华东师范大学函授教材

数学分析讲义

（第四册）

华东师范大学数学系
数学分析教研組 編

华东师范大学函授部

华东师范大学函授教材

数学分析講义

（第四册）

华东师范大学数学系
数学分析教研組編

华东师范大学函授部
1960年3月

目　录

第八章　(續)

第九章　定积分的应用

第十章　数值級数

第十一章　无穷的函数項級数

第十二章 幂級数

第八章 (續)

§10. 定积分的近似計算

在前节里,我們曾討論过如何求定积分的值,这里所指的自然是精确的值。当被积函数 $f(x)$ 的原函数是已知函数的时候,只須应用 N-L 公式,自可将定积分的精确值直接求出:

$$J=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

特别是当 $F(x)$ 是初等函数的时候,还可将 J 表达成为已知数值的普通算式,如象

$$\int_a^b x^2dx=\frac{b^3-a^3}{3},\quad \int_1^b \frac{dx}{x}=\ln b$$

从而得到計算 J 的精确值的非常有利的依据。可是,如果 $F(x)$ 虽存在,但不屬于已知函数的范圍的話①,那么,我們便无法直接应用 N-L 公式来求 J 的精确值了。

另一方面,我們曉得,不管原函数是怎样的函数,也不管它能否具体求出,总可以按照定积分定义,用逼近的方法来求出 J 的准确到任何程度的近似值。能够如此,J 的精确值也应該說是知道了(实际上,我們对于 π 所知道的也不过如此)。至于能否在特定的方式

---

① 例如 $\frac{\sin x}{x}$ 的原函数虽存在,却不屬于初等函数的范圍,在此以前,我們也从沒有碰見过它,因此,自应把它作为一个迄目前为止尚不知道的新的函数来看待,这个新函数勿宁就要根据它是 $\frac{\sin x}{x}$ 的原函数或积分函数这一性质来定义:$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ 所謂积分正弦,并由此出发来研究它的其他性质,(当然这样做时,必須假定定积分 $\int_0^x\frac{\sin t}{t}di$ 能独立計算,而絕无再根据 N-L 公式 $\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx=\mathrm{Si}(b)-\mathrm{Si}(a)$ 回头来計算 $\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx$ 之理)。在数学中,采取这种办法的地方是屢見不鮮的。

下，将 J 精确地表达出来，那当然是另一問題。特别是能否将 J 表达成为已知数值的普通算式，是一个一般应予否定的問題。

以上是就理論上来說，可是在实际应用上那就是另外的一回事了。在实用上我們所需要的，往往只是具有若干位准确数字的近似值，而根本不在乎求精确值。比方說，要求是 4 位的話，那么，即使精确值是 π，也可用 3.1416 来代替。可見在精确值上所产生的有关表达的問題，一到近似值就完全不存在了。在本节我們首先感兴趣的，是怎样有效地来求定积分的具有所需准确度的近似值，考慮到实际上的需要（如象經驗公式有时根本就沒有分析表达式），加于被积函数的限制，自然是愈少愈好。这样一来，上面所說的，从定积分定义出发的逼近方法就成为了这方面的唯一現成的基础。事实上，我們只須将区間分得充分細，每一个积分和便可看做是一个适当的近似值。不过站在实踐的立場，我們自然还要問，当誤錯限度給定之后，应該选擇怎样的积分和，才能使它不仅达到近似的要求，而且还便于計算呢？下面便来回答这个問題。

I. 梯形法

当 $\langle a, b\rangle$ 的一个分法选定以后，最簡单的积分和当然是下面两个：

$$\Sigma_1=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i,\quad \Sigma_2=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i:$$

前者以每个子区間的左端点为介点，后者以右端点为介点。在 $f(x)$ 不减的情形下，前者相当于小和，从而 $\leqslant J$，后者相当于大和，从而 $\geqslant J$。在 $f(x)$ 不增的情形下，則剛好反过来，因此，拿每一个单独来說，不是偏大，就是偏小，如果取两者的平均值

$$\Sigma=\frac{1}{2}(\Sigma_1+\Sigma_2)=\frac{1}{2}\sum[f(x_{i-1})+f(x_i)]\,\Delta x_i \tag{1}$$

来作为定积分的近似值，就应当比較合适。

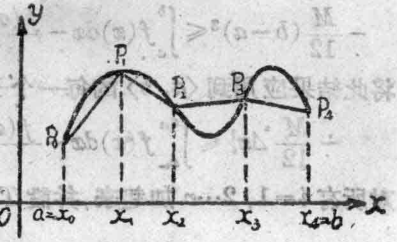
在一般情形，$f(x)$ 不一定单調，但通常可分介成单調区間，故

这方法仍旧可用。再說，无論怎样，$\frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]$ 的值总在 m_i 与 M_i 之間，故只要 $f(x)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 連續，必存在 $\xi_i\in\Delta_i$，使得 $f(\xi_i)=\frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]$，因此，$\Sigma$ 表面上虽不是一个积分和的形状，实际上却等于某一个积分和，既然是积分和，将它作为 J 的近似值总不錯的。

在几何上，当 $f(x)\geqslant 0$ 时，(1)右边的各被加項

$$\frac{1}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]\Delta x_i \tag{2}$$

等于以 $f(x)$ 在相邻两分点的縱标綫为底的梯形 $x_{i-1}P_{i-1}P_ix_i$（見图）的面积，而 Σ 便相当于各梯形面积之和，故选用 Σ 来做定积分 J 的近似值通常叫作梯形法。



我們現在来看用 Σ 代替 J 时，其誤差如何来估計？为此我們可先看用 (2) 代替 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ 或者，并不失一般性，用 $\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$ 代替 J 时，其誤差如何来估計？

設 $f(x)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 有連續二阶导数。置

$$s(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{f(a)+f(x)}{2}(x-a)$$

我們的目的，現在就变为求估計 $s(b)$ 的大小。将 $s(x)$ 求导两次得

$$s'(x)=\frac{f(x)-f(a)}{2}-\frac{f'(x)}{2}(x-a),\quad s''(x)=-\frac{f''(x)}{2}(x-a)$$

由此知

$$s'(a)=s''(a)=0$$

及

$$-\frac{M}{2}(x-a)\leqslant s''(x)\leqslant -\frac{m}{2}(x-a),$$

于此 M, m 分别为 $f''(x)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 的最大最小值。

将此不等式从 a 到 x 积分（据假設 $f''(x)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 連續，故 $s''(x)$ 是可积的），

由于 $\int_c^x s''(t)\,dt = s'(x) - s'(a)$ 而 $s'(a)=0$，得

$$-\frac{M}{4}(x-a)^2 \leqslant s'(x) \leqslant -\frac{m}{4}(x-a)^2。$$

再从 a 到 b 积分，由于

$$\int_c^b s'(t)\,dt = s(b) - s(a),\ 而\ s(a)=0,\ 得$$

$$-\frac{M}{12}(b-a)^3 \leqslant s(b) \leqslant -\frac{m}{12}(b-a)^3$$

也就是

$$-\frac{M}{12}(b-a)^3 \leqslant \int_c^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \leqslant -\frac{m}{12}(b-a)^3$$

将此結果应用到 $\langle a, b\rangle$ 的每一个子区間 Δ_i 上：

$$-\frac{M}{12}\Delta x_i^3 \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\Delta x_i \leqslant -\frac{m}{12}\Delta x_i^3$$

对所有 $i=1, 2\cdots n$ 加起来，并設 T 是 n 等分法，即

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n},$$

这样就得

$$-\frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2} \leqslant J - \Sigma \leqslant -\frac{m}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2} \qquad (3)$$

这就是我們所求的估計，这联立不等式还可写成一个等式。事实上，由于 $f''(x)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 連續，据介値性（参照积分中値定理証明）可知必存在一点 $\xi s \in \langle a, b\rangle$，使得

$$J - \Sigma = -\frac{f''(\xi)}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2} \quad (a \leqslant \xi \leqslant b) \qquad (4)$$

这式与(3)完全等价，但比(3)簡洁得多，最后，在 Σ 中将 $f(x_i)$ 写成 y_i，并注意 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$，我們遂有

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{1=i}^{n} y_i\right) \qquad (5)$$

而近似的誤差不超过 $\frac{\overline{M}}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}$，于此 $\overline{M}$ 表示 $|f''(x)|$ 在 $\langle a, b\rangle$ 的最大値，因此，要誤差不超过 $\varepsilon>0$，只須取 $n>\sqrt{\frac{\overline{M}(b-a)^3}{12\varepsilon}}$ 就行了。(当然 $\overline{M}$ 也可以换成 $|f''(x)|$ 在 $\langle a, b\rangle$ 的任何一个上界)。

作为例子，我們应用(5)来求

$$J=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

之近似值，取 $n=10$，并估計其誤差，首先让我們来估計这誤差，为此須求出 $\left|\left(\frac{1}{1+x^2}\right)''\right|$ 在 $(0, 1)$ 的一个上界，这是比較容易求的。例如 3 便是一个①。因此，誤差不超过 $\frac{3}{1200}=0.0025$，从而可知所求近似値可有两位小数数字是准确的。这样在近似値本身的計算中便須保証有 3 位有效小数数字。根据这考虑将各 y_i 的近似値求出(下面将 y_i 計算至 3 位小数，这和 y_i 的項数还有关系)：

$x=$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$y=\frac{1}{1+x^2}$	1.000	0.990	0.962	0.917	0.862	0.800	0.735	0.671	0.610	0.552	0.5

代入(5)得

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{1}{10}\left(\frac{1+0.5}{2}+0.990+0.962+\cdots+0.552\right)=$$

$$=0.785\pm10^{-3}$$

因为已知誤差 $\leqslant0.0025$，可見至少其前面两位(有效)小数数字是准

① $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)''=\frac{2(3x^4+2x^2-1)}{(1+x^2)^3}$，在 $(0,1)$ 分子分母都递增，分母 $\geqslant1$，但在 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，分子 $=0$。

故在 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，分子 $(\leqslant0)$ 的絕对値在 $x=0$ 最大，$=2$，分母則在 $x=0$ 最小，$=1$。因此，在这区間，分数的絕对値 $\leqslant\frac{2}{1}=2$。又在 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)$，分子在 $x=1$ 最大，$=8$，分母在 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 最小，$=\left(\frac{4}{3}\right)^4$，故在这区間上，分数的絕对値 $\leqslant\frac{8}{\left(\frac{4}{3}\right)^4}<3$，这当然也是整个 $\langle0,1\rangle$ 上的一个上界。

确的。事实上，我們从别的方面知道 J 的精确值为

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3.14159\cdots}{4}=0.78539\cdots$$

II. 抛物綫法 (Simpson 公式)

梯形法的基本精神在于，在相当小的区間 Δ_i 上用弦来代替曲綫 $y=f(x)$（或用綫性函数来插补 $f(x)$）。可是，当曲綫向上凹时，弦总位于曲綫上方，从而梯形面积大于曲边梯形面积（当 $f(x)\geqslant 0$ 时）。反之当曲綫向下凹时，一切适得其反。可見这方法并不完善。由此人們自然会想到，如果不用通过曲綫上两点的直綫段（弦）而用通过曲綫上三点的抛物綫段来代替 Δ_i 上的曲綫，也就是說，用二次三項式来插补 $f(x)$ 的話，那么，照理应該可得到更大的精确度。这样就产生了抛物綫法。

其法是将 $\langle a, b\rangle$ $2n$ 等分，对于每一对相邻的子区間 Δ_{2i-1}，Δ_{2i}，把其上的曲綫 $y=f(x)$ 用通过曲綫上 $P_{2i-2}(x_{2i-2}, y_{2i-2})$，$P_{2i-1}(x_{2i-1}, y_{2i-1})$，$P_{2i}(x_{2i}, y_{2i})$ 三点的抛物綫（有时也可退化为直綫），

$$y=\alpha_i x^2+\beta_i x+\gamma_i=p_i(x)$$

来代替，然后求此二次三項式（$\alpha_i=0$ 时，化为一次式）从 x_{2i-2} 到 x_{2i}

的积分，最后再加起来作为 $J=\int_a^b f(x)dx$ 的近似值。

$$J\approx\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} p_i(x)dx \tag{6}$$

虽然满足要求(通过已知的 $P_{2i-2}P_{2i-1}P_{2i}$ 三点)的各 $p_i(x)$ 都唯一存在，而且其系数也不难求出，但我們的目的本来是求它的积分，并不是求它本身，値得注意的是：只要知道 y_{2i-2}, y_{2i-1}, y_{2i} 那么，不須知道 $p_i(x)$ 也可将 $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} p_i(x)\,dx$ 求出。

事实上，对于任何二次三項式 $p(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 总有

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx=\left[\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+\gamma x\right]_{-1}^{1}=\frac{2\alpha}{3}+2\gamma=$$

$$=\frac{1}{3}[(\alpha-\beta+\gamma)+4\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)]=$$

$$=\frac{1}{3}[p(-1)+4p(0)+p(1)]$$

从而对任何 X 及 $\Delta x>0$ 通过代換 $x=X+t\Delta x$，并注意 $p(X+t\Delta x)$ 也是 t 的二次三項式，得

$$\int_{X-\Delta x}^{X+\Delta x} p(x)\,dx=\Delta x\int_{-1}^{1} p(X+t\Delta x)\,dt=$$

$$=\frac{\Delta x}{3}[p(p(X-\Delta x)+4p(X)+p(X+\Delta x)]$$

令 $p(x)=p_i(x)$, $X=x_{2i-1}$，并注意 $\Delta x=\frac{b-a}{2n}$，就得

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} p_i(x)\,dx=\frac{b-a}{6n}[p_i(x_{2i-2})+4p_i(x_{2i-1})+p_i(x_{2i})]=$$

$$=\frac{b-a}{6n}[y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}]$$

将此結果代入(6)，最后便得

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}\left[y_0+y_{2n}+4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right] \tag{7}$$

它称为 Simpson 公式，这样求出的近似值，在 $f(x)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 有連續 4 阶导数的假定下，其誤差可表达为

$$-\frac{f^{(IV)}(\xi)(b-a)^5}{2880\cdot n^4}\quad(a\leqslant\xi\leqslant b)$$

这一估計結果可和梯形法中的(4)完全同样地导出，随着 n 的增大，

这誤差如同 $\frac{1}{n^4}$ 一样的小下去，而用梯形法所产生的誤差只不过象 $\frac{1}{n^2}$ 一样的小下去，由此可見抛物綫法比梯形法远来得优越。如用公式(7)同样来計算 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$，并取 $n=5$，即同样地用到 11 个 y_i 值，但各計算至小数 7 位的話，将得到

$$\pi \approx 3.14159288 \quad (\pi = 3.14159265\cdots)$$

竟准确到 6 位小数之多。

§11. 广义积分

到目前为止，我們所学的定积分都是定义在閉区間上的，如果 $f(x)$ 只是定义在开区間 (a, b) 或半开区間 $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$ (a 可能是 $-\infty$, b 也可能是 $+\infty$) 的話，那么，談它在該区間的定积分就沒有意义。我們現在設法将定积分的定义首先扩充到这些非閉区間上来，这样就得到所謂广义积分。这种积分不仅它本身有很重要的应用，同时对于进一步掌握普通定积分的运算来說，也是不可缺少的

I. 最簡单的积分区間

我們知道当定积分

$$\int_a^b f(t)dt \quad (a<b) \tag{1}$$

存在时，积分函数的极限

$$\lim_{x\to b-}\int_a^x f(t)dt \tag{2}$$

必然存在而且等于(1)（积分函数的連續性）。可是当(1)不存在时，(2)却也很可能存在。

例如 $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ 不存在，因为不只是被积函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $x=1$ 无意义，而且更重要的是 $f(x)$ 在 $\langle 0,1\rangle$ 无界。尽管如此，

$$\lim_{x\to 1-}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

却存在。

又如 $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ 不存在，因为到現在为止，我們所学的定积分其积分区間必須是有限的，尽管如此，

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\lim_{x\to\infty}\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{2}$$

却存在。

这种情况給我們暗示了扩充定积分概念的一个办法。那就是：凡遇(1)在旧的意义之下不存在，可是(2)存在时，我們就不妨在新的意义之下定义(1)等于(2)。例如定义

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\lim_{x\to 1}\int_0^p \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{2}, \text{及}$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}=\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$$

这样定义的好处在于它使定积分的一个重要性質——积分函数的連續性在經过扩充之后仍旧得到保留，因而是和通常扩充一个概念时所一貫遵循的方針完全符合的。

由于在(2)的定义中我們所需要的，只是 $f(x)$ 在半开区間 $\langle a, b)$ 内的函数值。与 $f(x)$ 在 $x=b$ 是否有定义，根本沒有关系，所以根据(2)来定义的新的意义之下的(1)可看做是 $f(x)$ 在右半开区間 $\langle a, b)$ 内的定积分。

同样我們可以定义 $f(x)$ 在左半开区間 $(a, b\rangle$ 内的定积分，例如

$$\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\lim_{x\to -1+}\int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}=\lim_{x\to -\infty}\int_x^0 \frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}。$$

不过，我們也要注意，以上的办法并不是到处行得通的。例如要照样来定义 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1\rangle$ 或 $\langle 1, \infty)$ 的定积分：

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}, \text{ 或 } \int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

就不行，因为，虽然积分函数

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \text{ 或 } \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$$

是存在的，可是无論是 $x\to\infty$ 也好，或 $x\to 0$ 也好，积分函数的极限都不存在。

有了以上的准备之后，現在就可以給出如下的一般定义：

定义 1 設 $f(x)$ 定义在 $\langle a, b)$，b 可等于 ∞ (或在 $(a, b\rangle$，a 可等于 $-\infty$)，如果

1° 对任何 $x\in(a, b)$，$\int_a^x f(t)dt$ (或 $\int_x^b f(t)dt$ 都存在

2° $\lim\limits_{x\to b-}\int_a^x f(t)dt \left(\text{或} \lim\limits_{x\to a+}\int_x^b f(t)dt\right)=J$ 存在(有限)

則称 $f(x)$ 在 $\langle a, b)$ (或 $(a, b\rangle$) 广义可积，或它在該半开区間的广义积分 $\int_a^b f(t)dt$ 收斂，并称 J 为其值：

$$\int_a^b f(t)dt = J$$

如果 1°，2° 中有一个不滿足①，則称 $f(x)$ 在 $\langle a, b)$ (或 $(a, b\rangle$) 不可积，特別是 1° 滿足但 2° 不滿足时，称 $f(x)$ 在該半开区間的广义积分 $\int_a^b f(t)dt$ 发散。

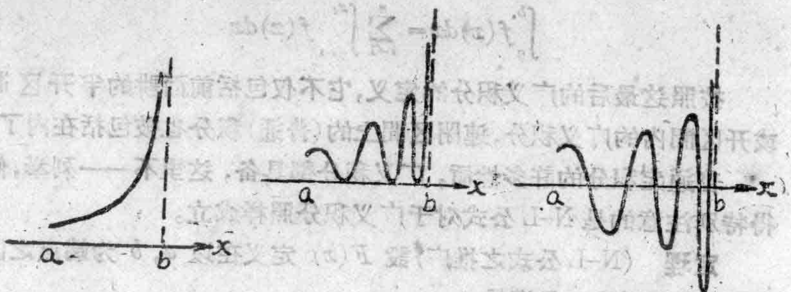
广义积分虽然是在普通定积分基础上来定义的，但在某些情形下，它和普通积分并沒有实质上的区别②。事实上，当 $f(x)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 可积时，由积分函数的連續性它在 $(a, b\rangle$ (或 $\langle a, b)$) 显然也广义可积，而且有相同的积分值，不仅如此，一般說来，只要 $f(x)$ 在有限区間 $\langle a, b)$ (或 $(a, b\rangle$) 有界并滿足 1°，就可断定它在該半开

① 当然，1° 不滿足时，2° 也就說不上。

② 在这情形下，从定积分的記号上看不出区別也沒有关系。

区間广义可积，而且其积分值等于随意定义 $f(b)$（或 $f(a)$）[①] 之后，在普通意义之下必然存在的 $\int_a^b f(x)dx$。这是因为当 $f(b)$（或 $f(a)$）随意定义之后，由于 $f(x)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 有界及 1° 的假定，§6 定理 2 的証明完全可以搬来証明 $f(x)$ 在 $\langle a, b\rangle$ 的可积性，从而归到上面提过的情形。

由此可知，对于有限的半开区間来說，只有当 $f(x)$ 无界时[②]，广义积分才具有眞正新的内容。进一步来看，如 $f(x)$ 在 $\langle a, b)$ 无界，由于 1°，它又在 $\langle a, x\rangle$ 有界不論 x 怎样近于 b，那么，它必在 (x, b) 无界，不論 x 怎样近于 b。这种在一点的任一左邻域都无界的函数，我們可称为"在該点靠左无界"（見图），于是只有当 $f(x)$ 在 b 点靠左无界时，它在 $\langle a, b)$ 的广义积分才具有眞正新的内容。关于半开区間 $(a, b\rangle$ 当然也有同样的情形。



II. 較一般的积分区間

現在我們設法将广义积分的定义从最簡单的积分区間，扩充到較一般的积分区間（包括开区間 (a, b) 在内）如果說剛才的扩充指导原則是連續性，那么，現在的扩充指导原則就是关于积分区間的可

① 如 $f(b)$（或 $f(a)$）原来就有意义，那当然不必多此一举。

② 在这情形下，从被积函数上已可显出广义积分与普通积分的区别，（一个无界，一个有界），故从定积分的記号上，看不出区別也没有关系。

③ I 的端点属于 I 时，可以是没有定义的点，不属于时，算做是没有定义的点。

加性（§7 定理4）。

定义 2 A 設 $f(x)$ 定义在开区間 (a, b)，c 为区間內某一点，$f(x)$ 在 $(a, c\rangle$ 及 $\langle c, b)$ 都广义可积，則称 $f(x)$ 在 (a, b) 广义可积，并以它在两个半开区間的广义积分的和为它在 (a, b) 的广义积分的值①

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

B. 設 $f(x)$ 在区間 I（类型不拘）至多只有有限个奇点，那就是指 $f(x)$ 的无界点或沒有定义的点② 它們将 I 划分为有限个子区間相应于分法，$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，如果 $f(x)$ 在每一个子区間（类型不拘）都广义可积或者（普通）可积，那么就称 $f(x)$ 在 I 广义可积，并以它在各子区間的广义积分或（普通）积分的和作为它在 I 的广义积分：

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

按照这最后的广义积分的定义，它不仅包括前面講的半开区間或开区間內的广义积分，連閉区間上的（普通）积分也被包括在內了。

普通定积分的許多性質，广义积分都具备，这里不一一列举，値得特别注意的是 N-L 公式对于广义积分照样成立。

定理 （N-L 公式之推广）設 $F(x)$ 定义在以 a, b 为端点之区間 I（类型不拘），且滿足。

1°. $F(x)$ 在 I 連續，当 I 的某一端点不属于 I 时，再假定 $F(x)$ 在該端点之片側极限存在，并将它作为該端点之函数值。

2° $f(x)=F'(x)$ 在 I 至多只在有限个点不存在或不連續

則 $f(x)$ 在 I 广义可积，且

---

① 注意 $\int_a^b f(x)dx$ 之値与 c 的选法无关，事实上，設 c' 为区間內另一点，不妨設 $c'<c$，那么总有 $\int_a^c+\int_c^b=\int_a^{c'}+\int_{c'}^c+\int_c^b=\int_a^{c'}+\int_{c'}^b$。

② 不属于 I 的 I 的端点，也算做是沒有定义的点。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

［証］ I 总可分介为有限个半开区間，使 $f(x)$ 在各个这种区間都連續。設 $\langle x_{i-1}x_i)$ 为这样一个区間，由于在这区間所含的每一个閉区間上，N-L 公式成立，以及 1°，故有

$$\lim_{x\to x_i}\int_{x_{i-1}}^{x} f(t)dt = \lim_{x\to x_i}[F(x) - F(x_{i-1})] = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

这就是說，$f(x)$ 在这区間广义可积，且

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

对于左半开的区間也有同样的結果。两边对 $i=1, 2, \cdots n$ 加起来，即得(3)

N-L 公式既經推广，那么，相应地也可将 §9 中的代换积分及分部积分两公式予以推广，① 即我們可以容許其中的 f, φ', u', v' 可在有限个点不存在或不連續②，同时积分是广义积分，只要将讀法改为：如果等号两边的积分有一个存在則另一个也存在而等式成立。这样一来，我們对于广义积分的計算，也就有了一定的工具了。至于一般地如何来判断广义积分收斂发散的問題，固然也很重要，但是由于它和級数的关系特别密切，故不如留待以后再講

例 1. 計算广义积分 $J=\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$。

解：

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha\neq 1 \\ \ln x & \alpha = 1 \end{cases}$$

故当 $\alpha>1$ 时

$$J = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1},$$

当 $\alpha\leqslant 1$ 时，J 发散。

① 因为两公式的导出，除了用到不定积分法中相应的公式而外，只是用到 N-L 公式。

② 但 φ, u, v 必須連續。