LINEAR PROGRAMMING

线性规划

◎张香云 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

线性规划

张香云　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRES
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性规划／张香云主编. —杭州：浙江大学出版社，2009.12

ISBN 978-7-308-07211-3

Ⅰ.线… Ⅱ.张… Ⅲ.线性规划—高等学校—教材 Ⅳ.0221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 216075 号

线性规划

张香云　主编

责任编辑　余健波
封面设计　吴慧莉
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　12.5
字　　数　280 千
版 印 次　2009 年 12 月第 1 版　2009 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-07211-3
定　　价　24.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88925591

内容简介

本书是在作者多年使用讲稿的基础上，结合参编者的教学经验修订而成。为了方便教与学，本书从应用实例出发，系统讲述了线性规划的概念和方法。因此既适用于普通本科院校、专科院校经济与管理等有关专业的线性规划课程使用，也可作为管理人员的自学参考书。当然，具体内容可根据各校教学时数酌情取舍，其中带“*”的部分可作为选讲内容。

全书共分七章，包括：绪论、线性规划问题的数学模型、线性规划问题的标准形、线性规划问题的图解法、单纯形法、对偶规划、灵敏度分析与参数规划、运输问题的特殊解法等。每章都配有一定数量的练习题，书末附有全部练习题的参考答案，以供学习者参考。

本书由张香云主编，胡桂华、张立溥为副主编。黄敏、宋红凤、李太勇为本书编委。

前　言

本教材主要为管理学、经济学等专业本科生而编写，也可以作为其他专业的学习参考书.在本书的编写过程中，主要体现了如下几个特点：

1.线性规划已经具有成熟的理论与方法，本书既力争在内容形式上保持理论体系的完整性，也尝试使用几何直观来解释其概念与方法，努力做到推导严谨、通俗易懂。

2.内容由浅入深、理论结合实际。比如通过实例讨论，引入逐步逼近最优解的迭代思想与方法，并由此导出单纯性方法原理；在单纯性方法的基础上，给出了不同的优化求解方法，并分析了各种方法之间的联系与差别。

3.突出课程特点，注重实际应用。例题、习题选取新颖，紧密结合经济与管理专业的实际需要，为学生学以致用、理论联系实际，培养学生解决实际问题的能力奠定基础。对于手工计算求解的题目，则重点突出方法训练，而尽量避免复杂运算或大量重复运算的现象。

4.本书安排了必修内容和选修内容，可满足40学时或48学时的教学要求。每章内容之后配有适量练习题，并在全书后面安排了总练习题。既满足基本概念、基本方法的训练，也为学生全面复习提供了基本素材。

本书在编写中受到了教研室同仁的大力支持，浙江大学出版社为本书的顺利出版付出了大量劳动，在此表示衷心感谢！

由于水平有限，书中可能存在一定的错误或不足之处，敬请读者或同行批评指正。

编　者

2009年10月

目　录

绪论

一、线性规划问题的由来

线性规划是最优化问题的重要领域之一. 很多运筹学的实际问题都可以用线性规划形式来表述. 线性规划问题的某些特殊情况,例如网络流问题和多商品流量问题,具有非常重要的实际意义,以致产生了许多专门的算法研究. 许多其他种类的优化算法中,也都用到了将问题分拆成线性规划的子问题,然后再分别求解的方法. 历史上,由线性规划引申出的有关概念,启发了最优化问题的核心概念,比如对偶、分解、凸性等等. 同样地,在微观经济学和商业管理领域,线性规划被广泛地应用于收入极大化和成本极小化问题的求解.

从总体上讲,线性规划的理论与方法发源于 20 世纪初、发展于 20 世纪中,完善于二战后期、成熟于冷战时期. 线性规划的理论与方法构成了军事运筹学的基础,不仅在军事领域获得了巨大成功,同时也在经济决策领域、科学研究以及其他领域都获得了普遍应用.

在我国古代,很早就产生和运用了运筹学的思想和方法. 不仅"系统考虑,全局统筹"的哲学思想贯穿于历代思想家的观念之中,而且涌现了以著名军事家孙子为代表的杰出人物. 汉高祖刘邦盛赞其谋士张良"运筹帷幄,决胜千里"的典故,也为大家耳熟能详.

对线性规划理论和方法作出贡献的国外科学家主要有:

乔治·丹泽格(George Dantzig)被认为是线性规划之父. 他在 1947 年发表的关于线性规划方法的研究成果中,提出了求解线性规划问题的单纯形法. 该算法在实际中得到了巨大应用,并被誉为 20 世纪的十大算法之一. 我们将在本书中作重点讲述.

康托洛维奇于 1939 年提出了类似于线性规划的数学模型,并给出了"乘数解法"的求解方法. 1960 年,他又发表了《最佳资源利用的经济计算》一书,受到了国内外的普遍重视,为此,康托洛维奇还获得了诺贝尔奖.

二、线性规划问题的应用范围

线性规划的方法有着非常广泛的应用领域. 无论在什么场合或情况下,只要存在

选择的机会，几乎都可以运用线性规划的理论和方法进行方案优化.

1. 企业营销策划

只要产品对用户而言具有价值，就一定有市场；但是有市场并不能保证入市者都能赚钱. 要想成为同行业者的佼佼者，除了产品要有好的质量、低的成本、优质的服务外，还需要有好的营销策划.

2. 产品生产计划

在通常的企业中，生产计划往往需要与营销计划相配合，但生产计划却不能简单地随着营销计划而执行. 因为产品的发展有两个基本驱动力，一个是市场需求，另一个是技术革新. 前者具有技术的盲目性，后者具有市场的盲目性，单靠哪一个因素为牵引来制定生产计划，都有可能导致企业走向失败. 于是在技术驱动和市场牵引的诸因素之间，需要进行某些优化选择.

3. 采购与库存管理

采购与库存管理通常与减少资金挤压和减少损耗相联系，既要保证生产线和销售系统不间断地连续运行，又要保证不积压过量的资金和增加商品库存，就需要统筹考虑产、供、销各个环节的衔接优化问题.

4. 物流管理

对于物流成本占总成本比例较高的行业，需要认真考虑优化物流方案，否则利润将被物流费用所吞噬.

5. 理财与投资

产品经营只是企业经营的一半内容，资本与资产经营是企业经营的另一半内容. 如何理财、如何投资，已经成为企业经营者必须面对的日常决策课题. 而资产运作和资本运作恰恰是高风险、高回报的业务，策划得当，收益颇丰；策划不当，损失巨大. 因此优化和运筹在该领域发挥着巨大的作用.

另外，在人事管理、综合评价、设计优化、宏观经济调控、城市管理、农业种植等等方面，规划和统筹都可以发挥巨大作用.

总而言之，凡是能用线性约束来限制其内部运行规则，并具有明确的线性优化目标的问题，都可以用线性规划的方法去求解. 但是当方程中含有二次或者二次以上方幂的变量，或者变量不随其他因素变化而变化，以及变量不具有确定性取值规则的问题，则不属于线性规划的范畴.

三、求解线性规划问题的基本原则

求解线性规划包括几个基本步骤，我们概括如下：

首先是提出问题并进行抽象，这是整个规划过程中最关键的一步. 它需要确定优化的目标、明确约束的条件、决策的变量以及已知资源的参数. 如果在这个过程中出现

错误，那么整个规划就会变得毫无意义或者出现严重错误. 因此，必须对所求问题有一个全方位的、透彻的了解和把握，要明确已知因素、未知因素是什么，约束条件有那些，规划的目标是什么等等.

这里重要和困难的是对问题的抽象过程. 问题的抽象过程实际上是一个透过现象看本质的过程. 不同的立场与观点，所看到的问题本质也会不同. 因此，对问题进行正确抽象是利用线性规划方法获得正确判断与选择的根本性基础.

其次要建立科学合理的数学模型. 根据前一步抽象的结果，按照线性规划模型的构成规则，把决策变量、约束条件和资源参数之间的关系等，用恰当的数学式子表示出来，并确定建立上述各因素之间严格的数学关系.

再次是求解和检验结论的过程. 也就是用数学方法对所建立的数学模型进行求解，并对所求得的解进行验证；对解的验证主要依靠与问题相关的专业知识与常识，与客观规律相违背的结果可能来源于前面数学模型或者输入数据的错误.

最后是对解的灵敏度分析和应用. 一般来说，线性规划的问题随着某些资源变化会发生相应的变化. 灵敏度分析就是通过一些科学的算法，确认求解过程中各种参量的变化范围，了解最优解随某些参数的变化而变化的信息. 在整个过程的最后，需要将获得的结果返回到实际问题之中去解决实际问题. 如果实际问题的外部环境与内部因素发生了显著变化，则应该及时回到第一步，修正抽象条件和数学模型，重新求解，以便及时调整规划内容，适应变化了的新情况.

第一章　线性规划问题的数学模型

一、线性规划问题的数学模型的定义

我们首先给出数学模型的定义. 数学模型是关于部分现实世界和为了某种特殊目的而作出的一个简化的抽象结构. 具体来说，数学模型就是为了某种目的，用字母、数字及其他数学符号建立起来的等式或不等式，或者图表、图像、框图等描述客观事物的特征及其内在联系的数学表达式. 例如：

(1)物理学中描述速度、距离与时间要素之间的关系式是 $v=\frac{s}{t}$，反映的是物体运动速度与物体运动距离、运动时间之间的抽象关系. 它与具体的物体是什么、在哪儿运动、在运动中物体的内部结构是否能保持不变等因素无关.

(2)牛顿第二定律 $F=ma$ 反映的是：作用在物体上的力、物体的质量和物体运动的加速度这三种物理参数间的抽象关系，它反映的是被研究物体在力学方面的本质属性.

在现实世界中，被各类抽象模型所描述的事物，往往包含比模型本身所揭示的规律丰富得多的内容. 抽象的模型往往要通过许多假设来使其简单化，真实的事物运动规律很少能绝对满足模型所假设的各种前提条件或要求.

在(1)中，绝对的均匀速度在现实生活中是不存在的；而在(2)中，一般物体往往要受多种力的作用，其互相作用的力通常表现为某种复杂形式的总和.

数学模型的特点包括以下几个方面：

(1)一个数学模型必须揭示 2 个或 2 个以上参数之间的某种关联关系.

(2)一个模型所揭示的参数必须可以用确定的文字、图像、数字、表格等进行描述.

(3)模型的各个参数之间，其关联关系能用相等、不相等、大于、小于、包含等各种关系式来描述.

数学模型大致上可以分成两大类. 按照变量本身的特性来划分，包括确定性变量模型、随机性变量模型、连续性变量模型、离散型变量模型等；而按照变量之间的关系去划分，包括代数方程模型、微分方程模型、概率统计模型、逻辑模型等.

线性规划的模型是由一个含有等式或不等式的代数方程组，以及一个具有求极值

关系的代数表达式复合而成. 通常将包含的变量取值范围和代数方程组称为约束条件,表示极值关系的代数式称为目标函数.

构成一个线性规划模型,首先是求解的问题所包含的每个决策变量都是确定的,其取值范围必须已知,并且问题所包含的决策变量总数是有限的. 其次,每一种资源的数量、每一种决策变量利用相关资源的约束系数都必须确定. 最后,不同决策变量对于某种资源的需求之和与该种资源的现有总量相对应,并且每一类现有资源的总量与相关决策要素对该类资源的总需求相比所获得的关系也是确定的. 这些必要性条件称为约束条件. 另外,还必须有一个确定的、期望达到的目标,并且这个目标可用对全部或者部分决策变量与相关价值系数的乘积之和(称为目标函数)来表达.

如果模型中包含多个目标函数,则称该模型为多目标线性规划模型;如果模型中包含一个或多个二次方幂以上的变量,则称之为非线性规划模型.

如果模型中包含一个以上的变量随时间变化而变化,则称该模型为动态规划模型.

本书所讨论的模型限制为单目标静态线性规划模型. 我们在下一节重点介绍经济管理中常用的线性规划模型,并通过实例来详细解释以上各种条件.

二、线性规划问题的数学模型

在生产实践中,经常会遇到如何利用现有资源来安排生产,以取得最大经济效益的问题. 此类问题构成了运筹学的一个重要分支——数学规划,而线性规划(Linear Programming,简记 LP)则是数学规划的一个重要分支. 自从 1947 年 G. B. Dantzig 提出求解线性规划的单纯形方法以来,线性规划在理论上日趋成熟,在实用中也日益广泛与深入. 特别是随着用计算机处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题实现之后,线性规划的适用领域更加广泛,已经成为现代管理中经常采用的基本方法之一.

我们首先从认识线性规划的模型开始.

1. 线性规划问题的实例

例 1　(生产计划问题)某机床厂生产甲、乙两型机床,每台机床销售后的利润分别为 4000 元与 3000 元. 生产甲机床需用 A、B 两种机器加工,加工时间分别为每台 2 小时和 1 小时;生产乙机床需用 A、B、C 三种机器加工,加工时间为每台各 1 小时. 若每天可用于加工的机器时数分别为 A 机器 10 小时、B 机器 8 小时和 C 机器 7 小时,问该厂应生产甲、乙机床各几台,才能使总利润最大?

设该厂生产 x_1 台甲型机床,生产 x_2 台乙型机床时总利润 s 最大,则上述问题的数学模型为

$$\max s = 4000x_1 + 3000x_2 \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_2 \leqslant 7 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

这里变量 x_1, x_2 称为决策变量，(1.1)式被称为该问题的目标函数，(1.2)中的几个不等式是问题的约束条件. 决策变量、目标函数、约束条件构成了规划问题数学模型的三个要素. 由于上面的目标函数及约束条件均为线性函数，故被称为线性规划问题.

总之，线性规划问题是在一组线性约束条件的限制下，求线性目标函数最大或最小的问题.

综上所述，我们总结线性规划模型的三要素如下：

(1)决策变量：需要决策的量，即待求的未知变量；

(2)目标函数：需要优化的量，即欲达的目标，用决策变量的线性式子表示；

(3)约束条件：为实现优化目标需要受到的限制，用决策变量的等式或不等式表示.

注意：线性规划模型的目标函数和约束条件均为决策变量的线性表达式，如果模型中出现形如 $x_1^2 + 2\ln x_2 - \dfrac{1}{x_3}$ 的非线性表达式，则不属于线性规划问题.

在解决实际问题时，把问题归结成一个线性规划的数学模型，是最重要、但往往也是最困难的一步. 模型建立是否恰当，直接影响到问题的求解；而决策变量选取的是否适当，则是建立有效模型的关键. 下面继续举例说明如何建立线性规划的模型.

例 2 （生产计划问题）某工厂用三种原料生产三种产品，已知条件如表 1-1，试制订总利润最大的生产计划.

表 1-1

产品 / 原料	产品 Q_1	产品 Q_2	产品 Q_3	原料可用量（公斤/日）
原料 P_1	2	3	0	1500
原料 P_2	0	2	4	800
原料 P_3	3	2	5	2000
单位产品的利润（千元）	3	5	4	

解 可控因素：设每天生产三种产品的数量分别为 x_1, x_2, x_3；

目标函数：即每天最大的生产利润，如这里的利润函数表为 $3x_1 + 5x_2 + 4x_3$；

约束条件：每天原料的需求量不超过可用量，

原料 P_1：$2x_1 + 3x_2 \leqslant 1500$

原料 P_2：$2x_2 + 4x_3 \leqslant 800$

原料 P_3：$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 2000$

蕴含约束：产量为非负数 $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

综上，所建立的线性规划模型为

$$\max s = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 1500 \\ 2x_2 + 4x_3 \leqslant 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 2000 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}.$$

例 3 （人力资源分配问题）某昼夜服务的公交路线，每天各时间段所需司机和乘务人员的人数如表 1-2.

表 1-2

班次	时间	所需人数	班次	时间	所需人数
1	6:00—10:00	60	4	18:00—22:00	50
2	10:00—14:00	70	5	22:00—2:00	20
3	14:00—18:00	60	6	2:00—6:00	30

设司机和乘务人员分别在各时间段开始时上班，并连续工作 8 个小时，问该公交线路怎样安排司乘务人员，既能满足工作需要，又使配备的司乘务人员人数最少？

解 设 x_i 表示第 i 班次开始上班的司乘务人员数. 于是可以知道在第 i 班工作的人数应包括第 $i-1$ 班次时开始上班的人数和第 i 班次开始上班的人数. 如表 1-2 为 $x_1 + x_2 \geqslant 70$. 按照要求，这六个班次开始上班时的所有人员最少，即要求 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ 最小. 于是所建立的数学模型为

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} x_1 + x_6 \geqslant 60 \\ x_1 + x_2 \geqslant 70 \\ x_2 + x_3 \geqslant 60 \\ x_3 + x_4 \geqslant 50 \\ x_4 + x_5 \geqslant 20 \\ x_5 + x_6 \geqslant 30 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, 6 \end{cases}$$

例 4 （配料问题）某工厂要用三种原料 1，2，3 混合调配出三种不同规格的产品

甲、乙、丙，产品的规格要求、单价、每天能够供应的原料数及原材料单价如表1-3和表1-4.该厂如何安排生产，才能使利润最大？

表 1-3

产品名称	规格要求	单价/(元/公斤)
甲	原材料1不少于50% 原材料2不超过25%	50
乙	原材料1不少于25% 原材料2不超过50%	35
丙	不限	25

表 1-4

原材料名称	每天最多供应量/公斤	单价/(元/公斤)
1	100	65
2	100	25
3	60	35

解 设 x_{ij} 表示第 i 种(我们分别用 $i=1,2,3$ 表示产品甲、乙、丙)产品中原材料 j 的含量.例如，x_{23} 就表示产品乙中第3种原材料的含量.我们的目标是要使利润最大，利润的计算公式如下：

$$\text{利润}=\sum_{i=1}^{3}(\text{销售单价}\times\text{该产品的数量})-\sum_{j=1}^{3}(\text{每种原料单价}\times\text{使用原料数量}),$$

故得

$$\begin{aligned}\max s &= 50(x_{11}+x_{12}+x_{13})+35(x_{21}+x_{22}+x_{23})+25(x_{31}+x_{32}+x_{33})\\ &\quad -65(x_{11}+x_{21}+x_{31})-25(x_{12}+x_{22}+x_{32})-35(x_{13}+x_{23}+x_{33})\\ &=-15x_{11}+25x_{12}+15x_{13}-30x_{21}+10x_{22}-40x_{31}-10x_{33}.\end{aligned}$$

从表1-3可知

$$\begin{aligned}&x_{11}\geqslant 0.5(x_{11}+x_{12}+x_{13})\\ &x_{12}\leqslant 0.25(x_{11}+x_{12}+x_{13})\\ &x_{21}\geqslant 0.25(x_{21}+x_{22}+x_{23})\\ &x_{22}\leqslant 0.5(x_{21}+x_{22}+x_{23})\end{aligned},$$

而从表1-4可知：加入产品甲、乙、丙的原材料不能超过原材料的供应数量的限额，所以又有

$$\begin{aligned}&x_{11}+x_{21}+x_{31}\leqslant 100\\ &x_{12}+x_{22}+x_{32}\leqslant 100,\\ &x_{13}+x_{23}+x_{33}\leqslant 60\end{aligned}$$

整理即得该问题的数学模型：

$$\max s = -15x_{11} + 25x_{12} + 15x_{13} - 30x_{21} + 10x_{22} - 40x_{31} - 10x_{33}$$

$$\begin{cases} 0.5x_{11} - 0.5x_{12} - 0.5x_{13} \geqslant 0 \\ -0.25x_{11} + 0.75x_{12} - 0.25x_{13} \leqslant 0 \\ 0.75x_{21} - 0.25x_{22} - 0.25x_{23} \geqslant 0 \\ -0.5x_{21} + 0.5x_{22} - 0.5x_{23} \leqslant 0 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \leqslant 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leqslant 100 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leqslant 60 \\ x_{ij} \geqslant 0, i = 1,2,3; j = 1,2,3 \end{cases}$$

例 5　(投资问题)某部门现有资金 200 万元，计划五年内投资如下：

项目 A：从第一年到第五年每年年初均可投资，当年底能收回本利 110%.

项目 B：从第一年到第四年每年年初均可投资，次年底收回本利 125%，但规定每年投资额不能超过 30 万元.

项目 C：第三年初需要投资，到第五年底能收回本利 140%，但规定每年最大投资额不能超过 80 万元.

项目 D：第二年初需要投资，到第五年底能收回本利 155%，但规定最大投资额不能超过 100 万元.

针对上述情况，如何确定这些项目每年的投资额，才能使得第五年底拥有资金的本利金额最大？

解　这是一个连续投资问题. 其步骤为：

(1)确定变量

设 x_{ij} 为第 i 年初投资于项目 j 的金额(单位：万元)，根据给定条件，将变量列于表 1-5.

表 1-5

年份和项目	1	2	3	4	5
A	x_{1A}	x_{2A}	x_{3A}	x_{4A}	x_{5A}
B	x_{1B}	x_{2B}	x_{3B}	x_{4B}	
C			x_{3C}		
D		x_{2D}			

(2)约束条件

因为项目 A 每年都可以投资，并且当年底就能收回本息，所以该部门每年都应把自己的资金投出去，不应当持有呆滞资金. 因此

第一年：该部门年初有资金 200 万元，故

$$x_{1A}+x_{1B}=200;$$

第二年：因第一年给项目 B 的投资要到第二年底才能收回，所以该部门在第二年初拥有资金仅为该项目 A 在第一年投资额所收回的本息 $x_{1A}\times 110\%$，故

$$x_{2A}+x_{2B}+x_{2D}=1.1x_{1A};$$

第三年：第三年初的资金额是从项目 A 第二年投资和项目 B 第一年投资所回收的本息总和 $1.1x_{2A}+1.25x_{1B}$，故

$$x_{3A}+x_{3B}+x_{3C}=1.1x_{2A}+1.25x_{1B};$$

第四年：同以上分析，可得

$$x_{4A}+x_{4B}=1.1x_{3A}+1.25x_{2B};$$

第五年：$x_{5A}=1.1x_{4A}+1.25x_{3B}$.

另外，对项目 B,C,D 的投资限额分别为

$$x_{iB}\leqslant 30, i=1,2,3,4$$

$$x_{3C}\leqslant 80$$

$$x_{2D}\leqslant 100.$$

(3)目标函数

此问题要求在第五年底该部门所拥有的资金额达到最大，即目标函数最大化：

$$\max z=1.1x_{5A}+1.25x_{4B}+1.40x_{3C}+1.55x_{2D},$$

这样可以得到如下的数学模型

$$\max z=1.1x_{5A}+1.25x_{4B}+1.40x_{3C}+1.55x_{2D}$$

$$\begin{cases} x_{1A}+x_{1B}=200 \\ x_{2A}+x_{2B}+x_{2D}=1.1x_{1A} \\ x_{3A}+x_{3B}+x_{3C}=1.1x_{2A}+1.25x_{1B} \\ x_{4A}+x_{4B}=1.1x_{3A}+1.25x_{2B} \\ x_{5A}=1.1x_{4A}+1.25x_{3B} \\ x_{iB}\leqslant 30, i=1,2,3,4 \\ x_{3C}\leqslant 80 \\ x_{2D}\leqslant 100 \\ x_{ij}\geqslant 0 \end{cases}$$

例 6 （套裁下料问题）某工厂要做 100 套钢架，每套钢架需要长度分别为 2.9m，2.1m 和 1.5m 的圆钢各一根. 已知原料每根长 7.4m；问应如何下料，可使所用原料最省？

解 最简单的做法是：在每根原料上截取 2.9m、2.1m 和 1.5m 的圆钢各一根组成