高等学校经济管理类专业数学基础课程系列教材

线性代数及其应用

李乃华　赵芬霞　刘振航　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校经济管理类专业数学基础课程系列教材

线性代数及其应用

Xianxing Daishu Jiqi Yingyong

李乃华　赵芬霞　刘振航　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是天津市高等学校本科教学改革与质量建设研究计划（重点）项目“大学数学系列精品课程资源建设与共享机制的研究实践”（津教委高[2008]8号）的研究成果。其基本内容是依据教育部数学基础课程教学指导分委员会制定的“经济管理类本科线性代数课程教学基本要求”编写的。本书将线性代数和Mathematica软件相结合，基于Mathematica软件介绍实际应用，易学易用。读者在学习相关理论的基础上，可以轻松地完成复杂计算，实现理论到实践的转化。

全书分为五章，内容包括行列式，矩阵，向量、线性方程组，矩阵的对角化，二次型等。其特点是，内容可视化，计算软件化，方法现实化，实用性强。

本书可作为高等学校经济管理类本科专业学生的教材，也可作为其他非数学类本科专业学生的教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用/李乃华，赵芬霞，刘振航编著.
—北京：高等教育出版社，2010.8
ISBN 978－7－04－030068－0

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… ②赵… ③刘… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第124220号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400－810－0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	北京明月印务有限责任公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2010年8月第1版
印　　张	17.25	**印　　次**	2010年8月第1次印刷
字　　数	320 000	**定　　价**	24.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　30068－00

前言

随着科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到人文科学、社会科学和自然科学等各个领域，数学的重要性为社会所公认，数学的普及也越来越广泛；与此同时，由于计算机技术的普及与提高，繁难的数学计算、庞大的数据分析和抽象的数学推理已不再是高不可攀，数学的应用也越来越深入。伴随着社会对人的素质要求的不断提高，数学素质教育已成为公民教育的必修课。

为适应新形势下社会发展的需要，作为天津市优秀教学团队的天津商业大学“大学数学基础课程教学团队”，近年来一直致力于“信息技术与数学课程整合”这一教育教学改革问题的研究与实践，并取得了一些可喜的成果。为了深化教育教学改革的成果，团队教师编著了这套经济管理类本科专业数学基础课程教材，这套教材包括《高等数学及其应用》、《线性代数及其应用》和《概率统计及其应用》。

本套教材是天津市高等学校本科教学改革与质量建设研究计划重点项目“大学数学系列精品课程资源建设与共享机制的研究实践”(津教委高[2008]8号)的成果。教材内容涵盖了教育部数学基础课程教学指导分委员会对经济管理类各本科专业三门数学基础课程教学内容的全部要求，并力求体现以下特点：

1. 传统与现代融合

数学基础知识、多媒体技术、计算机应用软件三者有机融合。以数学为本，辅之多媒体技术使抽象概念可视化、静态图形动态化，辅之计算机应用软件使复杂计算窗口化，使过去靠手工难以完成的绘图、数据分析和模拟逼近等，可以轻松自如地实现。多媒体技术、计算机应用软件融入数学基础知识学习中，调动了学生学习数学的兴趣，促进学生数学素质的提高。

2. 知识与能力并重

适时插入“停下来想一想”注释，通过设疑、提醒、警示、猜想、归纳、推广(条件与结论变更)、理清关系、总结思路等方法，或引出新的思考，或提出更深层次、更广范围的问题，把对内容的理解引向深入，让学生回味和联想，帮助学生掌握知识重点、领会问题本质，引导学生自觉思考，开拓学生的思路和视野，启迪学生发现、分析和解决问题，激发学生的求知欲，培养学生的创新意识和自主学习能力。

3. 理论与应用兼备

理论的准确理解是实际正确应用的基础，实际应用又是对理论理解的深化。

教材以实际问题为背景，将数学建模思想融入其中，在概念阐述上，做到通俗简明，举例贴近生活；在理论阐述上，做到讲清楚数学思想和原理，讲明白应用的条件、方法和结果（解释）；在应用案例上，做到生活化、大众化、科学化，力求使学生消除对数学的陌生感、抽象感、恐惧感，树立学生学好数学、用好数学的信心。

4. 基础与提高共存

例题选择做到少而精，重在有代表性，重在对概念的理解掌握和思维方法的培养。教材习题配置做到数量适宜、难度合理、循序渐进，每节后习题均分为 A，B 两组。A 组是基本题，是对课程的基本要求，要求学生必须完成；B 组是提高题，大部分题目是历届全国硕士研究生入学考试，是为学有余力的学生准备的，重在综合性，力求通过这些习题加深和拓广教材内容，帮助学生提高综合运用所学知识的能力。此外，习题中有意识地增加了图形题和实际应用题（部分题目需要用计算机来完成），使学生感到数学这门课学了有用、学了会用。

本套教材融入软件，突出技能，实用性强。内容可视化——让读者不再因抽象而烦恼；计算软件化——让读者不再被繁难所困扰；方法现实化——让读者不再因不知其用而厌学。

本套教材在“做中学、学中悟、悟中醒、醒中行”方面做了有益的尝试。教材中涉及的教学演示实验可在“天津市大学数学精品资源网”下载，也可与作者联系获取，电子邮箱是：lxylnh@ tjcu. edu. cn.

天津市教育委员会高教处的领导对本项目的研究给予了热心的指导和资助，在他们的关心和支持下，教学改革得以深化、教学资源得以共研、共建、共享、共赢。全国高等学校教学研究中心、高等教育出版社的同志对本书的出版给予了热情的支持。在此，我们一并致以最诚挚的感谢。

天津商业大学理学院长期从事经济管理类专业线性代数课程教学建设的老师们在项目的教学研讨和实践中付出了辛勤劳动，正是由于他们的积极支持和鼓励才使我们以充沛的精力高标准地完成了本书的编著工作。在此，我们也致以最诚挚的谢意。

我们期盼本套教材能为广大读者带来学数学的轻松、做数学的快乐和用数学的效益。同时，热情欢迎广大读者提出批评与建议，让我们共同为持续提高数学课程的教学质量、发挥数学课程在人才培养中的作用而不懈努力。

编著者

2010. 03. 18

目录

第1章　行　列　式

共性寓于个性之中.通过对特殊的具体现象透视剖析,认识发现事物内在的属性规律,往往是获得一般抽象问题解决方案的有效途径.这种从特殊到一般,由外而内,由表及里的思维方法有效地渗透于数学问题的研究中.从 n 阶行列式的构建,到克拉默法则的形成,无不闪现着这种思维的火花.

行列式是线性代数的一个重要组成部分.它不仅是研究矩阵理论、线性方程组求解等问题的重要工具,而且在数学的许多分支及经济、管理、工程技术等领域有着极其广泛的应用.本章以三阶行列式为基础,建立了 n 阶行列式的概念,讨论了 n 阶行列式的性质,给出了利用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则.学习本章后,应该理解 n 阶行列式的定义,掌握行列式的性质及计算方法.

第 1.1 节　n 阶行列式

1. 二阶与三阶行列式

考虑含有两个未知量 x_1, x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

为求得上述方程组的解,利用加减消元法,得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

注意:上式中的分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得.为便于记忆,引进如下记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1.1}$$

并称其为**二阶行列式**.

二阶行列式(1.1.1)的右端表示式又称为**行列式的展开式**,可以用**对角线法则**得到,即

$$
{}_{-}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}_{+},
$$

其中实线称为行列式的主对角线,虚线称为行列式的次对角线.

根据式(1.1.1),方程组解中的分子可分别写作

$$
D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},
$$

它们分别是把式(1.1.1)中的第1、2列换为方程组右端的常数项 b_1, b_2 所得. 因此,当方程组的**系数行列式** $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时,方程组的解可用行列式表示为

$$
x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}. \tag{1.1.2}
$$

例 1.1.1　解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = -2. \end{cases}$

解　方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 方程组有唯一解. 由

$$
D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5
$$

得方程组的解

$$
x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{3}{1} = 3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-5}{1} = -5.
$$

类似地,在利用加减消元法求解含有未知量 x_1, x_2, x_3 的三元线性方程组

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}
$$

的过程中,引进记号

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \tag{1.1.3}
$$

$$
- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},
$$

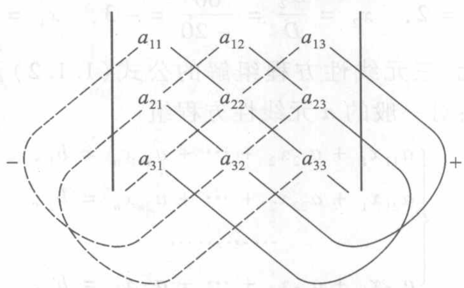
并称其为**三阶行列式**. 当方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 时,方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D},\quad x_1 = \frac{D_3}{D}, \tag{1.1.4}$$

式中 $D_j(j = 1,2,3)$ 是将系数行列式 D 的第 j 列换为右端常数项得到的行列式,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

式(1.1.3)所确定的三阶行列式可由**对角线法则**得到,即



每一条实线上的三个元素乘积带正号,每一条虚线上的三个元素乘积带负号. 所得 6 项的代数和就是三阶行列式的值. 这里 a_{ij} 代表行列式的第 i 行第 j 列的元素 $(i,j = 1,2,3)$.

例如　三阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ 中,第 2 行第 3 列的元素 $a_{23} = 5$, 第 3 行第 1 列的元素 $a_{31} = 7$.

例 1.1.2　计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

解　由式(1.1.3),有

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 5 \times 7 + (-2) \times 1 \times 6 + 3 \times 4 \times 2 - 3 \times 5 \times 6 \\ &\quad - (-2) \times 4 \times 7 - 1 \times 1 \times 2 \\ &= 35 + (-12) + 24 - 90 - (-56) - 2 = 11. \end{aligned}$$

例 1.1.3 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 9x_1 - 3x_2 + x_3 = 28. \end{cases}$

解 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 9 + (-12) - 18 - 4 - (-3) = -20 \neq 0,$$

方程组有唯一解. 由

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 28 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -40, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 9 & 28 & 1 \end{vmatrix} = 60, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & -3 & 28 \end{vmatrix} = -20$$

得方程组的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-40}{-20} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{60}{-20} = -3, \quad x_1 = \frac{D_3}{D} = \frac{-20}{-20} = 1.$$

注意到求解二元、三元线性方程组解的公式(1.1.2)及(1.1.4)的相似特点,我们自然会考虑:对一般的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

是否也有类似于二元、三元线性方程组解的表达形式?如果有,涉及的 n 阶行列式的值等于什么?这是本节要讨论的核心问题.

为了给出 n 阶行列式的定义,首先介绍有关排列的概念与性质.

2. 排列及其逆序数

定义 1.1.1 由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n **级排列**.

显然,n 级排列的总数为 $n!$. 例如,由 1,2,3 组成 3 级排列总数为 $3!=6$,即

123,132,213,231,312,321.

若排列中各数是按照由小到大的自然顺序排列,通常称为**标准排列**. 上述排列中的 123 是标准排列,而其余排列都或多或少地破坏了自然顺序(较大的数排在较小的数之前),对此我们有如下定义.

定义 1.1.2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,若两个数的位置与大小顺序相反,称这一对数构成一个**逆序**(reverse order);而排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中逆序的总数称为它的**逆序数**(number of reverse order),记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如 $\tau(132)=1,\tau(231)=2,\tau(321)=3,\tau(123)=0.$

根据定义,可以得到求 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 的方法:

考虑元素 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$,若比 i_k 大且排在 i_k 前面的元素共有 t_k 个,则 i_k 和这些元素共构成 t_k 个逆序. 因此,排列的逆序数为

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n.$$

称逆序数为奇数的排列为**奇排列**,逆序数为偶数的排列为**偶排列**.

例 1.1.4 求下列排列的逆序数,并指出它们的奇偶性.

(1) 53214; (2) $n(n-1)\cdots 21$.

解 (1) $\tau(53214)=1+3+2+1+0=7$, 该排列为奇排列;

(2) $\tau[n(n-1)\cdots 21]=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$,

故当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时,排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时,排列为奇排列.

以下给出与排列有关的另一概念.

定义 1.1.3 在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,若其中某两数 i_s 和 i_t 互换位置,其余各数位置不变得到另一排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,这种变换称为一个**对换**(transposition),记为 (i_si_t). 特别地,相邻两元素的对换称为**相邻对换**(adjacent transposition).

例如 排列 3421(奇)经(31)对换成为 1423(偶),1423 经(42)对换成为 1243(奇), 1243 经(43)对换成为 1234(偶),即

$$\begin{array}{cccc} 3421 \xrightarrow{(31)} & 1423 \xrightarrow{(42)} & 1243 \xrightarrow{(43)} & 1234. \\ \tau=5 & \tau=2 & \tau=1 & \tau=0 \end{array}$$

一般地,有

定理 1.1.1 (1) 对换改变排列的奇偶性;

(2) 任一排列都可经过对换化为标准排列.

(证明略.)

3. n 阶行列式定义

在给出 n 阶行列式定义之前,首先观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

的结构. 从展开式可以看出如下特征:

① 若不考虑正负号,三阶行列式的每一项都是取自不同行、不同列的三个元素的乘积,且元素的行标按自然顺序(从小到大)排列,列标为 1,2,3 的一个 3 级排列. 因此,一般项可表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$.

② 各项前的正负号规律为

取"+"号的项,列标排列 $j_1j_2j_3$ 为偶排列123,231,312,

取"-"号的项,列标排列 $j_1j_2j_3$ 为奇排列321,213,132.

当行标按自然顺序排好后,每一项的正负号由列标排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性决定. 因此,一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的符号可表示为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$.

③ 三阶行列式的项数,恰好是所有 3 级排列的个数 3! = 6,且含正、负号的项数正好各半.

于是,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对1,2,3三个数的所有排列 $j_1\,j_2\,j_3$ 求和.

显然,二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (-1)^{\tau(12)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12}a_{21}$$

$$= \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

也具有特征①②③.

类似地,可以给出 n 阶行列式定义.

定义 1.1.4　将 n^2 个元素排成 n 行、n 列

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**(determinant),其值等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,并冠以符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$ 的项的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \overset{\text{记}}{=} \det(a_{ij}).$$

例 1.1.5　利用定义,计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 由定义

$$D=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4},$$

和式中只有当 $j_1=2,j_2=3,j_3=4,j_4=1$ 时，$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}\neq 0$. 所以

$$D=(-1)^{\tau(2341)}a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}=(-1)^3\times 1\times 2\times 3\times 4=-24.$$

例 1.1.6 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & a_{1n}\\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}$.

解 由定义

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

和式中只有当 $j_1=n,j_2=n-1,\cdots,j_n=1$ 时，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\neq 0$. 所以

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 321)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 1.1.7 证明上三角形行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证 由定义

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

和式中只有当 $j_n=n,j_{n-1}=n-1,\cdots,j_1=1$ 时，$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\neq 0$. 所以

$$D=(-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

该结果表明:上三角形行列式的值等于其主对角线上各元素的乘积.

类似地,下三角形行列式 $\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

特别地,对角行列式 $\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.