运筹学

郭友中　毛经中
潘光奎　刘　伟　主编

武汉工业大学出版社

运　筹　学

郭友中　毛经中
潘光奎　刘　伟　主编

武汉工业大学出版社

鄂新登字 13 号

内 容 简 介

本书通俗、简洁地介绍了运筹学的方法、原理及应用。对线性规划的卡玛卡算法、非线性规划的变分不等式方法、决策论的信息不全型方法及新分支——数据包络分析等近期重要成果作了详细介绍。每章末附有习题及文献，全书末附有大型应用案例.

本书可作为高等院校运筹学、应用数学、管理科学、系统工程、经济学及计算机科学等专业的基础课教材或教学参考书，也可作为管理、规划、评估及工程技术人员的入门书或代用手册.

运 筹 学

郭友中 毛经中 潘光奎 刘 伟 主编

责任编辑： 吴锦文 刘永坚
武汉工业大学出版社出版
（珞狮路 14 号 430070）
武汉钢铁学院印刷厂激光照排
湖北省供销学校印刷厂印刷

*

1992 年 7 月第 一 版　　开本： 780×1092 1/16
1992 年 7 月第一次印刷　　印张： 27
印数：0001 2,000　　字数： 679 千字

ISBN 7－5629－0639－4/O.26
定价：18.60 元

序

运筹学是一门新兴的应用科学,它的历史不是很长的.虽然现在作为运筹学内容的零星例子可以追溯到本世纪30年代或更早的时期,但运筹学作为一门学科,主要是在第二次世界大战期间成长起来的.特别是作为一种含义明确、发展迅速、有系统的理论,则还不到40年,就连它的名称的使用,至今还没有形成一致公认的最好称谓,常用的几种名称是源自军事术语的运筹学、运行分析、管理科学或系统分析.

一般认为,作为一种有组织的运筹学,始于1952年美国运筹学会的成立.1976年,美国运筹学会定义:运筹学是研究用科学方法来决定在资源不充分的情况下如何最好地设计人-机系统,并使之最好地运行的一门学科.1978年联邦德国科学辞典上的定义:运筹学是从事决策模型的数学解法的一门科学.前一定义强调应用的范围,后一定义注重的是数学方法.英国运筹学杂志则认为:运筹学是运用科学方法(特别是数学)来解决那些在工业、商业、政府和国防部门中,有关人力、机器、物资、金钱等大型系统的指挥和管理方面出现的问题的科学,目的是帮助管理者科学地决策其策略和行动.1935年,为了对付德国空中力量的威胁,英国科学家开始了一系列的紧张试验.他们从地面站发送出无线电波,然后检测来自敌机的反射波,以确定敌机的位置.这套飞机的定位和控制系统后来称为雷达系统.在波德塞(Baudsey)设立了专门的研究机构,并在沿海建立了一些雷达站.但在一次空防大演习中发现,由这些雷达站送来的信息常常是相互矛盾的,需要加以协调,以提高作战效能.于是又开始了新一轮的报警和控制系统、作战指挥和战果预测的研究和试验,这就是著名的宾京(Biggin)山试验.大概在1937年底,这两个(试验)系统合并起来,便成了作战控制的基本技术,又进一步提高了作战效能.1938年,Rowe在从事这项研究任务时,把它叫作Operational Research,直译为"作战研究".当时Rowe是英国波德塞科学小组的负责人,因而,我们应把波德塞作为运筹学的诞生地,而Rowe则是"运筹学"这一名词的创始人.

1940年,由一位后来因宇宙线方面的工作而获得诺贝尔奖的物理学家Blackett组成了一个被称为Blackett马戏团的运筹学小组,并在对付德军巨大的夜间空袭中提出了有效的防空技术.

美国投入二次大战后,它的海军和陆军空战兵团很注意在作战指挥部中成功地发挥科学家的作用.1942年,大西洋舰队反潜艇战指挥官Baker组织并领导了反潜艇战运筹组,也就是后来隶属于美国海军总司令部的运筹组的前身.而在这个运筹组中,有后来因晶体管方面的工作而获得诺贝尔奖的Willien Shockley等一批著名的科学家.战争结束时,海军运筹组的科学家人数已经达到70多位.美国陆军空战部队在Leach领导下建立的作战分析小组也超过了20多个.

加拿大皇家空军也在1942年采用了运筹学思想,并组织了三个运筹学小组.其中,以磁学专业方面的权威Johnson将类似英、美的运筹学思想用来解决地雷战问题,并应用于进攻性战术,从而在太平洋战争中起到了重大作用.

在二次大战中英国、美国和加拿大军队里的运筹工作人员已超过700人,研究者们肯定了

许多运筹学先驱者的功绩：如 Lanchester 在 1916 年的战争模型，Erlang 在 20 世纪初叶发展的排队论，等等．但这些先驱者的工作一直是孤立的．显然，作为一个有条理的专业领域的运筹学的起源，是从第二次世界大战中分析学家们的工作开始的．战后，部分运筹工作者转业到了地方，英国成立了一家民间"运筹学俱乐部"，定期开展讨论，促进了运筹学转入民用工业，可谓是开了军转民的先河．

1950 年，英国出现了第一份运筹学杂志，3 年后英国运筹学会成立．著作方面，有 1948 年出版的 Blaokete 的小册子《Operational Research》．1952 年出版的 Philip Morse 和 Kimball 的专著《Methods of Operations Research》．1957 年出版了一本重要的著作《Operationas Research》．该书是由三位卓越的研究者 Churmam、Ackoff 和 Arnoff 主编，作者在 14 人以上，代表了运筹学专家和创始者们在这一领域里的最新观点．这段时期带有运筹学发展初期的特征．

1962 年以后出版物大量出现，运筹学书籍达到数百种，专业期刊成倍增加，专业学会越来越多，论文数量急剧增加，可以说运筹学进入了大发展时期．

1957 年 9 月 25 日在牛津大学举行的第一届国际运筹学会议上，有 21 个国家的 250 名代表出席，会上作出了成立国际运筹学会联合会(IFORS)的初步计划．1959 年 1 月 1 日 IFORS 正式成立．它最初只有三个学会组成：英国运筹学会、美国运筹学会和法国运筹学会．联合会的第一任秘书长是 Charles Goodere．而现在 IFORS 已成为一个名符其实的世界性组织，会员国遍及全世界．

运筹学方面的第一种期刊是前述 1950 年 3 月创办的《运筹学季刊(Operational Research Quarterly)》，由英国运筹学俱乐部主办．Dacies 和 Eddison 任联合主编．据我们所知，现在全世界的运筹学期刊以及与运筹学工作有重要关系的杂志已达 40 多种．而各式各样的专著、会议录、研究报告犹似风起潮涌．

二次大战结束后，大多数运筹学工作者转业回到了战前的岗位，可是在军事服务部门仍旧保留了一个重要的核心，继续推动运筹学向前大步发展．一方面，加强了军队与地方的合作，如美国海军与麻省理工学院的合作，兰德公司的出现等等；另一方面，大批运筹学工作者及组织把运筹学研究的注意力转向了非军事方面的研究．这不但扩大了运筹学的研究范围，也极大地提高了运筹学的研究水平．如美国阿波罗及航天计划的实现，都包含与应用了运筹学的许多后期成果．

自从 1956 年运筹学引入我国以来，目前已有了 30 多年的发展历史，经历了曲折性的发展道路．目前，在我国已有了一支稳定的专业队伍，深入到了各个研究领域．我国运筹学工作者在老一辈数学家华罗庚先生等的倡导和长期努力下，已于 1980 年成立了中国数学会运筹学会，而且已成为亚太运筹学会联合会(APORS)会员，1982 年加入国际运筹学会联盟，并创刊《运筹学杂志》．1991 年 8 月将要在北京召开亚太运筹学会第二届大会(APORS91)．这标志着我国对运筹学的研究已经达到了相当高的水平．摆在我国运筹学工作者面前的任务就是：提高研究和应用水平，跨入世界先进行列；更重要的是利用运筹学为社会主义经济建设服务，为四化建设服务，努力开展运筹学的推广和普及工作，联系实际，取得一批有重大实效的成果．中国科技界参与世界高技术的角逐已十多年了．高技术是信息社会的产物，又促进信息社会的到来．高技术本质是一种数学化的技术，是物化了的数学技术；科学技术的现代化，某种意义上来说，是一种数学化．运筹学是数学结合社会经济发展的最有效的手段之一，我们要从实践中推动运筹学的进一步发展．

与所有自然科学发展的规律相同，运筹学的产生在于社会的需要，运筹学的发展，各个分支的建立，也源于迫切的社会需求.

本世纪40年代前后，苏联数学家 КАНТОРОВИЦ 为了解决二次大战中的运输问题，开始了对线性规划及整数规划的研究，Hitchcoock、Roopmars 为了研究生产组织，适应战争的需要，也都进行过独立的研究. 直到1947年 Daitzig 提出单纯形方法，才将它应用于与国防有关的诸如人员的培训，任务的分派等问题中去，由此导致线性规划(LP)作为运筹学中最先形成的部分而发展起来. 在今天，线性规划的应用已极为普遍. 在一些实际问题中，数千个变元、数千个约束方程的线性规划问题已很常见. 相对这种大系统或巨系统来说，不论变元多少，就其共有的特征来说，却仍是简单系统. 对于具有开放性或耗散性的非线性系统来说，尽管变元不多，却具有许多特殊的内涵，称之为复杂系统. 对复杂系统中的一些问题，又发展了线性规划的分解原则及算法. 随着大系统的计算复杂性的研究，又出现了椭球算法，以及 Karmarkar 算法. 目前对 Karmarkar 算法的研究已成为线性规划研究的热点，并进一步启发我们去寻求更有效的算法. 但实践证明，到目前为止，在数千个变元、数千个约束方程的规模以内，单纯形算法仍然是一个很有效的算法.

由 Euler 于1736年解决哥尼斯堡七桥问题而起源的图论，在其后的200年间都还只是个别地研究各种各样的问题. 1936年 Konig 写了一本叫《有限与无限图的理论(Theorieder Endlichen And Unendlichen Graphen)》的书后，人们才正式承认图论是一门学科. 在它应用到通讯网络的设计与分析、电网络分析、印刷电路板分析、信号流图与反馈理论、计算机流程图、时间表问题、最佳生产线等许多方面之后，图论才作为运筹学的一个分支迅速发展起来.

本世纪40年代后期，由 John(1948年)开始系统研究，很快形成了非线性规划这个学科. 1951年 Kuhn 和 Tucker 两人发表了非线性规划的基本定理，此后非线性规划的研究工作便如雨后春笋.

Johannsen 关于"等待时间和呼唤次数"(首次发表于1907年，1910年重印于 Post Offiee Electrical Engineers Journal London)的论著是关于排队论的第一篇文章. 不幸的是，该文所用的方法在数学上是不严格的. 因此，从严格意义上讲，有历史意义的文章是 Erlang 的"概率论与电话会议"(Nyt Tidsskrift for Maternatik, B, 20, 1909, P. 33). 排队论起源于电信系统，即使时到今天，它依旧是排队论的主要应用领域.

决策论或后来叫做决策分析的早期工作，至少在本世纪30年代就开始了，其主要问题集中于假设检验的显著性方面. 但一般认为，瓦尔德(Wald)建立的统计决策理论(1950)是决策论的重要先驱. Ramsey(1931)首先提出了主观概率和效用理论交织在一起的决策思想. 在不确定性方面，Definetti(1973)对主观概率的结构作了重要的贡献，而决策论的现代效用理论是由 Von Neumann 与 Morgenstern(1944)各自独立地发展起来的.

对策论的思想，早在1920年左右就出现过. 但系统地研究对策论，则始于 Von Neumann 和 Morgenstern(1944年). 推动对策论的研究仍然是对经济冲突的分析研究，军事上的应用，心理学及社会科学上的需要等. 二次世界大战中，为了满足军事上有效使用飞机和军舰来寻找敌人水下潜艇的紧迫需要而形成了搜索论(Search Theory). 这是一门运筹学的分支. 由于运筹学模型中有许多随机因素，或者无法准确地建立一个结构化模型；由于高速、大型电子数学计算机的出现，于是又产生了一种模拟理论及计算，发展了计算机仿真系统；由于多阶段决策问题的出现，导致对动态规划的研究. 如此等等，可以说运筹学的各个分支都是在社会实践(生

产、运输、军事、决策等）过程中提出了需要的推动下而产生并发展的. 今后运筹学要获得发展，也必须与社会实践紧密结合.

运筹学发展到今天，已成为分支学科众多的一个繁荣昌盛的大家族. 其主要分支有：属于数学规划的不同侧面的各个分支——线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、目标规划、随机过程与排队论、图与网络流、效用理论、决策分析、对策论与对策模拟、搜索论、计算机模拟（仿真）、数据包络分析等十多个分支，每个分支都可写出一本厚厚的专著，并列出几百篇重要的参考文献. 运筹学的应用又是如此之广泛，这个家族的产业覆盖了行政、军事、能源、投资、医疗、保健、科技、教育、资源、运输、环境、城建、规划、企业、旅游、社会等各个行业中所遇到的各种各样的问题.

系统工程是在信息论、控制论和运筹学的交点上产生和发展起来的. 管理科学中，要作出一个正确的决策，也必须使用运筹学给出一个定量的分析. 运筹学实际是系统工程、管理科学的演绎核心手段及基础. 可以毫不夸张地说，如果没有运筹学的发展，便不可能建立现代意义下的系统科学，也不可能有科学的管理. 因而，是不是可以这样说：凡从事系统工程研究、从事管理科学研究和处在管理岗位上的各级工作者和领导，都需要了解、学习甚至研究有关的运筹学分支. 发展我国的社会主义经济建设，提高全体国民的素质，走向世界，开展国际经济竞争，扩广和普及运筹学知识也是十分必要的. 我们相信，随着我国经济体制改革的深入发展，运筹学的研究与应用将会出现一个新的时期.

由于运筹学迅猛发展，各学科交互渗透，内容日新月异，在人才培训和完成城市航空、遥感、科技、经济、社会综合规划方法与案例研究工作的需要上，提出了编著一本包括运筹学学科前沿的近期重要成果在内的新书的任务. 这本新的运筹学，既要通俗易懂，又不能繁琐平淡；既可适用于不同层次或方面的各种需要，又能适合于深入研究或复杂应用的导向要求. 诚然，要编著一本既是什么又是什么，既不是什么又不是什么的书籍，不是一件容易的事情，而要使它得到方方面面的赞同与认可，也许更加困难. 衷心感谢学术界的前辈、同行和领导一贯的鼓励和支持，终于使我们有了勇气来作这次尝试.

三段式方法是为适应上述目的而设计的一种编写方式. 我们在每章的编写中，都基于如下的三段. 一段是方法与应用（直接介绍有关方法及应用实例），这部分内容可作为财经、工程、管理等各种非运筹学专业的大学生（含大专生）的运筹学教材；也可供在各级领导岗位上从事管理和规划工作的同志、工程技术人员用作学习运筹学的一本入门书籍或应用手册. 再一段是原理及证明（深入介绍各种方法的理论基础及依据）. 这两段结合使用，可作为大学运筹学专业的教材；也可作为财经、工程、管理等专业硕士生的选修教材. 另一段是历史与发展（简介发展史及进一步研究的运筹学内容）. 三段结合使用，可作为运筹学专业硕士生教材或部分非运筹学专业的博士生教材. 其中较难部分用 * 号标出. 分割的三段在全书力求融汇成一个有机的整体.

作为教材的需要，我们在每章末尾都附有相应的习题. 作为进一步深入研究与应用的导向，我们在每章末尾还附设了一定数量的参考文献. 而作为全书的总附录，我们则选编了运筹学应用的一些实例.

本书希望做到的另一个特色在于新：它尽可能多地包含了运筹学各分支学科的近期重要成果，或指出了详细介绍某些成果的重要文献. 如在线性规划一章中，就包含了属于新成果的 Karmarker（1984）算法. 就一般而言，它是一个仅在上万个变元及约束方程的大型线性规划的

实际计算中才优于单纯形算法的多项式算法.而在决策论一章中,则详细介绍了近十多年才逐步完善起来的新决策方法——信息不全型决策(Decision Making Under Condition Of Incomplete Knowledge).它不但算法十分简单,且较传统的风险型及不定型决策具有更广阔的应用范围及前景.在非线性规划中,包含了新近发展起来的变分不等式方法(Methed of Vaviation Inequalities).而数据包络分析(Data Enrelopment Analysis,简记为DEA)一章是运筹学的一个新的研究领域.1978年,由Chames.A等人提出了第一个DEA模型(称为C^2R模型),用来研究具有相同类型(或相同"行业")的有限多个单位(称为决策单元)之间的相对有效性(称为DEA有效性)问题.从生产函数的角度看,它是研究有多个输入,特别是多个输出的生产部门同时是规模有效及技术有效的有效方法之一.1985年、1986年及1987年,Chames等人又分别提出了另外三个DEA模型(分别称为C^2GS^2模型、C^2W模型、C^2WH模型).这四个模型都可以看作是处理有多个输入和输出的多目标决策方法.而DEA有效性与相应的多目标规划问题的Pareto解(或支配解)是等价的.而在实用方面,Charnes等人提出的DEA模型可用于对学校、医院、政府、企业等效率的评定,可以在决策作出之前去预测决策后果(如某新厂建立后,新厂对已有工厂的有效性),还可以用来进行政策评价.且由于该方法是纯技术性的,因而也会在我们社会主义国家得到广泛应用.

本书各章执笔的分工如下:第一章,毛经中、李德英(华中师范大学数学系);第二章,周月梅(中南财经大学信息系);第三章,郭友中(武汉工业大学工业与应用数学研究所)、吴建春(武汉水利电力学院水动系);第四章,网络分析,朱求长(武汉大学管理学院经管系);第五章,詹明清(武汉工学院管理工程系);第六章,曾金晖(中国地质大学经管系);第七章,刘伟(武汉大学管理学院管理科学研究所)、胡志根(武汉水利电力学院管理工程系);第八章,熊伟(武汉工学院管理工程系);第九章,谢科范(武汉工学院管理学院);第十章,潘光奎(中国科学院武汉数学物理研究所);第十一章,周树民(武汉工业大学数学物理系),第十二章,郭友中(武汉工业大学工业与应用数学研究所)、张小兰(武汉水利电力学院建工系).应用实例由潘光奎、周树民、刘春同志选编.周树民、谢科范、熊伟、张小兰、周月梅同志为编写本书还做了大量的编务工作.

最后,向教导、支持、关心、帮助和鼓励我们的各位老师、学长和朋友们表示衷心的感谢!对在本书的出版、编辑、校对、绘图、印刷过程中付出了辛勤劳动的蒋春生、胡亨铎、朱连川、祁惠珍、徐前进、柳燕桥、李放中、叶微、杨怡、廖明东、李学冬等同志,表示由衷的谢意.

郭友中

1991年8月于武汉

目　　录

第六章 目标规划

第七章 排队论与模拟

第八章 存储论

第九章 对策论

第十章 决策论

第十一章 搜索论

第十二章 数据包络分析

第一章　线性规划

1.1　线性规划问题及一般模型

1.1.1　线性规划的实际例子

线性规划(Linear Programming 简称 LP)是数学规划的分支之一．其特征为它的目标函数是一个线性函数．约束条件也能表示成一组线性不等式．线性规划的创立可追溯到本世纪40年代初期．现在已成为运筹学中相当成熟的一个部分．线性规划方法目前已广泛应用到企业管理、生产计划、工程设计及经济决策等方面．由于有关的计算机软件的大量出现．线性规划方法的应用范围将会越来越广泛．

例 1.1　投资问题．设某银行有 100 万元人民币．欲用这笔钱的一部分去贷款．另一部分则购买证券．贷款利息为 10%．证券的利润为 5%．由于银行经营的需要(因证券可依市价出售)．希望证券部分至少占 25%；另一方面．银行又有确定的大主顾．需保证他们能得到贷款．估计他们需要贷款总额至少为 30 万元．问如何分配资金可获得最大的利润？

为解决这个问题．设贷款总额为 x 万元．证券总额为 y 万元．则总利润为 $(0.1x+0.05y)$ 万元．我们的目标是求 x．y 值以使线性函数 $f=0.1x+0.05y$ 的值达到极大．但须满足下列条件：① 非负性：$x\geqslant 0$．$y\geqslant 0$；② 总资金约束：$x+y\leqslant 100$；③ 流动性约束．$y\geqslant (x+y)\times 25\%$．或者 $x-3y\leqslant 0$；④ 贷款平衡约束．$x\geqslant 30$．问题即成为在约束条件 ①—④ 下求 $\max(0.1x+0.05y)$．

例 1.2　下料问题．某车间有一批圆钢．长为 5.8 米(数量足够多)．需切成长为 2.9 米、2.1 米、1.5 米的坯料各 100 根．试制订一个截切方案．使所消耗的整根圆钢数达到最少．

为此．先分析一根整圆钢有多少种截切方法．其结果如表 1.1 所示．

表 1.1

截切方法	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
2.9m 长坯料数	2	1	1	0	0	0
2.1m 长坯料数	0	1	0	2	1	0
1.5m 长坯料数	0	0	1	1	2	3
余料长度(m)	0	0.8	1.4	0.1	0.7	1.3

设有一截切方案．其中用第 j 种方法截切的圆钢总数 x_j 根．则这一方案所消耗圆钢的整根数为 $f=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$．每个有序非负整数组 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ 即表示一种方案．由于要求切出的各种坯料均为100根．故应有

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3 &= 100 \\ x_2+2x_4+x_5 &= 100 \\ x_3+x_4+2x_5+3x_6 &= 100 \end{aligned} \tag{1.1}$$

于是问题归结为在约束条件(1.1)下求有序非负整数组 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ 使 f 达到极小．

例 1.3 饮食问题. 假定我们每天可食用的食品共有 n 种, 编号为 $1,2,\cdots,n$. 我们每人每天食用的第 i 种食品的量记为 x_i, 自然 $x_i\geqslant 0$, 对 $1\leqslant i\leqslant n$. 如果每克（或其他单位）食品 i 的售价为 C_i, 则我们每天的饮食费用为 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_ix_i$, 自然我们希望它达到极小值.

但一个合理的饮食须保证最低的营养（如热量、蛋白质、脂肪和维生素等）摄入量, 不同的食品所含各种营养成分的比例显然不一定相同. 设 a_{ij} 是单位食品 j 所含营养成分 i 的单位数, $1\leqslant i\leqslant m$, b_i 是营养成分 i 的每人每天最低需要量. 因此, 合理的饮食必须满足下列条件对 $1\leqslant i\leqslant m$ 均有 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i$. 于是, 问题化成求 $\min f=\sum\limits_{i=1}^{n}C_ix_i$ 且满足约束条件

$$\begin{cases}\text{对 } 1\leqslant i\leqslant m, \text{ 均有 } & \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i\\ \text{对 } 1\leqslant j\leqslant n, \text{ 均有 } & x_j\geqslant 0\end{cases}$$

例 1.4 运输问题. 设有三个仓库 A_1、A_2、A_3 分别贮存某种物资 70、60、90 吨, 联合供应 4 个销售点 B_1、B_2、B_3、B_4, 各地的需要量分别为 30、70、55、65 吨. 从仓库 A_i 到销售地 B_j 的每吨物资运费如表 1.2 所示. 问应如何调运这批物资, 使在满足各种销售地需求的前提下使总运费达到极小值?

表 1.2

仓库	销地 B_1	销地 B_2	销地 B_3	销地 B_4
仓库 A_1	3	11	4	12
仓库 A_2	15	8	2	7
仓库 A_3	9	5	12	6

设从仓库 A_i 运到销售地 B_j 的物资量为 x_{ij}, 则总运费为

$$\begin{aligned}f=&3x_{11}+11x_{12}+4x_{13}+12x_{14}+15x_{21}+8x_{22}+2x_{23}+7x_{24}\\&+9x_{31}+5x_{32}+12x_{33}+6x_{34}\end{aligned}$$

我们的目标是求出一组 x_{ij} 的值使 f 值达到极小. 由于在本例中 3 个仓库所存物资总量恰好等于 4 个销售地的需要量, 故诸 x_{ij} 须满足下列（共 3 类）条件:

(1) 供应点条件. 从仓库 A_i 运出的物资量总和应等于 A_i 所存物资总量, 因而必须有

$$\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=70\\x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60\\x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=90\end{cases}$$

(2) 销售点条件. 运入销售地 B_j 的物资总量应等于 B_j 的需求, 因而又必须有

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=30;\quad x_{12}+x_{22}+x_{32}=70$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=55;\quad x_{14}+x_{24}+x_{34}=65$$

(3) 非负性条件. 物资调运量 x_{ij} 均为非负数, 即对 $1\leqslant i\leqslant 3$, $1\leqslant j\leqslant 4$, 均有 $x_{ij}\geqslant 0$.

线性规划的实例还可以举出许多. 上述 4 个比较典型而且已经显示出如何把一个最优化问题化成一个线性规划问题. 下面我们讨论线性规划的一般形式.

1.1.2 线性规划问题的数学模型

分析前面所给出的 4 个例子, 可以发现它们的共同特点是都有一个线性目标函数, 都包含两类约束条件: 一类是由问题中各个量之间须满足的关系式导出的一组线性等式或线性不等

式约束．另一类则是由变元的性质导出的非负性约束．因而我们把线性规划问题的标准形式规定为[1]求

$$\min f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & 1 \leqslant i \leqslant m \\ x_j \geqslant 0, & 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \tag{1.2}$$

如果引入向量和矩阵记号，记

$$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T, \quad X = (x_1, \cdots, x_n)^T, \quad b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

则线性规划的标准形式可写为

$$\min f = C^T x$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 C，b，A 中诸分量（元素）均为固定的实数．而且假定（必要时将该方程式两边同乘以－1）诸 b_i 均为非负数．x 为 n 维列向量，b 为 m 维列向量，C 是 n 维列向量．$x \geqslant 0$ 的意义表示 x 的每个分量均为非负．

现在说明如何把其他形式的线性规划问题化为标准形式．

（1） 约束条件的标准化——松弛变元法．

例 1.5 设有线性规划问题：

$$\min f = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 10x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 100(x_1 + x_2 + x_3) + x_4 = 100 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 \geqslant 4 \\ 40x_1 + 10x_2 + 6x_4 \leqslant 80 \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

约束条件中有两个不是等式约束．为了把它们转变成等式约束，可引入两个新变元 x_5，x_6，称为松弛变元，而把约束条件改成如下标准形式：

$$\text{s.t.}\begin{cases} 100(x_1 + x_2 + x_3) + x_4 = 100 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ 40x_1 + 10x_2 + 6x_4 + x_6 = 80 \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, 6 \end{cases}$$

显然，所引入的变元 x_5，x_6 的值反映了两个不等式约束中左边表达式与右边值的差额．

（2） 自由变元的处理．

例 1.6 设有线性规划问题：

1） s.t. 是 subject to 的缩写，其意义为"受约束于"．

$$\min f = x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中对变元 x_3 没有非负性要求，这样的变元称为自由变元．而在标准形式中要求每个变元都为非负．为此，有两种办法可供选择．其一，作代换：

$$x_3 = x_3' - x_3'',\ x_3',\ x_3'' \geqslant 0$$

显然，$x_3' \geqslant x_3''$ 时，$x_3 \geqslant 0$；$x_3' < x_3''$ 时，$x_3 < 0$．于是问题变为

$$\min f = x_1 + x_2 + 2x_3' - 2x_3''$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3' - x_3'' = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' = 12 \\ x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3' \geqslant 0,\quad x_3'' \geqslant 0 \end{cases}$$

其二，直接用解方程的办法把自由变元消去．比如从第一个约束方程中解出

$$x_3 = 5 - 4x_1 + 3x_2$$

将它代入目标函数及其他约束条件后将问题变为

$$\min f = 10 - 7x_1 + 7x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 = 7 \\ x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

须注意的是：从不同的约束方程中解出自由变元，所得到不含自由变元的线性规划问题的形式也可能彼此不同，但其最优解必然相同．

(3) 目标函数的转化．事实上，由于对任一函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有

$$\max f(x_1,\cdots,x_n) = -\min[-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$$

故我们可仅局限于研究极小化问题．

1.1.3 两变量线性规划问题的图解法

当一个线性规划问题只含两个变元时，我们可利用解析几何的办法作图，求出其解答．现用以下例题说明．

例 1.7 再次研究投资问题．在例 1.1 中已经说明它可化为如下线性规划问题：

$$\max f = 0.1x + 0.05y$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x + y \leqslant 100 \\ x - 3y \leqslant 0 \\ x \geqslant 30,\quad y \geqslant 0 \end{cases}$$

在 xoy 平面上，作出直线 $x+y=100$，$x-3y=0$，$x=30$，它们两两相交得 P，Q，R 三交点如图 1.1 所示．由解析几何知识不难知道，位于三角形 PQR 内部（阴影部分）及边界上的每一点的坐标（x，y）均满足所有这些约束条件．因而我们称 $\triangle PQR$（边界及其内点）为可行解集．

问题成为在 $\triangle PQR$ 限定的区域内找一点（内点或边界点）$M(x,y)$，使得 $f=0.1x+0.05y$ 达到最大可能的值．为此，我们作出 $0.1x+0.05y=$ 常数的平行直线族，这些直线的每一

条上各点坐标 (x,y) 均给出相同的 $(0.1x+0.05y)$ 值. 考察这些斜率 -2 的直线族. 显然它们距原点 o 越远,所对应的常数值越大. 因而可知,过点 R 的直线给出了最大可能常数值,而且此直线与 $\triangle PQR$ 仅有一个公共点 R. 于是得出最优解 $R(75,25)$.

结论是,用 75 万元去贷款,用 25 万元去买证券,可得到的利润为 8.75 万元,为最大可能利润.

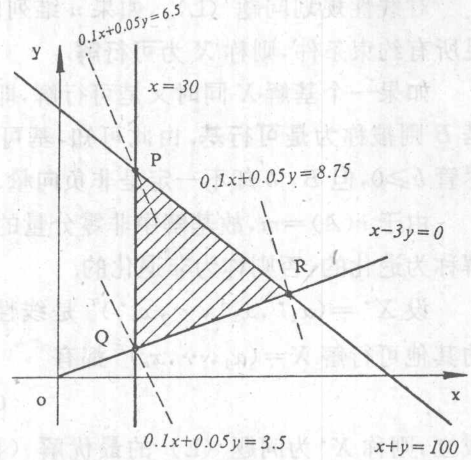

图 1.1

由此可以看出,用图解法解含两个变元的线性规划问题的步骤是:① 将约束条件中的不等号改为等号,从而得出一组方程;② 依次作与各个方程对应的直线;③ 依据约束条件中不等号的方向,找出满足约束条件的点所属的平面区域及其边界;④ 移动目标函数的等值线,直到找出最优解(或发现没有最优解)为止.

1.1.4 标准形式的线性规划的基本解与最优解

前面提到了最优解,可行解集等概念,但至今尚未给出它的明确意义,现就说明这一点.

设有标准形式的线性规划问题:

$$(\mathrm{L})\quad \min f = C^T X$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 C 是 n 维列向量;X,b 分别为 n,m 维列向量;$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是 $m\times n$ 矩阵. 而且不失一般性,假定已经去掉多余的约束,或者 $r(A)=m$,即 A 的秩为 m 且 $m\leqslant n$.

A 的任一个 $m\times m$ 阶子方阵 B,如果是满秩的(即其相应行列式 $\det(B)\neq 0$),则称 B 是问题(L)的一个基. 换言之,A 的任意 m 个线性无关的列组成的子方阵 B 即是(L)的一个基. 对所选定的基 B 而言,如果变元 x_i 所对应的列含在基 B 中,则称 x_i 为**基变元**. 否则称 x_i 为**非基变元**. 含于 B 的 A 中的列称为**基列**.A 中的其余 $(n-m)$ 个列向量均称为**非基列**.

将矩阵 A 的第 i 列记为 A_i,现设我们从 A 中选取 m 个线性无关的列组成基 B,且不妨设所取的是 A 的前 m 列,即 $B=(A_1,A_2,\cdots,A_m)$,这时约束方程组 $AX=b$ 也可以写成

$$\sum_{i=1}^{m} x_i A_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_j A_j = b$$

如果令 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$,且记基变量为 $X_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$,则得方程组

$$\sum_{i=1}^{m} x_i A_i = b \quad \text{或} \quad BX_B = b \tag{1.4}$$

因 $\det(B)\neq 0$,故方程组(1.4)有唯一解

$$X_B = B^{-1}b \quad \text{或} \quad (x_1,\cdots,x_m)^T = B^{-1}b$$

于是得到(1.3)中约束方程组 $AX=b$ 的一个解

$$X = (x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$$

称它为线性规划问题(L)的相应于基 B 的一个**基解**(或基本解).

显然,一个线性规划问题的基解的个数是有限的,至多有 $n!/m!(n-m)!$ 个.

对线性规划问题（L），如果 n 维列向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 满足 $AX=b$ 及 $X\geqslant 0$，即满足所有约束条件，则称 X 为**可行解**.

如果一个基解 X 同时又是可行解，即它的诸分量均为非负，则称 X 为**基可行解**，其相应的基 B 则被称为是**可行基**. 由此可知，基可行解一定是基解. 但基解不一定是可行解. 原因在于尽管 $b\geqslant 0$，但 $B^{-1}b$ 却不一定是非负向量.

由于 $r(A)=m$，故基解中非零分量的个数至多为 m 个. 如果非零分量个数小于 m，则该基解称为**退化的**，否则称为**非退化的**.

设 $X^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$ 是线性规划问题（L）的一个可行解，而且对任一个（L）的其他可行解 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 都有

$$C^TX^*\leqslant C^TX$$

成立，则称 X^* 为问题（L）的**最优解**（显然，如果问题（L）是求 $\max f=C^TX$ 时，要求上式改为 $C^TX^*\geqslant C^TX$ 成立）. 如果又恰好有某个基 B^* 使 X^* 是相应于 B^* 的基解，则称 X^* 为**基最优解**.

现在通过一个例子说明上述概念.

设有线性规划问题：

$$\min f=-2x_1-x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3 & =5 \\ -x_1+x_2+2x_4 & =0 \\ 3x_1+2x_3+x_5 & =20 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

这时矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当取 A 的前 3 列组成矩阵 $B_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 时，因 $\det(B_1)\neq 0$，知 B_1 形成一个基. 对应的基变元是 x_1，x_2，x_3，非基变元是 x_4，x_5. 令 $x_4=x_5=0$，解出 $x_1=x_2=-10$，$x_3=25$，于是得基解 $x^{(1)}=(-10,-10.25,0,0)$，因不满足非负性条件，因而不是可行解. 如果取 A 的第 1,4,5 列组成矩阵 $B_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则因 $\det(B_2)=2\neq 0$，故 B_2 也是一个基，对应的基变元是 x_1，x_4，x_5，非基变元是 x_2，x_3. 令 $x_2=x_3=0$，解出 $x_1=5$，$x_4=5/2$，$x_5=5$，因而得基解 $x^{(2)}=(5,0,0,5/2,5)$，因它满足非负性条件，故它也是一个可行解，因而也是一个基可行解. 又向量 $x^{(3)}=(2,1,2,1/2,10)$，显然满足所有约束条件，故它是一个可行解. 但其中非零元个数大于 3，显然不是基解.

实际上 $x^{(2)}$ 也是基最优解，因为从约束条件中可以解出 $x_1=5-x_2-x_3$ 代入 f 的表达式中得到 $f=-2x_1-x_2=-10+x_2+2x_3$，注意到 $x_2\geqslant 0$，$x_3\geqslant 0$，显然 $\min f=-10$.