

·学·魔·笛  
丛书顾问：陈克艰

它那甜蜜的笛声  
诱惑着如此众多的老鼠  
跳进数学的深河...



# 数学逍遥游

S h u x u e X i a o y a o y o u

陈克艰 著

少年儿童出版社

$$\begin{aligned} &= (x+dx)^3 - x^3 \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot dx + 3x \cdot dx^2 + dx^3 - x^3 \\ &= 3x^2 \cdot dx + 3x \cdot dx^2 + dx^3 \\ \frac{dy}{dx} &= 3x^2 + 3x \cdot dx + dx^2 \end{aligned}$$

数·学·魔·笛  
丛书顾问：陈克艰



# 数学逍遥游

S h u x u e X i a o y a o y o u



陈克艰 著

少年儿童出版社

1249270-72

# 一任天真

我们倡导天性、率真的阅读与成长

ISBN7-5324-6660-4 / G·2350

图书在版编目(C I P)数据

数学逍遥游/陈克艰著.—上海:少年儿童出版社,  
2005.8

ISBN 7-5324-6660-4

I.数... II.陈... III.数学—普及读物 IV.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第087112号



数学魔笛  
数学逍遥游  
陈克艰 著  
盛于华 装帧

责任编辑 靳 琼 美术编辑 赵 奋  
责任校对 王 曙 责任监印 史建平

出版发行:上海世纪出版集团 少年儿童出版社

地址:上海延安西路 1538 号 邮编:200052

易文网:[www.ewen.cc](http://www.ewen.cc) 网址:[www.jcph.com](http://www.jcph.com)

电子邮件:[postmaster@jcph.com](mailto:postmaster@jcph.com)

印刷:上海市印刷七厂

开本:889×1194 1/32 印张:9 字数:183千字  
版次:2005年8月第1版 2005年8月第1次印刷

印数:1-6,000

定价:16.00元

版权所有 侵权必究

如发生质量问题,读者可向工厂调换

## 编者的话

苏步青先生回忆他的数学生涯时,曾讲起早年留学日本,刚从东京高等工业学校考入东北帝国大学数学系时的一件事:“初进东北帝大,有一次老师让我们用一个下午的时间做题目,他留下题目就走了。我自以为很了不起,一个人坐在没人敢坐的第一排。两个钟头后,老师回来,首先看我的作业,一边看一边摇头,‘什么东西,这根本不是数学’。这时我才恍然大悟,过去在工科大学学的数学根本不符合数学的基本精神。”

苏先生的这段回忆提出了一个问题:“数学究竟是什么?”在这个问题上,连当时已经解过上万道微积分和解析几何习题、并决心以研究数学为终身职业的苏步青,都需要经历一番“观念更新”,建立一种新的认识。可见得,这个问题是有一定难度了,不好随意回答。

数学究竟是什么?

有五花八门的答案。有人说“数学是科学的皇后”,又有人说“数学是科学的仆人”;有人说“数学是一种语言”,又有人说“数学是

一种艺术”，更有人说“数学是科学性的典范，连哲学都应该向它看齐”。所有这些答案都有一定道理，都说出了部分真理，因此都对；但是把这些答案拼凑在一起，并不能勾勒出数学的正确形象。“数学究竟是什么”，要在“做数学”（doing mathematics）中实地去体会和领悟，任何外在的定义和描述都难以给出富于真实感的答案。

中小学里，数学是一门主课，理所当然承担着教学生在“做数学”中认识数学真实形象的任务。可惜，它往往没有承担好，相反，却是在教给学生一些知识的同时，有意无意地灌输了关于数学形象的错误观念。

例如，多多益善地解难题，被看做学好数学、培养人才的不二法门。多年来，数学竞赛大盛，涌现出许多优胜者，像体育项目一样，市、区甚至学校，都有各自的“专业队”，作专门严格的训练。这些本来并非坏事，中国学生在国际性数学竞赛中屡创佳绩也确实令人欣喜。但是须知，任何特殊能力的培养都不应以牺牲学生的全面发展为代价；更何况，仅仅注重在一种狭隘的规范下解难题，以熟练为取胜之道，并不利于培养创造力和想像力。事实上，强化训练出来

的竞赛获奖者，往往并不能成为出色的数学研究者，他们更像优秀运动员，而不太像数学家。

树立正确的数学形象，回答好“数学究竟是什么”的问题，是数学教学责无旁贷的任务。我们出版这一套数学通俗读物丛书，也就是想在这方面尽一点绵薄之力。简括地说，我们是以如下标准来选书的：

一、起点低。希望让有中学程度、对数学感兴趣、愿意动动脑筋的读者都能愉快通读。即使有些地方读不懂，那困难也是“局域化”的，不妨碍往后的阅读。数学的成品必须清晰，但“做数学”的过程又常常可以带点“朦胧”。二者好像冲突，其实很可以相通，历史上的情况就是如此。

二、观点高。上世纪60年代美国教学改革中曾提出一个观点：“只要采取适当的办法，可以向任何知识水平上的学生，包括小学生，讲授微积分。”这次改革在整体实施上存在不少问题，但上述观点是正确的，20世纪最伟大的数学家希尔伯特其实也是这个观点。向数学知识不多的公众讲解一些高等题材，恰恰是树立正确的数学形象的一条有效途径。数学通俗读物

应该在高等数学和公众之间筑桥铺路，这本身就是一个挑战性的任务。

三、内容的趣味性和精神的人文性。此处所谓趣味，与“趣味数学”之“趣味”不同，而是仍然要与“数学究竟是什么”的问题相联系。就这个问题而言，趣味性与人文性的源泉是历史。许多人对数学望而生畏，是因为单单从只提供现成知识的教科书去了解数学。倘若能从数学家“做”出这些数学的过程去探寻、去体会，感受必定大不相同。数学通俗读物应能经常唤起读者设身处地像当时的数学家那样想一想的意识。

我们的工作还刚刚开始，恳切期待广大读者的批评、建议和支持。



# 目录

小引 → 001

## 星期一：

皇冠巡礼——数论漫谈 → 007

便帽与皇冠 → 008

自然数的基本粒子——素数 → 011

素数的个数 → 016

素数的浓度 → 021

完全数与亲和数 → 025

可望而不可即的明珠 → 029

## 星期二：

数的家族是怎样繁殖的 → 041

“古时候做天才很容易” → 042

封闭性的破坏与恢复 → 045

无理数与有理数一样“有理” → 049

毕达哥拉斯学派与无理数 → 053

数学是发现还是发明 057

虚实合作 → 062

形数相济 → 066

虚数与实数一样“实在” → 069

偶数多还是自然数多 → 074

有理数多还是自然数多 → 079

实数多还是自然数多 → 085

“无限”也分等级 → 090



### 星期三：

一步路走了2000年

——从“第五公设”到非欧几何→ 095

小舟谈学习几何的体会，竟与爱因斯坦相同→ 096

欧几里得可能已经怀疑“第五公设”→ 100

有益的错误——“第五公设”的证明文本→ 103

情理之外 逻辑之中→ 106

真正的宝藏在哪里→ 109

一念之转，天地换新→ 112

非欧几何略窥→ 115

检查一个怪论→ 119

用桌子、椅子、啤酒杯代替点、线、面→ 124

数学就是关系学→ 130

通灵宝玉由对手保管→ 135

### 星期四：

代数交响乐的主题→ 143

懒人的算术→ 144

“ $10 = 1010$ ”→ 146

比阿拉伯数码更方便→ 150

解方程像玩火柴游戏→ 153

诸葛亮如果活到今天→ 155

问题是敲打出来的→ 159

400年前的一场数学比赛→ 162

代数家的魔法→ 167

**星期五：**

- 20岁天才的不朽杰作→175  
 “魔法”对这个问题已经技穷→176  
 玩一副“积木”→179  
 另一种玩法→183  
 这副“积木”就是一个“群”→185  
 形形色色的“群”→190  
 伽罗瓦理论“朦胧谈”→195  
 “向大师，而不是向大师的门徒学习”→201  
 “我没有时间了！”→206  
 前人已矣，后来足戒→209

**星期六：**

- 微积分浅涉→215  
 从流水落花汲取灵感→216  
 “曲”得怎么样，“直”中来反映→219  
 一粒沙尘内有大千世界→222  
 以直代曲求面积→227  
 微积分的灵魂→231  
 神龙见首不见尾→236

**星期日：**

- 把咖啡转化为定理的机器是否牢靠→243  
 数学家星期天也不休息→244  
 一根链条→248  
 集合论的基本“词汇”→251  
 集合也可作运算→256  
 数学家的伊甸园→260  
 狼来了→265  
 把羊群圈起来→269  
 篱笆里是否已经有狼→273

## 小引

小舟和小云是表兄弟俩，在同一所中学里上学，小舟读初三，小云读初二。两个孩子都聪明好学，喜欢看课外书籍。小舟特别爱好数学，解过许多难题，参加区里的竞赛，得了二等奖；小云兴趣广泛，爱好文学，经常阅读和背诵古文名篇。这天，他俩去图书馆借书。琳琅满目的架子上，很少有他们中意的书。金庸的武侠小说，他们早就风卷残云般地吞食了；琼瑶的言情作品，他们也曾读过一两本，觉得还是让女孩子们去亲近比较合适；至于那许多“魔窟”、“谍影”、“血案”一类的印刷品，他们从来就没有兴趣光顾。失望之际，他俩的眼光几乎同时停留于一本书上，那是一本厚厚的、蓝灰色的书，有一个长长的书名——《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》，著者伽利略。这本书挤在周围那些压膜精装、色彩鲜艳的伙伴们中间，虽然显得有些孤寂，但是一点也不寒碜。在它雍容肃穆的气度里，透出智慧和定力，周围那些伙伴们制造的肤浅喧嚣的气氛，似乎一下子就被它收摄了。

“对话！”——兄弟俩异口同声地说。“对

话”这个词，近年来颇受欢迎，越来越多的人喜欢用它，越来越多的场合以它指称。平素日常的谈话是“对话”，科技交流无疑也是“对话”；国际间政治、经济、外交的一切活动，无不是对话，甚至谈判不成而开打，也可以说成“用拳头或武器进行的对话”；读书是与前人“对话”，写作是与后人“对话”；舞台上的长篇独白是与观众“对话”，宗教徒的内心默祷是与上帝“对话”……20世纪的哲学家则干脆说“对话”是人类的基本存在方式。“对话”这个词，带有庄严、挺立、平等的意味。一个对话的参加者，是与点头哈腰、卑躬屈膝、唯唯诺诺的形象格格不入的。“对话”作为一种文体，自然、流畅、清新、亲切，写起来洒脱，读起来爽快。小舟和小云喜欢读“对话”，所以很自然首先就被这本书的书名吸引了。

至于“托勒密”和“哥白尼”这两个人名，后者是他们所熟悉的。他们早已知道，哥白尼在科学史上搞过一场颠倒乾坤的革命，他第一个宣布了是地球绕着太阳转而不是太阳绕着地球转的“地动说”。而前者，他们也记得陆老师曾在课堂上提起过，好像是一个古希腊人，哥白尼

的“地动说”正是冲他发出的挑战。

“两大世界体系”，这个词组也许太严肃了点，但这并不碍事。在小舟、小云那样年龄阶段的孩子，往往反而会对某些严肃的思想和论题产生一种天真的向往，他们倒可能比已经把“体系”一词用滥了的成年人，更能贴切体会它的真实涵义。再说，有“对话”的吸引力，“体系”这个大字眼也就吓不倒他们了。于是，他们把书借了下来。

小舟、小云回家后随便翻了翻这本《对话》，这才发现，他们并没有能力一字一句读懂它。但就是这随便翻翻，也已经受益匪浅。书里有许多几何图形，使正在学平面几何的他们感到很亲切。作者伽利略说，他是学亚里士多德的样来组织这个对话的。古希腊大哲学家亚里士多德领导过一个学园，他向学生讲学时，经常是边走边谈，漫步逍遥，所以他的门徒所组成的学派，就获得了“逍遥派”的雅号。伽利略让自己两位不幸早逝的朋友，与距他们1000多年前的一位逍遥派学者，分别作为哥白尼与托勒密“两大世界体系”的代言人，展开冗长、广泛而细致的讨论和辩论。这一点对小舟与小云的启发特别大：原

来任何枯燥艰难的论题，都是可以在逍遥中边走边谈的，而这种逍遥的谈法反过来也使枯燥艰难的论题变得使人兴趣盎然。他们把这点体会与教数学的陆老师谈后，陆老师也感到深受启发。

很久以来，陆老师一直想寻找一个既有别于课堂教学、又有别于课余兴趣小组的方式，来与同学们自由地谈谈数学。这种方式，不是按部就班的爬行式讲课，也不是躐等跳跃的高速度运行，更不是克敌攻关式的解难题。它不要使人紧张、畏难，它应令人起一种浸润的舒适和轻松，它在给人数学知识的同时，更让人体会到数学研究的精神和数学结构的美感价值。就是对数学不大爱好、生疏隔膜的人，也应能在这种方式下尝到别开生面的滋味。从小舟和小云对那本《对话》的兴趣中，陆老师似乎朦胧地看到了一条可行的路，他建议暑假里趁学校组织夏令营活动之际，作一次“数学逍遥游”。小舟和小云闻言，雀跃不止。

假期终于到了，陆老师带着小舟、小云，还有一位邻居小姑娘小默来到海滨。夏令营的活动丰富极了，除了游泳、揽胜、吃西瓜、下围棋、

读小说、侃大山、听音乐、跳迪斯科、数星星、道古今之外，他们每天至少讨论两个小时的数学。小默虽然刚读完五年级，却也参加讨论，对讨论的内容，她大多听不懂，但她发现讨论中经常冒出一些令她感兴趣的话题，她自己也不时能插得上几句嘴，所以她自始至终认真地参加了，而且也尝到了一点“逍遥”的味道。陆老师经常把“尝味道”挂在嘴边，他说：“学习任何知识，都要努力去尝它的真实的味道，从内心深处引发出兴趣来。兴趣是最好的老师！”

“数学逍遥游”历时一周，每天以一个课题为中心，这就是：

——皇冠巡礼

——数的家族是怎样繁殖的

——一步路走了2000年

——代数交响乐的主题

——20岁天才的不朽杰作

——微积分浅涉

——把咖啡转化为定理的机器是否牢靠





星期一：

皇冠巡礼——数论漫谈

