"十二五"应用型本科系列规划教材

高等数学

上册

主编 蒋国强 蔡蕃
主审 刘金林

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十二五"应用型本科系列规划教材

-61

高等数学

上册

主　编　蒋国强　蔡　蕃
参　编　张兴龙　汤进龙　孟国明　俞　皓
主　审　刘金林

机械工业出版社

本书以高等教育应用型本科人才的培养计划为标准，以提高学生的数学素质、掌握数学的思想方法与培养数学应用创新能力为目的，在充分吸收编者们多年来教学实践经验与教学改革成果的基础上编写而成．

本书分上、下两册．上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用等六章．各章节后配有习题、复习题（含客观题），书末附有几种常用的曲线、积分表及部分习题答案与提示．

本书叙述深入浅出，清晰易懂．全书例题典型，习题丰富．本书可作为高等本科院校应用型专业、民办独立学院相关专业的教材，也可作为其他有关专业的教材或教学参考书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/蒋国强，蔡蕃主编.—北京：机械工业出版社，2010.10

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-31605-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①蒋…②蔡… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 171395 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 责任校对：李秋荣

封面设计：路恩中 责任印制：乔 宇

北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）

2010 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

169mm×239mm・15.5 印张・300 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-31605-3

定价：27.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务 网络服务

社服务中心：(010)88361066 门户网：http://www.cmpbook.com

销 售 一 部：(010)68326294 教材网：http://www.cmpedu.com

销 售 二 部：(010)88379649

读者服务部：(010)68993821 **封面无防伪标均为盗版**

前　　言

本书紧扣高等学校高等数学课程教学基本要求，以应用型本科人才的培养计划为标准，以提高学生的数学素质、掌握数学的思想方法与培养数学应用创新能力为目的，在充分吸收编者们多年来教学实践经验与教学改革成果的基础上编写而成．

本书在编写中力求具有以下特点：

1. 科学定位．本教材主要适用于应用型本科人才的培养．

2. 综合考虑、整体优化，体现“适、宽、精、新、用”．也就是要深浅“适”度；要有更“宽”的知识面；要少而“精”；要跟踪应用学科前沿，推陈出“新”，反映时代要求；要理论联系实际，学以致“用”．

3. 强调特色．注重从实际背景与几何意义出发引入基本概念、基本理论和基本方法，突出分析思想的启示；强调数学知识、思想、方法为提高数学素养、为数学应用服务的理念，立足于培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学知识解决实际问题的能力．

4. 以学生为本．体现以学生为中心的教育思想，注重培养学生的自学能力和扩展、发展知识的能力，为今后持续创造性的学习和在实际工作生活中更好的应用数学打好基础．

全书共 11 章，分上、下两册．上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用；下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、多元函数积分学、无穷级数、微分方程．全书知识系统、结构清晰、详略得当、例题典型、习题丰富，适合作为普通高等院校应用型本科、民办独立学院相关专业的教材，也可供其他有关专业选用为教材或教学参考书．

本书由扬州大学刘金林教授主审，对他的指导和关心，我们表示衷心的感谢．

本书编写过程中，得到了机械工业出版社和扬州大学的大力支持和帮助，我们在此一并致谢．

参加本书编写的有蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等同志．由于编者水平有限，错误疏漏之处在所难免，敬请各位专家、学者不吝指教，欢迎读者批评指正．

编　者

2.3 高阶导数 …… 61
2.3.1 高阶导数的概念 …… 61
2.3.2 高阶导数的求法 …… 62
习题 2.3 …… 63
2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 …… 64
2.4.1 隐函数的求导方法 …… 64
2.4.2 幂指函数及“乘积型”复杂函数的求导方法 …… 65
2.4.3 由参数方程所确定的函数的求导法则 …… 66
习题 2.4 …… 67
2.5 函数的微分 …… 68
2.5.1 微分的定义 …… 68
2.5.2 可导与可微的关系 …… 69
2.5.3 微分的几何意义 …… 71
2.5.4 基本微分公式与微分的运算法则 …… 71
2.5.5 微分在近似计算中的应用 …… 73
习题 2.5 …… 74
2.6 导数概念在经济学中的应用 …… 75
2.6.1 边际分析 …… 75
2.6.2 弹性分析 …… 77
习题 2.6 …… 79
总习题 2 …… 80
第 3 章 微分中值定理及导数的应用 …… 82
3.1 微分中值定理 …… 82
3.1.1 罗尔定理 …… 82
3.1.2 拉格朗日中值定理 …… 84
3.1.3 柯西中值定理 …… 86
习题 3.1 …… 87
3.2 罗必达法则 …… 88
3.2.1 $\frac{0}{0}$型及$\frac{\infty}{\infty}$型未定式 …… 88
3.2.2 其他类型未定式 …… 91
习题 3.2 …… 92
*3.3 泰勒公式 …… 93
3.3.1 泰勒公式 …… 93
3.3.2 几个函数的马克劳林公式 …… 94
习题 3.3 …… 96
3.4 函数的单调性和极值 …… 96
3.4.1 函数的单调性判定 …… 96
3.4.2 函数的极值及其求法 …… 98
3.4.3 最大值、最小值 …… 102
习题 3.4 …… 104
3.5 曲线的凹凸性与拐点 …… 105
习题 3.5 …… 108
3.6 函数图形的描绘 …… 108
3.6.1 曲线的渐近线 …… 108
3.6.2 函数图形的描绘 …… 109
习题 3.6 …… 112
*3.7 曲率 …… 112
3.7.1 弧微分 …… 112
3.7.2 曲率的定义及计算 …… 113
3.7.3 曲率圆与曲率中心 …… 116
习题 3.7 …… 117
*3.8 方程的近似解 …… 117
3.8.1 二分法 …… 117
3.8.2 牛顿切线法 …… 119
习题 3.8 …… 121
总习题 3 …… 121
第 4 章 不定积分 …… 124
4.1 不定积分的概念与性质 …… 124
4.1.1 原函数与不定积分的概念 …… 124
4.1.2 不定积分的性质 …… 127
4.1.3 基本积分公式 …… 127
习题 4.1 …… 130
4.2 换元积分法 …… 131
4.2.1 第一类换元法 …… 131
4.2.2 第二类换元法 …… 136
习题 4.2 …… 140

4.3 分部积分法 …………………… 141
习题 4.3 ………………………………… 144
4.4 有理函数与三角有理式的积分 ………………………… 145
4.4.1 有理函数的积分 ………… 145
4.4.2 三角有理式的积分 ……… 148
习题 4.4 ………………………………… 150
总习题 4 ………………………………… 150
第 5 章 定积分 …………………… 152
5.1 定积分的概念与性质 …… 152
5.1.1 定积分问题举例 ………… 152
5.1.2 定积分的定义 …………… 154
5.1.3 定积分的几何意义 ……… 156
5.1.4 定积分的近似计算 ……… 158
5.1.5 定积分的性质 …………… 160
习题 5.1 ………………………………… 164
5.2 微积分基本公式 ………… 165
5.2.1 变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系 …………………………… 165
5.2.2 积分上限的函数及其导数 ……………………………… 166
5.2.3 牛顿—莱布尼茨公式 …… 167
习题 5.2 ………………………………… 171
5.3 定积分的换元法和分部积分法 ………………………… 172
5.3.1 定积分的换元法 ………… 172
5.3.2 定积分的分部积分法 …… 176
习题 5.3 ………………………………… 178
5.4 反常积分 ……………………… 179
5.4.1 无穷限的反常积分 ……… 180
5.4.2 无界函数的反常积分 …… 182
*5.4.3 Γ 函数 …………………………… 185
习题 5.4 ………………………………… 187
总习题 5 ………………………………… 188
第 6 章 定积分的应用 …………… 190
6.1 定积分的微元法 ………… 190
6.2 定积分在几何学上的应用 ………………………… 192
6.2.1 平面图形的面积 ………… 192
6.2.2 体积 ………………………… 196
6.2.3 平面曲线的弧长 ………… 200
习题 6.2 ………………………………… 202
6.3 定积分在物理学上的应用 ………………………… 203
6.3.1 变力沿直线所作的功 …… 203
6.3.2 液体的压力 ……………… 205
习题 6.3 ………………………………… 207
6.4 定积分在经济学上的应用 ………………………… 207
6.4.1 由总产量变化率求总产量 ………………………… 207
6.4.2 由边际函数求原经济函数 ………………………… 208
习题 6.4 ………………………………… 209
总习题 6 ………………………………… 210
附录 ………………………………… 212
附录 A 几种常见的曲线……… 212
附录 B 积分表 ………………… 215
部分习题答案与提示 ……………… 224
参考文献 …………………………… 241

第1章　函数与极限

高等数学课程的主要内容是微积分及其应用.微积分学是现代数学许多分支的重要基础，是研究物理、工程、经济及其他学科不可或缺的工具.

函数是高等数学的主要研究对象，而极限概念是研究微积分的基础.本章将在复习函数概念的基础上，介绍极限和连续等重要概念，以及它们的一些重要性质.

1.1　函数

1.1.1　数集与邻域

1. 数集

元素都是数的集合称为数集.常用的数集有以下几种：

(1) 实数集，记为 $\mathbf{R}$；

(2) 有理数集，记为 $\mathbf{Q}$；

(3) 整数集，记为 $\mathbf{Z}$；

(4) 自然数集，记为 $\mathbf{N}$.

对于数集 A，记 $A^*=\{x|x\in A，且\ x\neq 0\}$，$A^+=\{x|x\in A，且\ x>0\}$.例如，$\mathbf{R}^*$ 表示非零实数集，$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集，$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}^+$ 或 $\mathbf{Z}^+$ 均表示正整数集.

由于实数集中的元素(数)与数轴上的点一一对应，故我们习惯上也称数为"点".

区间也是常用的一类数集.

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，则：

数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 及 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 称为**半开区间**，分别记作 $[a,b)$ 与 $(a,b]$，即 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上这些区间都称为**有限区间**，a,b 称为这些**区间的端点**，数 $b-a$ 称为这些**区间的长度**.此外，还有所谓**无限区间**.引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)，则可类似地定义无限区间.无限区间有两类共四种，它们的记号及定义如下：

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\}，(-\infty,b)=\{x|x<b\}；$$

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\};$$

实数集 **R** 也可记作$(-\infty,+\infty)$,即$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$,它也是无限区间.

在本教材中,当不需要辨明所论区间的类型时,我们常将其简称为“区间”,且常用大写字母 I 表示.

2. 邻域

定义 1-1 设 $a,\delta\in\mathbf{R}$,且 $\delta>0$,则以点 a 为中心的开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}.$$

其中 a 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**.

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为**点 a 的去心 δ 邻域**,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即,

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta,x\neq a\}.$$

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$,因此$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$. 因为 $|x-a|$表示 x 轴上点 x 与点 a 之间的距离,所以点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$在几何上表示 x 轴上与点 a 的距离小于 δ 的点的全体(图 1-1).

当不需要指明邻域的半径时,我们常说“点 a 的某一邻域”(或“点 a 的某一去心邻域”),并记为 $U(a)$(或 $\mathring{U}(a)$).

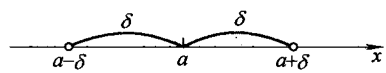


图 1-1

1.1.2 函数的概念

1. 函数的定义

定义 1-2 设 x 与 y 是同一变化过程中的两个变量,D 为一给定的非空数集. 若对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照对应法则 f 总有唯一确定的值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记为 $y=f(x),x\in D$,其中 x 称为函数的**自变量**,y 称为函数的**因变量**,D 称为函数的**定义域**,记作 D_f,即 $D_f=D$.

对 $x_0\in D$,与 x_0 对应的因变量 y 的值 y_0 称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的**函数值**,记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$,即 $y|_{x=x_0}=f(x_0)=y_0$.

当 x 遍取定义域 D 的所有数值时,对应的函数值的全体构成的集合称为函数 $y=f(x)$的值域,记作 R_f 或 $f(D)$,即 $R_f=f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}$.

平面直角坐标面上的点集$\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$称为函数 $y=f(x)$的图形. 通常,函数 $y=f(x)$的图形是曲线,因此常称函数 $y=f(x)$的图形为“曲线 $y=f(x)$”.

关于函数的定义域,对于有实际背景的函数,其定义域应根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如,圆的面积 A 是半径 r 的函数:$A=\pi r^2$,由于圆的半径一定是正数,因此这个函数的定义域为区间$(0,+\infty)$. 对于与具体的实际问题无关,而抽象地用解析式(算式)表示的函数,通常约定其定义域是使得解析式有意义的

自变量的一切实数取值所构成的集合.这种定义域是由函数的解析式自然确定的,给定了解析式也就同时给定了定义域,故称为函数的**自然定义域**.因此,一般的用解析式表示的函数 $y=f(x),x\in D$ 可简记为 $y=f(x)$ 或 $f(x)$,而不必再表出定义域 D.

由函数的定义可知,只要函数的定义域与对应法则确定了,函数也就确定了,而自变量与因变量用什么字母表示并不重要.因此,定义域与对应法则是确定函数的基本要素.两个函数相同当且仅当它们的定义域与对应法则分别相同.

【例 1-1】 判定下列各组中的两个函数是否相同:

(1) $f(x)=2\ln x, g(x)=\ln x^2$;

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$;

(3) $y=\sin x, u=\sin v$.

解 (1)这两个函数不同.因为它们的定义域不同.前者的定义域为 $(0,+\infty)$,而后者的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) 这两个函数不同.因为它们的对应法则不同.当 $x<0$ 时,$f(x)=-x$,而 $g(x)=x$.

(3) 这两个函数相同.因为它们的定义域相同,它们的对应法则也相同.

2. 反函数

如果对于函数 $y=f(x),x\in D$ 的值域 $f(D)$ 中的任一值 y,总有唯一确定的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,那么按照函数的定义,x 是 y 的函数,称这个函数为函数 $y=f(x),x\in D$ 的**反函数**.相对于反函数而言,也称原来的函数 $y=f(x),x\in D$ 为**直接函数**.

例如,函数 $y=3x-1$ 的反函数为 $x=\dfrac{y+1}{3}$.由于习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,所以 $y=3x-1$ 的反函数通常写作 $y=\dfrac{x+1}{3}$.一般地,函数 $y=f(x),x\in D$ 的反函数通常记作 $y=f^{-1}(x),x\in f(D)$.

并非所有的函数都存在反函数,例如,常值函数 $y=C$ 就不存在反函数.可以证明:单调函数必有反函数,且反函数与直接函数具有相同的单调性.

1.1.3 函数的表示法

在中学里我们已经学过,表示函数的常用方法有解析法(公式法)、表格法和图形法.本课程所讨论的函数一般用解析法表示,有时还同时画出其图形,以便对函数进行分析研究.

根据函数解析式形式的不同,函数又可分为**显函数**与**隐函数**.如果因变量由自变量的解析式直接表示出来,那么就称函数为**显函数**.例如,$y=x^2-3x$.我们遇

到的函数一般都是显函数.如果自变量 x 与因变量 y 的对应关系由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 来表示，那么这样的函数称为**隐函数**.例如，由方程 $\sqrt[3]{x-y}+\sin 2x-1=0$ 确定的函数就是隐函数.

用解析式表示函数时，一般一个函数仅用一个式子表示，但有些函数在其定义域的不同部分，对应法则需要用不同的式子表示，这种函数称为**分段函数**.例如，

$$y=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & x>1\end{cases}$$

就是定义在 $[-1,+\infty)$ 上的一个分段函数.当 $x\in[-1,1]$ 时，函数的对应法则由 $y=x^2$ 确定；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，函数的对应法则由 $y=2-x$ 确定.该函数的图形如图 1-2 所示.

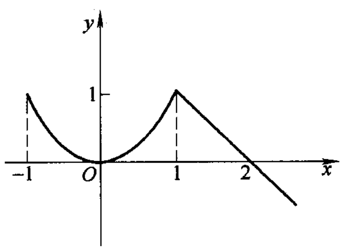


图 1-2

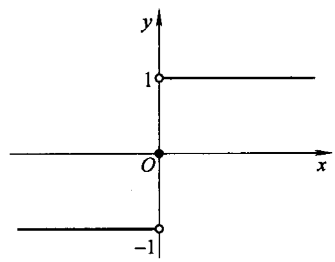


图 1-3

又例如，

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

也是一个分段函数，称之为**符号函数**.它的图形如图 1-3 所示.

必须指出，在定义域的不同范围内用几个不同的式子表示一个（不是几个！）函数，不仅与函数的定义并无矛盾，而且具有现实意义.在许多实际问题中经常会遇到分段函数的情形.

1.1.4 函数的特性

1. 函数的有界性

定义 1-3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$.若存在正数 M，使得 $\forall x\in X$[⊖]，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称**函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界**；否则，称**函数 $f(x)$ 在数集 X 上无界**.

⊖ 记号“$\forall$”表示“任意”或“任意给定”.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上是有界的，因为 $\forall x\in[1,2]$，都有 $\left|\dfrac{2}{x}\right|\leqslant 2$. 但是 $f(x)=\dfrac{2}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使得 $\forall x\in(0,1)$，都有 $\left|\dfrac{2}{x}\right|\leqslant M$.

在定义域内有界的函数称为**有界函数**. 有界函数的图形的特征是它被夹在两条水平直线之间.

2. 函数的单调性

定义 1-4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$.

(1) 若对于 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称**函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加**，并称区间 I 为**函数 $f(x)$ 的单调增区间**；

(2) 若对于 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称**函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少**，并称区间 I 为**函数 $f(x)$ 的单调减区间**.

若函数 $f(x)$ 在其定义域内单调增加（或单调减少），则称 $f(x)$ 为**单调增函数**（或**单调减函数**）. 单调增函数和单调减函数统称为**单调函数**. 函数的单调增区间和单调减区间统称为函数的**单调区间**.

从几何上看，单调增函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的曲线（图 1-4a）；单调减函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的曲线（图 1-4b）.

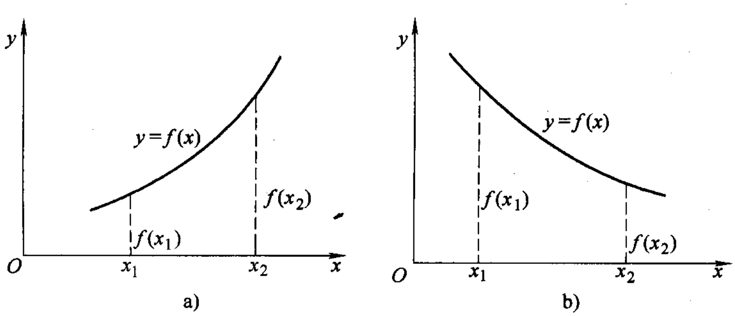


图　1-4

3. 函数的奇偶性

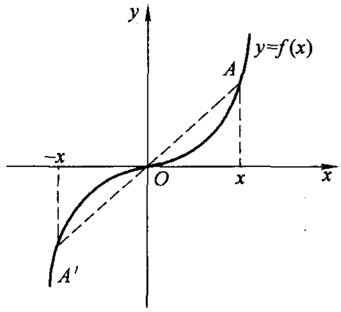
定义 1-5　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则有 $-x\in D$）.

(1) 若对于 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**；

(2) 若对于 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，$f(x)=\sin x$ 是奇函数，而 $f(x)=2x-|x|$ 既非奇函数，又非偶函数.

从几何上看，奇函数的图形关于原点对称（如图 1-5a）；偶函数的图形关于 y 轴对称（图 1-5b）.



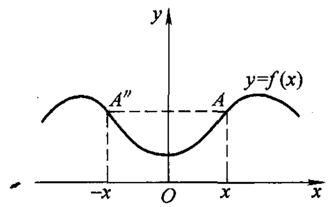


图 1-5

4. 函数的周期性

定义 1-6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在一个正数 T，使得对于 $\forall x \in D$，恒有 $x \pm T \in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

通常，周期函数的周期是指**最小正周期**. 例如，函数 $f(x)=\cos x$ 的周期为 2π；函数 $f(x)=3+\sin 2x$ 的周期为 π. 但并非每个周期函数都有最小正周期. 例如，常值函数 $y=C$（C 为某个常数）是周期函数，任何正实数均为其周期；但它没有最小正周期.

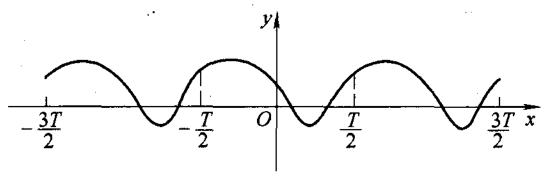


图 1-6

周期函数的图形的特点是，如果把一个周期为 T 的周期函数的图形向左或向右平移周期的整数倍距离，那么这部分图形与目标位置上的图形必定重合（图 1-6）.

1.1.5 复合函数 初等函数

1. 复合函数

先看一个例子．设

$$y=\ln u，而\ u=x^2+1，$$

以 x^2+1 代替第一式中的 u，得

$$y=\ln(x^2+1).$$

我们说，函数 $y=\ln(x^2+1)$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=x^2+1$ 复合而成的复合函数．

定义 1-7 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，如果

$D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ **复合而成的复合函数**，并称 u 为**中间变量**.

由定义 1-7 可知，并不是任何两个函数都可以构成复合函数的，函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 能构成复合函数的条件是 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$. 例如，函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 与函数 $u=\varphi(x)=-x^2-1$ 就不能构成复合函数. 因为前者的定义域为 $D_f=[0,+\infty)$，而后者的值域为 $R_\varphi=(-\infty,-1]$，$D_f \cap R_\varphi=\varnothing$.

一个复合函数也可由两个以上的函数复合而成. 例如，函数 $y=\sqrt{\sin x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=x^2$ 复合而成的.

2. 基本初等函数

定义 1-8　下列五类函数统称为**基本初等函数**：

(1) 幂函数：$y=x^\mu(\mu \in \mathbf{R})$；

(2) 指数函数：$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

(3) 对数函数：$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

(4) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

(5) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$.

在基本初等函数中，以常数 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 与对数函数 $y=\log_{\mathrm{e}} x$（记为 $\ln x$，称为**自然对数函数**）是高等数学中常用的. 这里 e 是一个无理数，它是高等数学中非常重要的一个常数，它的值是 $\mathrm{e}=2.718\,281\,845\,904\,5\cdots$（参见 1.6.2）.

基本初等函数的主要性质在中学教材中已经作了较详细的介绍，这里不再赘述.

3. 初等函数

定义 1-9　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的，并可用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

例如

$$y=\ln(x^2+1),\ y=\sqrt{\sin x^2},\ y=3\arctan\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

都是初等函数.

按初等函数的定义，分段函数通常不是初等函数. 但并不是任何分段函数都是非初等函数. 例如，$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 是分段函数，但若将其改写成 $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$，则可知它是初等函数了.

本课程所讨论的函数，除了分段函数外，一般都是初等函数.

1.1.6　建立函数关系举例

为了解决工程技术、经济管理等应用问题，经常先要给问题建立数学模型，即

建立函数关系.为此需明确这些问题中的自变量与因变量，再根据题意建立等式，从而得出函数关系.

【例 1-2】 一个生产罐头食品的工厂，要做一种容积为常数 V 的密闭圆柱形罐头筒，为使所用材料最省，需要确定圆柱形罐头筒的底面半径与高.试将每个圆柱形罐头筒的表面积表示为底面半径的函数.

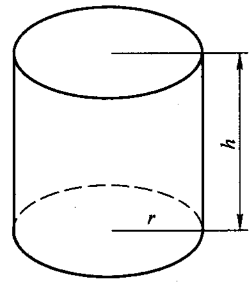


图 1-7

解 设圆柱形罐头筒底面半径为 r，高为 h（图 1-7），则它的侧面积为 $2\pi rh$，底面积为 πr^2，因此其表面积为

$$A=2\pi rh+2\pi r^2.$$

由体积公式 $V=\pi r^2 h$，得 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，将它代入上式，得

$$A=\frac{2V}{r}+2\pi r^2 \quad (r>0).$$

【例 1-3】 某工厂生产一种产品，每日最多生产 1000 单位.它的日固定成本为 1300 元，生产一个单位产品的可变成本为 8 元．求该厂日总成本函数及平均单位成本函数.

解 设日总成本为 C，平均单位成本为 $\overline{C}$，日产量为 x.由于日总成本为日固定成本与日可变成本之和，故有题意可知，日总成本函数为

$$C=C(x)=1300+8x \quad (0\leqslant x\leqslant 1000);$$

平均单位成本函数为

$$\overline{C}=\overline{C}=\frac{C(x)}{x}=\frac{1300}{x}+8 \quad (0<x\leqslant 1000).$$

【例 1-4】 某商场是这样规定每件商品的售价的：在 50 件以内每件 a 元；超出 50 件，超过部分每件 0.9a 元．试将一次成交的销售收入 R 表示成销售量 x 的函数．

解 由题意可知，一次售出 50 件以内的收入为

$$R=ax,\quad 0\leqslant x\leqslant 50.$$

而一次售出 50 件以上时，收入为

$$R=50a+0.9a(x-50),\quad x>50.$$

所以，一次成交的收入与销售量的函数关系是

$$R=\begin{cases} ax, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 50a+0.9a(x-50), & x>50.\end{cases}$$

习　题　1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_2(x+1)$；　　(2) $y=\dfrac{3x}{\sqrt{9-x^2}}$

(3) $y=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x}$；　　(4) $y=e^{-\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x}{x-2}$；

(5) $y=\arcsin(1+x)-\dfrac{2}{\ln(1+x)}$.

2. 判断下列各组中的两个函数是否相同，并说明理由：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}, y=x+1$；　　(2) $y=\sqrt[3]{x^4-x^3}, y=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$；

(3) $y=\sqrt{1-\sin^2 x}, y=\cos x$；(4) $y=e^x, s=e^t$.

3. 下列函数哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $y=|x|(x^2-1)$；　　(2) $y=a^x-a^{-x}$；

(3) $y=x^2+3\sin 2x$；　　(4) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(5) $y=x(1-x)(1+x)$；　　(6) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$；　　(2) $y=\ln(x+2)+1$；

(3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

5. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & |x|\leqslant 1,\\ 2x-1, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f(-2), f(-1), f(0), f(1)$ 及 $f(3)$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

8. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$，求下列复合函数的定义域：

(1) $f(1-x)$；　　(2) $f(\ln x)$；　　(3) $f\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$.

9. 在下列各题中，求由所给函数复合而成的复合函数，并求对应于所给自变量值的函数值：

(1) $y=\sqrt{u}, u=x^2+5, x_0=2$;

(2) $y=u^2, u=2\cos x, x_0=\dfrac{\pi}{6}$;

(3) $y=\mathrm{e}^u, u=\sqrt{v}, v=\ln t, t_1=1, t_2=\sqrt[4]{\mathrm{e}}$.

10. 某厂生产某种产品1000t,每吨定价为130元,销售量在700t以内时,按原价销售,超过700t时超过的部分打九折出售.试将销售总收益与销售量的函数关系用数学表达式表出.

11. 假设某种商品的需求量Q是价格p(单位:元)的函数:$Q=1200-80p$;商品的总成本是需求量的函数:$C=25000+5Q$;每单位商品需要纳税2元.试将销售利润L表示为单价的函数.

1.2 数列的极限

1.2.1 数列的概念

定义 1-10 如果按照某一法则,对每个正整数n,对应着一个确定的实数x_n,这些实数x_n按照下标n从小到大排列得到的一个无穷序列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

称为**无穷数列**,简称为**数列**,简记为$\{x_n\}$.数列中的每个数称为数列的**项**,第n项称为数列的**一般项**或**通项**.

在几何上,数列$\{x_n\}$可看做分布在数轴上的点列,它依次取数轴上的点$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$(图1-8).

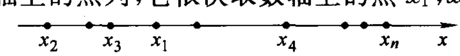


图 1-8

数列$\{x_n\}$又可看成定义域为正整数集$\mathbf{N}^+$的函数:$x_n=f(n), n\in\mathbf{N}^+$,当自变量$n$依次取$1,2,3,\cdots$时,对应的函数值就排列成数列$\{x_n\}$.

数列既然可看成定义域为正整数集$\mathbf{N}^+$的函数,那么函数的有界性、单调性等概念也可以用于数列.

定义 1-11 对于数列$\{x_n\}$,若存在正数M,使得$\forall n\in\mathbf{N}^+$,恒有

$$|x_n|\leqslant M,$$

则称**数列**$\{x_n\}$**有界**,或称$\{x_n\}$为**有界数列**;否则,称**数列**$\{x_n\}$**无界**,或称$\{x_n\}$为**无界数列**.

定义 1-12 如果数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$

则称**数列**$\{x_n\}$**单调增加**;如果数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots,$$

则称**数列**$\{x_n\}$**单调减少**.