经济和管理类大学数学系列教材之二

线性代数

张恩众 察可文 解心江 主编

山东大学出版社
Shandong University Press

经济和管理类大学数学系列教材之二

线性代数

张恩众　察可文　解心江　主　编
郭砚常　张　文　陈　勇　副主编

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张恩众,察可文,解心江主编 .—济南:
山东大学出版社,2002.11 2002. 11 (2006. 1 重印)
ISBN 7-5607-2526-0

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①张…②察…③解… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 090808 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码:250100)
山东省新华书店经销
莱芜市圣龙印务书刊有限责任公司印刷
787×980 毫米 1/16 10.5 印张 187 千字
2002 年 11 月第 1 版 2006 年 1 月第 2 次印刷
印数: 5001-6000 册
定价:16.00 元

前　言

数学是一切科学技术发展的基础，也是人类理解现实世界的一把钥匙。对经济类、管理类大学生来说，数学不但是他们在校学习期间的一门十分重要的基础课程，也是他们进一步深造——报考经济类、管理类研究生的必考课程。因此，学好数学课程，对他们的重要性是不言而喻的。

在我们多年从事经济类、管理类大学生数学教学的过程中，深感缺乏一套既能作一般教材使用、又能满足学生基本考研要求的数学教科书。坐而等之，不如起而行动，于是我们几位同仁反复思考后，决定共同编写一套专门针对经济类、管理类各专业学生使用的大学数学系列教材。该系列教材包括《微积分》《线性代数》《概率论与数理统计》三册，本书就是这套系列教材中的第二册。如果我们的努力能为我国经济类、管理类大学数学教材的规范化进程起到一点推动作用，我们也就感到欣慰了。

本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、n 维向量间的线性关系、特征值与特征向量、二次型等。

我们在编写中力求做到：知识阐述上由浅入深，通俗易懂，注意总结规律，交代要领；例题配置上典型性强，有启发意义，有些直接采用了近几年的研究生入学试题；每章后面配备有一定数量的巩固性练习题，全书后面附有练习题答案，便于学生自我检查。

本书是在各位编者使用多年的线性代数讲义的基础上修改而成，同时我们在编写过程中也注意吸收了国内现有同类教材中的一些优点（恕不一一点明），使本书尽量做到博采众长。

本书是集体讨论的结果。山东大学管理学院赵炳新教授、山东轻工业学院数理系李汝修副教授参与了本书的讨论，并提出了很多有价值的建议，在此表示衷心的感谢。由于各章内容分别由不同的作者执笔，因此其写作风格及语言习惯也

会略有不同，虽经多次修改，可能仍会存在一定的差异，再加上编者水平所限，书中缺点错误在所难免，敬希广大读者批评指正。

编 者

2002年10月于山东大学

目　　录

第一章　行列式

行列式是一个重要的数学工具，不但在数学的各个分支中，而且在其他各学科领域中都会经常用到它，特别在线性代数中它更是一个不可缺少的工具. 因此我们在第一章就向大家介绍行列式.

本章介绍行列式的定义、基本性质及行列式的计算方法，并且讨论求解 n 元线性方程组的克莱姆(Gramer)法则.

第一节　二阶和三阶行列式

行列式的概念是从解线性方程组的问题中引进来的. 所谓线性方程组是指未知量的最高次数是一次的方程组. 下面我们通过讨论线性方程组的求解问题引入行列式的概念.

一、二阶行列式

我们知道，任何一个二元线性方程组经过变形以后，可以化成一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$a_{ij}(i,j=1,2)$是未知数 $x_j(j=1,2)$的系数，$b_j(j=1,2)$是常数.

对(1.1)使用消元法，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

将(1.2)式代入方程组(1.1)式，容易验证(1.2)式是方程组(1.1)式的解，而且是唯一解. 于是(1.2)式就是二元线性方程组(1.1)的求解公式. 为了便于记忆这个公式，有必要引进新的记号来表示(1.2)式. 我们看到(1.2)式中x_1,x_2的表达式里分母都是$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它是由方程组(1.1)式的系数所确定的，而$x_j(j=1,2)$的表达式的分子是从$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$中将$x_j$的系数$a_{1j},a_{2j}$分别用$b_1,b_2$代替而成. 于是，只要把分母的结构弄清楚了，那么$x_1,x_2$的表达式的结构也就搞清楚了. 将方程组(1.1)式的系数按原来位置排成两行两列(横的称为行，竖的称为列)的方表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

由上表可以看出，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$就是方表中从左上角到右下角的对角线(称为主对角线)上两个数的乘积减去从右上角到左下角的对角线(称为次对角线)上两个数的乘积所得的差. 由此，给出：

定义 1.1　用记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

其中$a_{ij}(i,j=1,2)$称为这个行列式的第i行第j列的元素.

这时，二元线性方程组(1.1)式的解(1.2)式中的两个分子$b_1a_{22}-a_{12}b_2$和$a_{11}b_2-b_1a_{21}$可分别用二阶行列式$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$表示，当方程组(1.1)式的系数所组成的行列式(称为方程组(1.1)的系数行列式)$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$时，方程组(1.1)的唯一解可用行列式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

例 1.1　用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1, \\ 3x_1+5x_2=2. \end{cases}$$

解　因为$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=5-6=-1\neq 0$，所以方程组有唯一解. 其解为：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}}=-1 \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}}=1$$

二、三阶行列式

三元线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是未知数 $x_j(j=1,2,3)$ 的系数，$b_j(j=1,2,3)$ 是常数. 在方程组(1.3)式中用消元法消去 x_2 和 x_3 得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}$$

所以当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\neq 0$ 时，就得出

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}$$

用类似的方法，可以求得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}$$

将上边的 x_1,x_2,x_3 代入(1.3)式，容易验证是方程组(1.3)式的解，而且是唯一解. 于是上述三个式子就是三元线性方程组的求解公式.

同前面一样，为了便于记忆和应用，下面来研究一下这些表达式的结构，我们看到 x_1,x_2,x_3 的表达式里的分母都是

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.4}$$

而 x_j 的表达式的分子是从(1.4)式中将 x_j 的系数 $a_{1j},a_{2j},a_{3j}(j=1,2,3)$ 分别用 b_1，b_2,b_3 代替而得. 于是，只要把分母的结构弄清楚，那么 x_1,x_2,x_3 的表达式的结构也就搞清楚了.

类似的，将方程组(1.3)的系数按原来位置排成三行三列的方表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

从而给出

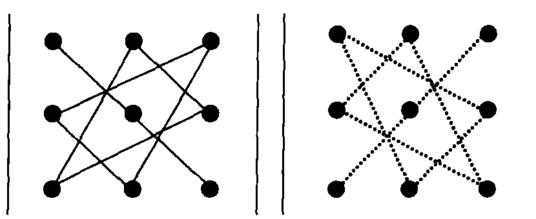
定义 1.2 用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$，称为三阶行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.5}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为这个行列式的第 i 行第 j 列的元素.

从表面上看，三阶行列式比较复杂. 但仔细分析一下可以看出它的各项的组成是具有一定规律的. 事实上，在(1.5) 式中，含有正号的三项里有一项为主对角线上三个数之积，其他两项是位于主对角线的平行线上两个数与其对角上的数之积，含有负号的三项可以从次对角线类似地得出. 于是，求三阶行列式的各项，可按下面的对角线法则求出



三阶行列式是 6 项，上左图是三个带正号的项；上右图是三个带负号的项.

例 1.2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\times(-1)\times2+2\times4\times5+3\times1\times1-3\times(-1)\times5-1\times4\times1-2\times1\times2=48.$$

有了三阶行列式的定义，方程组(1.3)的求解公式中的三个分子可分别用三

阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

表示,当方程组(1.3)的系数所组成的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,方程组(1.3)有唯一解,即(1.3)的求解公式可表为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中$D_j(j=1,2,3)$,是以方程组(1.3)的常数项b_1,b_2,b_3分别替换系数行列式D中a_{1j},a_{2j},a_{3j}所得的行列式.

例1.3 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1, \\ x_1+3x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

解 系数行列式$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28$,而

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13, \quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=47, \quad D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21,$$

故

$$x_1=\frac{13}{28}, \quad x_2=\frac{47}{28}, \quad x_3=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

上面通过解二、三元线性方程组,引进了二、三阶行列式.那么四阶、五阶行列式,乃至n阶行列式是否也可以通过解四元、五元乃至n元线性方程组来引进呢?答案是否定的.因为从解三元线性方程组引进三阶行列式我们已经看到是很麻烦的,至于一般地通过解n元线性方程组来引进n阶行列式几乎是不可能的.因此,n阶行列式的定义不能用类似上面的方法来得到.另一方面,我们已经有了二、三阶行列式的定义,能否详细研究和总结一下它们内在的规律性,然后根据这一规律来定义n阶行列式,再利用n阶行列式来给出n元线性方程组的求解公式呢?这个答案是肯定的.

本章的目的是要把二阶和三阶行列式推广到n阶的情形，并且利用n阶行列式来研究解决含有n个未知数的n个方程所组成的线性方程组的问题. 为此，下面我们要给出n阶行列式的定义并讨论它的性质. 作为定义n阶行列式的准备，我们首先讨论排列的性质.

第二节　排　列

一、排列及其逆序数

定义1.3　把n个不同数码$1,2,\cdots,n$排成一列$i_1i_2...i_n$，称为一个n级排列.

例如，2431是一个4级排列，45321是一个5级排列.

我们知道，n级排列的总数是

$$n(n-1)(n-2)\cdots21=n!$$

显然，$12\cdots n$也是一个n级排列，这个排列具有自然顺序；而其他的排列都或多或少地违背了自然顺序，就是有大数码排在小数码的前面.

定义1.4　在一个n级排列$i_1i_2...i_n$中，如果有较大的数i_t排在较小的数i_s前面($i_s<i_t$)，则称i_t与i_s构成一个逆序. 一个n级排列中逆序的总数，称为它的逆序数，记为$N(i_1i_2...i_n)$.

例如，2431中，共有4个逆序，因此$N(2431)=4$，而$N(45321)=9$.

例2.1　计算排列$n(n-1)(n-2)\cdots2\ 1$的逆序数.

解　$N(n(n-1)(n-2)\cdots2\ 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

定义1.5　逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，$N(2431)=4$，所以2431是偶排列；$N(45321)=9$，所以45321是奇排列；$N(12\cdots n)=0$，所以$12\cdots n$是偶排列.

应该指出，我们同样可以考虑由任意n个不同的自然数所组成的排列，一般地也称为n级排列. 对这样一般的n级排列，同样可以定义上面这些概念.

我们知道，n个数码的排列共有$n!$个，而其中任何一个排列若不是偶排列，就是奇排列. 那么这$n!$个排列中有多少个偶排列，多少个奇排列呢？为了确定奇偶排列的个数，我们引进对换的概念.

二、对换

定义 1.6　在一个排列$i_1...i_s...i_t...i_n$中，如果仅将其中的两个数码i_s与i_t

对调,其他数码位置不变,得到另一个排列$i_1\ldots i_t\ldots i_s\ldots i_n$,这样的变换,称为一个对换,记为对换$(i_s,i_t)$.

例如,排列45321经过对换(2,5)后,得到排列42351,可以看出,排列45321经过一次对换(2,5)后,改变了排列的奇偶性.一般地,有

定理1.1　排列经过一次对换后,奇偶性改变.

这就是说,经过一次对换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列.

证　先证一个特殊情形,就是被对换的两个数码是相邻的.设已知排列为

$$\underbrace{\cdots\cdots}_{A} i\ j \underbrace{\cdots\cdots}_{B} \tag{1.6}$$

其中A,B都代表若干个数码.施行对换(i,j),得

$$\underbrace{\cdots\cdots}_{A} j\ i \underbrace{\cdots\cdots}_{B} \tag{1.7}$$

比较(1.6)式和(1.7)式这两个排列的逆序数.属于A或B的数码位置没有变动,因次这些数码所引起的逆序数没有变化.若$i<j$,那么排列(1.7)式的逆序数比排列(1.6)式的逆序数多1个;若$i>j$,那么排列(1.7)式的逆序数比排列(1.6)式少1个.故不论哪一种情况,排列(1.6)式与排列(1.7)式的奇偶性都相反.

再证一般情形.假设被对换的两个数码i与j不相邻,在它们中间有s个数码,这时可设已知排列为

$$\underbrace{\cdots\cdots}_{A} ik_1k_2\ldots k_s j \underbrace{\cdots\cdots}_{B} \tag{1.8}$$

经过对换(i,j)后,得到

$$\underbrace{\cdots\cdots}_{A} jk_1k_2\ldots k_s i \underbrace{\cdots\cdots}_{B} \tag{1.9}$$

容易看出,这样一个对换可通过一系列相邻数码的对换来实现.在(1.8)式中先把i与k_1对换,然后再把i与k_2对换……也就是把i一位一位地向右移动.最后经过$s+1$次相邻数码的对换,排列(1.8)变成了

$$\underbrace{\cdots\cdots}_{A} k_1k_2\ldots k_s j\ i \underbrace{\cdots\cdots}_{B} \tag{1.10}$$

再从(1.10)式出发,把j一位一位地向左移动,经过s次相邻数码的对换,排列(1.10)式就变成了排列(1.9)式.于是,由排列(1.8)式经过对换(i,j)到排列(1.9)式,可以经过$2s+1$次相邻数码的对换来实现.而每经一次相邻数码的对换,排列都改变奇偶性,由于$2s+1$是奇数,所以排列(1.8)式与排列(1.9)式奇偶性相反.证毕.

定理1.2　在$n(n\geqslant 2)$个数码的所有排列中,奇排列与偶排列的个数相等,各为$\frac{n!}{2}$个.

证 设n个数码的奇排列共有p个，偶排列共有q个．对这p个奇排列都施行同一个对换$(1,2)$（$n\geqslant 2$，这是可能的），那么由定理1.1知，原来这p个奇排列就变成了p个偶排列，并且这p个偶排列是两两不同的．但是一共只有q个偶排列，因此$p\leqslant q$．同理可得$q\leqslant p$．故$p=q$．由于n个数码构成的n级排列共有$n!$个，而$p+q=n!$，所以$p=q=\dfrac{n!}{2}$．

第三节 n阶行列式

本节将对二阶和三阶行列式作进一步研究，从中找出它们共同的构造规律，从而利用这些共同规律去定义n阶行列式．

一、n阶行列式的定义

在一个行列式里，我们约定，横排叫行，纵排叫列，行列式中的数叫做元素．

观察二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

可以看出：

（1）二阶行列式是$2=2!$项的代数和．

（2）每一项都是两个元素的乘积，而这两个元素既位于不同的行又位于不同的列．而且所有既位于不同行又位于不同列的两个元素的乘积（只有两项）都在二阶行列式中出现，于是任一项可以写成$a_{1j_1}a_{2j_2}$，这里j_1j_2是1，2的一个排列．

（3）每一项的元素都带有两个下标．第一个下标表示这个元素所在行的位置，第二个下标表示这个元素所在列的位置．每一项的元素的第一个下标是按自然顺序排列的，而第二个下标构成两个数码的一切排列12和21．前一个排列是偶排列，与它对应的项取正号；后一个排列是奇排列，与它对应的项取负号．故二阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{N(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

这里$\sum\limits_{j_1j_2}$表示对两个2级排列取和．

再看三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}$$

(1) 三阶行列式是6=3！项的代数和.

(2) 每一项都是三个元素的乘积,这三个元素既位于不同的行又位于不同的列,且所有既位于不同行又位于不同列的三个元素的乘积(共有3！=6 项)都在三阶行列式中出现,于是任一项可以写成$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,这里j_1,j_2,j_3是1,2,3 的一个排列.

(3) 每一项的元素都带有两个下标.第一个下标是按自然顺序排列的,第二个下标构成三个数码1,2,3 的一切排列123,231,312,321,213,132.前三个排列是偶排列,与它对应的项取正号;后三个排列是奇排列,与它对应的项取负号.故三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

这里$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$表示对所有 3 级排列取和.

综上所述,我们找出了二、三阶行列式的构造规律,即它所含的项数、项的构成以及每项所取符号的规律.根据这一规律,我们定义n阶行列式.

定义 1.7 用n^2个元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

称为n阶行列式.它表示所有可能的取自不同行不同列的n个元素乘积的代数和(共有n！项),各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然顺序排列后,如果相应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.因此,n阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.12}$$

其中$j_1j_2\cdots j_n$是$1,2,\cdots,n$的一个排列,当$j_1j_2\cdots j_n$取遍所有n级排列时,则得到n阶行列式表示的代数和中所有的项.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$表示对所有$n$级排列求和.

这个定义表明，一个n阶行列式正是前面所说的二、三阶行列式的推广.特别地，当$n=1$时，一阶行列式$|a|$就是数a.行列式(1.11)有时简记为$\det(a_{ij})$.

由定理1.2可知，在n阶行列式的$n!$个乘积项中，冠以正号的项和冠以负号的项(不考虑元素本身所带的符号)各占一半.

二、行列式的计算(利用行列式的定义)

定义表明，计算n阶行列式，首先必须作出所有可能的位于不同行不同列的n个元素的乘积，把每个乘积的元素第一个下标按自然顺序排列，然后根据第二个下标所组成排列的奇偶性来决定这一项的符号.

例3.1 判断下列各项是否是四阶行列式的项，在是的情况下标上该项的符号：

(1) $a_{11}a_{23}a_{34}a_{41}$； (2) $a_{11}a_{23}a_{34}$； (3) $a_{11}a_{23}a_{34}a_{41}a_{22}$； (4) $a_{12}a_{43}a_{31}a_{24}$.

解 (1) 中含四阶行列式第一列的两个元素，由定义可知它不是四阶行列式的项.

(2) 只是四阶行列式中位于不同行不同列三个元素之积，由定义可知它不是四阶行列式的项.

(3) 是四阶行列式五个元素之积，由定义可知它不是四阶行列式的项.

(4) 是四阶行列式中位于不同行不同列的四个元素之积，由定义可知它是四阶行列式的项.由于$a_{12}a_{43}a_{31}a_{24}=a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$，在等号右端，第一个下标的排列是自然顺序，第二个下标的排列是2431，它是奇排列(逆序数是3)，所以(4)在四阶行列式中取负号.

例3.2 用行列式的定义计算$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

这个行列式主对角线(从左上角到右下角这条对角线)下侧的元素都为零，称为**上三角形行列式**(与此类似，主对角线上侧的元素都为零的行列式，称为**下**