}{4}$,

CC' 与 $\odot O$ 交于 C, C' ;

4) 连 AC, BC (或 AC', BC'), 则 $\triangle ABC$ (或 $\triangle ABC'$) 即为所求。

事实上, 由 1)、2), $\triangle ABC$ 显然是斜边为 c 的直角三角形; 剩下的, 只需证明“ $Rt\triangle ABC$ 斜边上的中线为二直角边的几何中项”即可。

连 OC , 则 $OC = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$; 又过 C 作 $CD \perp AB$, D 为垂足, 则由 3) 知 $CD = \frac{c}{4}$. 于是, 我们有:

$$OC^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c}{4} \cdot c = CD \cdot AB = AC \cdot BC.$$

对作图无误的证明至此结束。

〈解法二〉 用代数法作图. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 斜边 $AB = c$, 斜边上的中线 $OC = \frac{c}{2}$ 为已知, 设 $AC = t$, $BC = u$ (图 1—3), 则有

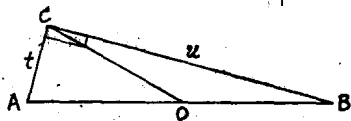


图 1—3

$$\begin{cases} tu = \left(\frac{c}{2}\right)^2, & (1) \\ t^2 + u^2 = c^2. & (2) \end{cases}$$

(1)·2 + (2): $(t+u)^2 = \frac{3}{2}c^2$; 两边开平方取正值, 得

$$t+u = \frac{\sqrt{6}}{2}c. \quad (3)$$

(1)、(3)联立, t 、 u 分别是下列一元二次方程的两个根:

$$x^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}c\right)x + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 0. \quad (4)$$

显然, (4)有二正实根. 因此问题归结为一元二次方程(4)的根的作图, 而这是完全可能的(作法见后面附注).

如果由(1)、(3), 具体算出

$$t(\text{或 } u) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}c = c\cos 15^\circ,$$

$$u(\text{或 } t) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}c = c\sin 15^\circ,$$

也可先利用代数法, 直接作出线段 $\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}c$; 或者根据角的特别值作出 15° 角或 75° 角, 从而最后完成斜边为 c 的直角三角形的作图.

【附注】 1. 作图题视题中对于所求图形位置的要求不同而分为两大类:

第一类, 如果求作的图形必须作在指定的位置, 则称这类作图为定位作图. 例如“过已知直线外一已知点作已知直线的平行线”就是定位作图.

第二类, 如果对于所求图形的位置没有硬性的限制, 这种作图叫活位作图. 例如, “在定圆中作内接正方形”、“已知边长作正三角形”等都是活位作图.

按一定方法把作图题所求图形作出的过程, 叫做解作图题. 凡定位作图, 能作出多少个适合条件的图形, 就说有多