點綫面體量法詳論

徐韞知編

蔡元培題

五〇五七上
時代

中華民國二十四年八月初版

周

(56218)

學叢書 點線面體量法詳論一冊

每冊定價大洋伍角
外埠酌加運費匯費

編纂者　徐韞知

發行人　王雲五
上海河南路

印刷所　商務印書館
上海河南路

發行所　商務印書館
上海及各埠

(本書校對者殷師竹)

序

誰都不能否認"量法"在日常生活方面的廣大用途,誰都不能否認"量法"在高深科工方面的相當地位,其實不僅這樣,就從量法的性質,內涵而言,它也顯然自成一個一貫的系統,而有單獨研究的必要.

其次,再從事實方面來考驗:我們教天算或工程的人,每每感到大學的同學對於形體的量法,知識異常零碎,而缺乏一種有系統的明晰的認識.這一個事實自然是由於他們高中時代的準備未能充分;換句話說,他們僅憑高中算術和幾何學中一點片斷的量法知識,當然是不夠的.

所以,在他們進修高深課程之先,我時常將"量法"的原理和應用對他們作一個系統的講述;這就輯成了本書.就中理論方面多採自 Weber Todhunter 和吾師 Dr, Prof. Hilbert 諸氏的論著;所有習題則就實用有關者選編;並在書末附有答案,以便讀者驗算.但是日常生活中,儘不少我們還沒有收羅到的和量法有關的問題,我希望能夠隨

時有增訂的機會.

最後,書名上冠點線面體四字,不過使讀者一目了然本書的內容,其實"量法"二字就已含有"點""線""面""體"四字在內了.

徐韞知　二十三年,十月

點線面體量法詳論

第 一 編

幾 何 學 與 量 法

無論在純理的科學或實用的工程各方面，關於度量空間的問題；都是一種最基本的研究.

高深的暫不必提起，即以淺易的初等數學和物理學言，空間度量實就已佔有一個重要的部位.

將度量空間的問題作一系統的研究，就是"量法"，或稱"求積法 (Mensuration)". 換句話說，"量法"就是計算"長度, (Lengths)", "面積 (Areas)" 和 "體積 (Volumes)" 的一切法則. "長度" "面積" "體積" 等，都是一種幾何形或體；所以直截說 "量法" 就是幾何形體的量法.

學習 "量法" 之先，讀者應該對於算術中加減乘除四則開方等演算和符號，有相當的準備，除此以外，當然還應具備一些幾何學方面的知識.

本書為便利初學起見，除算術的材料用不着贅說外，特別在本編提述一點用得着的幾何學知識.讀者如已習過幾何學，不妨利用它作復習.要是讀者僅懂得算術，倘未習過幾何學，那麼這一點材料也足夠使他對幾何形體的性質，有相當的認識；而且這種認識就是學習量法必須具備的先決條件.

本編共分三章：第一章專解釋各種平面形的定義；二三兩章就是關於這類平面形的定理和問題.這三章所有材料在"量法"上，都大有用處，讀者應特別注意.

一 定義

§1. 我們通常所謂的"點"(Point)和"線"(Line)其實在幾何學上，卻另有一種嚴格的解釋.

通常對於"點"的表示係在紙上用墨筆畫一小點，這樣畫出來的點雖極細微，究竟仍有相當的大小；而在幾何學上，"點"只有位置，並無大小.

"線"可分為"直線(Straight line)"和"曲線(Curved line)"兩種.通常係用畫極狹的一條"直線"或"曲線"，來代表它們.但是在幾何學上，卻像"點"一樣，"線"根本就

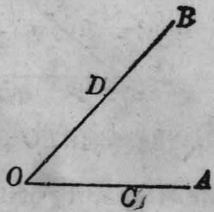
沒有寬度.

§2. 常見的還有一個"面(Surface)"字."面"分砥平和彎曲二種.幾何學上的"平面(Plane surface)"即指砥平的面而言.這所謂的面並沒有"厚".

§3. 歸納上述的定義;所以我們可以說:"點"沒有"長""寬"或"厚";"線"只有"長";"面"只有"長"和"寬"."立體(Solid body)"旣有"長"和"寬",並且有"厚";在第四編,我們就可以說到.現在將四個定義;列成一表,以便記憶.

		t	x	y	z	
		點	線	面	體	
位置	t	×	×	×	×	
長	x	—	×	×	×	(×)代表"有"
寬	y	—	—	×	×	(—)代表"無"
厚	z	—	—	—	×	
		一	二	三	四	
(空間度數)		零度	一度	二度	三度	

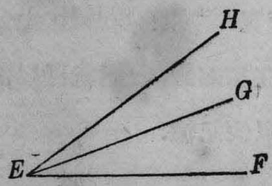
§4. "角"(Angle)就是不在一直線上兩相交線傾斜的度數.如圖,在O點相交的AO, BO二直線即成一角.



成這個角的直線長短縱有變更,角卻完全不變;所以 CO 和 DO 所成角與 AO 和 BO 所成角相同.

§5.　如果在一點只作成一角,這個角就可以用角點的那個文字來表示: 例如前圖的角,就可以說做 O 角.

如果在一點作成多角,每個角就得用三個文字來表示: 角點的文字居中,其他兩個文字用成角的二線的文字,即取每一直線上的一個文字. 如圖 FEG 表 FE 和 GE 所成的角; GEH 表 GE 和 HE 所成的角; FEH 表 FE 和 HE 所成的角.



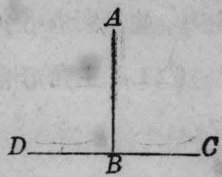
§6.　如果成一角的二直線及角點和成另一角的直線及角點,恰可彼此疊合; 這二個角就叫做"相等 (Equal)". 如圖,設 BC 與 EF 相疊, B 落在 E 上,並且 BA 與

ED 相疊, 則ABC 角就叫做等於於 DEF 角. 我們對於角相等 (Equality of angle) 應該存這樣清楚的一個觀念: 讀

還可以實在用紙切成兩個等角，疊合以作試驗．但是在幾何學內，卻須在疊合法之外，設法證明兩角相等．

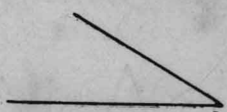
§7.　假設在第五節圖內，FEG 角等於 GEH 角；則 FEH 整個角等於 FEG 的兩倍．同理可以明白某角爲他角三倍，四倍等所指的意義．

§8.　當一直線在他線上所成兩隣角相等時，每個角就叫做一"直角 (Right angle)" 在他線上的這條線就叫做垂直於 (Perpendicular to) 他線．

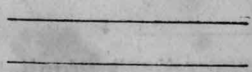


如圖，設 ABC 角等於 ABD 角，每個角就是一直角，AB 就是垂直於 DC．

"鈍角(Obtuse angle)"就是大於直角的一個角．



"銳角(Acute angle)"就是小於直角的一個角．



§9.　"平行直線(Parallel-lines)" 就是同在一平面上，無論怎樣延長不相交的直線．

§10.　"直線形" (Rectilineal figure) 是直線作界限的

圖形；圖形的這種界限就叫做“邊 (Sides).”

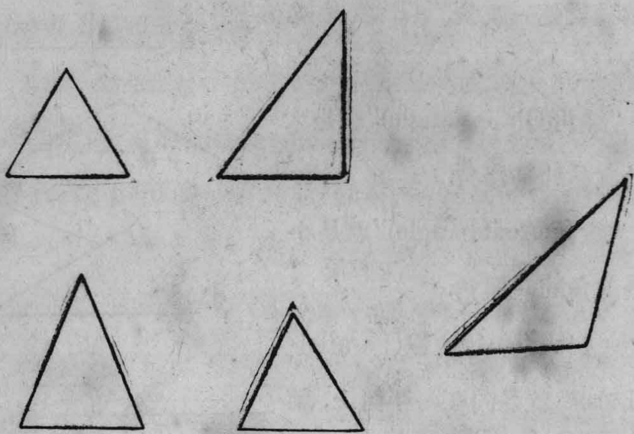
一個“三角形 (Triangle)” 爲一有三邊的直線形.

一個“四邊形 (Quadrilateral)” 爲一有四邊的直線形.

在四邊以上的直線形；叫做“多邊形” 又叫做“多角形 (Polygon)”；如有五邊,就叫做“五邊形(Pentagon)”, 有六邊,就叫做“六邊形 (Hexagon)”, 由此類推,

一個“正多邊形” (Regular polygon) 所有各邊；都彼此相等, 並且所有各角也彼此相等.

§ 11. 三角形有許多種類, 所用名稱如下：



“等邊三角形”, (Equilateral triangle) 就是各邊都相等的三角形.

"等腰三角形, (Ilsosceles triangle)" 就是有兩邊相等的三角形.

"直角三角形 (Right angled triangle)", 就是有一角爲直角的三角形.

在一個直角三角形內,爲方便起見,"邊"這個名稱只限於"夾"直角的二直線;對直角的直線另叫做斜邊, (Hypotenuse).

"鈍角三角形 (Obtuse triangle)" 就是內中有一個鈍角的三角形.

"銳角三角形 Acute triangle)" 就是三角都爲銳角的三角形.

§ 12. 四邊形也有許多種類, 所用名稱如下:

"平行四邊形 (Parallelogram)" 對邊彼此平行並且相等.

"矩形(又叫長方形) (Rectangle)" 就是四角都成直角的平行四邊形.

"正方形 (Square)" 就是四邊都相等的"矩形".

"菱形 (Rhombus)" 是各邊相等而各角不成直角的"平行四邊形".

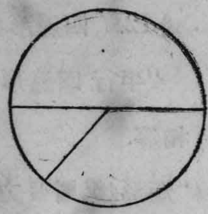
"梯形 (Trapezoid)" 有兩邊平行.

§ 13. 一個三角形的任一邊, 都可以叫做 "底 (Base)"; 如此, 這個三角形的 "高 (Height)", 就是從對角頂點所作至 "底" 的垂直線.

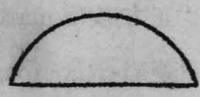
一個 "平行四邊形" 的任一邊, 都可以叫做 "底"; 如此, 這個平行四邊形的 "高", 就是從對邊任一點所作至 "底" 的垂直線.

§ 14. 一個四邊形的 "對角線 (Diagonal)" 就是聯兩對邊的直線. 在一多邊形內, 聯任何不相鄰兩角的直線, 也叫做這個多邊形的對角線.

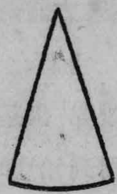
§ 15. "圓(Circle)"是以叫做"圓周(Circumference)". 爲界的平面形; 並且在圓內有一點, 與圓周上各處的距離都是相等的. 這個點叫做 "圓心 (Centre of the circle)".



一個圓的 "半徑"(Radius) 就是從圓心作到圓周上的直線.



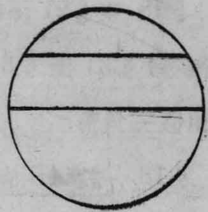
一個圓的 "直徑 (Diameter)" 就是所作經過圓心, 並且兩端在圓周上的直線



一個圓的"弧(Arc)"是圓周的一部分.

一個圓的"弦(Chord)"是聯一個弧的兩端的直線.

一個圓的"弓形(Segment")是一個弦和所截弧所界的圖形.



一個圓的"扇形"(Sector)是以兩半徑和它們中間的弧爲界的圖形.兩個半徑所成的角;叫做扇形的角.

一個圓的"帶(Zone)"就是兩平行弦中間所包含的圓的一部分.

二　定　理

§16. 現在有一些重要的幾何學知識我,們應該在先牢記;這些知識在幾何學上,都有很詳盡的解說和證明;讀者如有時間,最好將幾何學翻開來對照參看.不過現在限於篇幅,我們卻未能逐條詳細證明;並且爲便利初學記憶起見,每個定理的解釋;都着重在簡單和扼要二點.

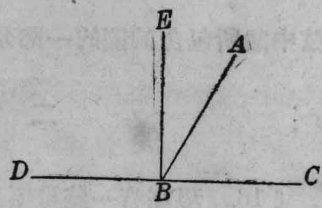
有許多定理差不多無需證明本身卽可了解;有許多定理本來就是很簡單的;還有許多須得經幾度實際的度量

後，方能得眞實的結果.

§ 17. 我們現在選述的只是全部研究中的最重要的幾點 但是由這些範例. 我們對這方面基本的原理卽可以得到相當的領會，而且進一步，並可以因此增進讀者更深徹的知識.

§ 18 至 § 21 係關於“角”方面；§ 22 至 § 27 關於面積相等；§ 31 至 § 33 關於“圓”的性質；§ 34 至 § 38 關於相似三角形.

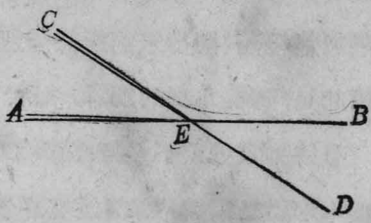
§ 18. 設 AB 直線在 CD 直線一邊成角 ABC 與 ABD，則此二角之和爲二直角.



因爲如使 BE 垂直於 DC，這樣 ABD 角，就是 ABE 和 EBD 二角之和；因此 ABC 和 ABD 二角等於 ABC，ABE 和 EBD 三角之和.

但是 EBD 是一直角，並且 ABC 和 ABE 二角的和 EBC，也是一個直角.

所以 ABC 和 ABD 二角共等於二直角.



§ 19. 設 AB 和 CD

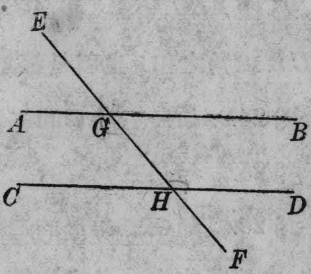
二直線相交於 E; 則 AEC 角等於 BED 角, 及 AED 角等於 BEC? (即對頂角相等).

因爲由 § 18, AEC 和 CEB 合共等於二直角; 同樣 CEB 和 BED 也等於二直角. 所以 AEC 和 CEB 合共等於 CEB 和 BED, 結果, AEC 角應等於 BED 角.

同理, 我們能夠證明, AED 角等於 BEC 角.

AEC 和 BED 二角; 叫做"對頂角" (Vertically opposite angles); 還有 AED 和 BEC 二角亦然.

§ 20. 設 EF 直線與 AB, CD 二平行線相交: 則 EGB 角等於 GHD 角, BGH 角與 GHD 角之和等於二直角.



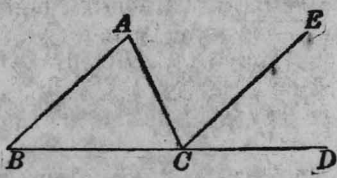
§ 21. 因爲由 § 19, EGB 角等於 AGH 角, 所以從前節第一段得爲, AGH 角等於 GHD 角: 這樣的角叫做"錯角" (Alternate angles).

同樣, BGH 角等於錯角 GHC.

§ 22. 設 ABC 三角形之一邊 BC 延長至 D; 所成外

角 ACD 等於兩內對角之和.

因爲, 假設自 C 作 CE 平行 BA. 由 § 20; ECD 角等於 ABC 角; 由 § 21, ACE 角等於 BAC 角. 這樣 ACD 整個角就等於 ABC 和 BAC 二角之和.



§ 23. 任何三角形三內角之和都等於二直角.

因爲由 § 22, ABC 和 BAC 二角之和等於 ACD 角.

這樣 ABC, BAC 和 ACB 三角之和, 就等於 ACD 和 ACB 二角之和; 也就是等於二"直角" (應用 § 18).

§ 24. 如一三角形的二邊相等, 其對角亦必相等.

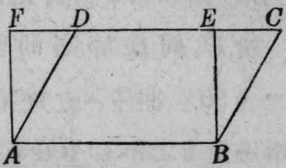
§ 25. 如一三角形的二角相等, 其對邊亦必相等.

§ 26. 如一三角形的二邊與他一三角形之二邊各相等, 二邊所夾之一角亦相等, 則兩三角形全等. 簡略記號用 (*s.a.s.*)

§ 27. 如一三角形的二角與他一三角形之二角各相等, 並且有一鄰邊亦與他一三角形的對應鄰邊相等, 則兩三角形全等. (*a.a.s.*).

§ 28. 二平行線間同底的平行四邊形與矩形面積皆

相等

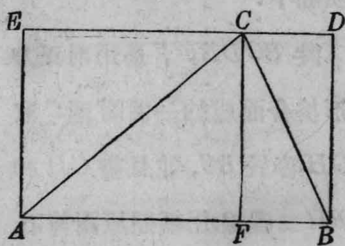


設 $ABCD$ 爲一平行四邊形，$ABEF$ 爲一矩形，都在同底 AB 上，和二平行線 AB, FC 中間；這個平行四邊形和矩形面積必定相等，換句話說：就是兩形一般大小.

事實上很容易證明，BEC 三角形等於 AFD 三角形，所以就可以推得 $ABCD$ 和 $ABEF$ 面積相等.

有時幾何學上用"同高"來代替"二平行線間"的條件.(讀者可參看 § 13)

§ 29. 一三角形的面積等於與其等底同高的矩形面積之半.



設 ABC 爲一三角形，$ABDE$ 爲一矩形，都有相同的高，並且在同底 AB 上：求證這個三角形的面積等於這個矩形的面積之半.

設 CF 爲 C 點至 AB 的垂線. 我們容易由此證明，BFC 三角形等於 CDB 三角形，和 AFC 三角形等於 CEA 三