21世纪医学院校数理化系列规划教材

医科高等数学

Medical Higher Mathematics

主 编 ◎ 王培承 祁爱琴 魏曼莎

山东人民出版社

21世纪医学院校数理化系列规划教材

医科高等数学

主编　王培承　祁爱琴　魏曼莎

山东人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

医科高等数学/王培承，祁爱琴，魏曼莎主编．—济南：山东人民出版社，2010.1
ISBN 978-7-209-04952-8

Ⅰ.医… Ⅱ.①王…②祁…③魏… Ⅲ.高等数学—医学院校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 159391 号

责任编辑：麻素光
封面设计：彭 路

医科高等数学
王培承 祁爱琴 魏曼莎 主编

山东出版集团
山东人民出版社出版发行
社 址：济南市经九路胜利大街 39 号 邮 编：250001
网 址：http://www.sd-book.com.cn
发行部：(0531)82098027 82098028
新华书店经销
青岛星球印刷有限公司印装

规 格 16 开(184mm×260mm)
印 张 19
字 数 400 千字 插页 2
版 次 2010 年 1 月第 1 版
印 次 2010 年 1 月第 1 次
ISBN 978-7-209-04952-8
定 价 28.00 元

“21 世纪医学院校数理化系列规划教材”
编委会

编委会成员名单

主　编　王培承　祁爱琴　魏曼莎

副主编　安洪庆　高明海　邵珠艳　杨　丽
孔　杨　岳　丽

编　委　（以姓氏笔画为序）
王培承　孔　杨　孔雨佳　田治平
古鲁峰　祁爱琴　安洪庆　刘守鹏
刘　芳　刘　琳　刘晨琛　邵珠艳
杨　丽　李望晨　岳　丽　高明海
魏曼莎

前言

本书是“21世纪医学院校数理化系列规划教材”之一.高等数学是医学院校各专业的公共必修课,是教学计划中的一门重要基础课.随着医学的迅速发展,医学领域的各个学科均需进行深入的定量分析,医学院校的本科生和研究生应具备一定的高等数学知识,已成为医学教育界的共识.同时,高等数学还为许多后继课程,如生理学、药理学、遗传学、统计学、流行病学等提供必备的基础知识.

本书是按照现行《医科(五年制)高等数学基本要求》,以讲清概念、强化计算、注重应用为原则编写的.编写人员多年来从事高等数学的教学工作,积累了丰富的教学经验,对高等数学的教育体系和内容有着全面的了解,本书充分吸收了编写人员的教学经验和改革成果.

本书力求从医学教育的实际出发,突出医科高等数学的特色,深入浅出.教材内容的选取充分考虑到21世纪医学人才所需要的数学素质,也充分考虑到医科学生学习数学的实际条件.本书基本概念、基本理论描述通俗易懂,例题、习题配置适当.全书包括一元微积分、多元微积分、常微分方程、线性代数等内容,共九章.

本书包含了医学院校各专业学生必须学习的数学内容,教学中可根据各专业的需要,对内容作适当的取舍.本书也可作为医学硕士研究生的教材和医药工作者的参考书.

由于我们水平有限,书中难免有疏漏之处,恳切希望广大读者给予批评指正.

编　者

2009年6月

目录

义，与 x_0 对应的因变量值 y_0 称为**函数值**（functional value），记为 $y_0=f(x_0)$ 或 $y_0=y|_{x=x_0}$.

函数概念有两个核心要素：定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 当函数用抽象算式表达时，我们约定函数的定义域就是使函数有意义的所有自变量的取值构成的集合. 例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{2}{x-1}$ 的定义域为半闭半开区间 $[-1,1)$，函数 $y=\ln\dfrac{1-x}{3}$ 的定义域为开区间 $(-\infty,1)$.

二、函数的表示法

表示函数的方法通常有解析式法（公式法）、图像法和表格法. 前面我们表示函数都用了解析式法，下例中我们用三种方法表示同一函数，这三种方法各有特点，可相互转化.

例 1.2 2003 年中国非典型肺炎（SARS）流行时，感染人数随时间变化的规律通过实际观测的数据表示，我们用最引人关注的时间段里公布的全国疫情报告中的 8 组数据来反映新增病例数 N 与时间 t 的关系，表格表示法见表 1.1.

表 1.1 2003 年全国 SARS 流行高峰期新增病例报告

报告日期（月/日）	4/28	5/1	5/4	5/7	5/9	5/12	5/15	5/17
标示时间（t_i）	1	4	7	10	12	15	18	20
新增例数（N_i）	206	187	163	159	118	75	52	28

将表 1.1 中的数据 (t_i,N_i) 以散点的形式标记在坐标平面上，然后用光滑的曲线连接这些点. 则此曲线 $N=N(t)$ 也表示这个时间段全国新增病例数 N 与时间 t 的关系，此为图像表示法，见图 1.1.

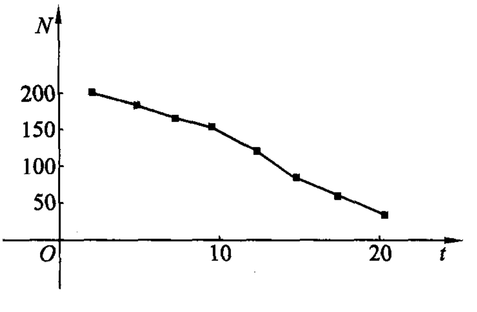


图 1.1

当然，还可以用解析式法表示 N 与时间 t 的关系. 由于影响新增病例数 N 的因素很多，绝非一个时间变量 t 所能完全确定的，故 $N=N(t)$ 这类解析式只能近似模拟这种关系. 例如可用解析式 $N(t)=\alpha+\beta t^{\gamma}$ 来拟合这一关系，这里 α、β、γ 均为常数，在流行病学中有具体含义.

三、几种函数概念

1. 分段函数

一些函数对其定义域内不同的值，要用两个或多个不同的解析式来表示，这类函数称为**分段函数**(piecewise function). 历史上著名的 Dirichlete 函数就是一个分段函数：

$$f(x)=\begin{cases}0, x\text{ 是无理数},\\ 1, x\text{ 是有理数}.\end{cases}$$

例 1.3 生理学研究中，血液中胰岛素浓度 $c(t)$(单位/毫升)随时间 t(min)变化的公式为

$$c(t)=\begin{cases}t(10-t), 0\leqslant t\leqslant 5,\\ 25\mathrm{e}^{-k(t-5)}, \quad t>5.\end{cases}$$

其中，$k>0$ 为常数. 这是一个分段函数，其图形如图 1.2.

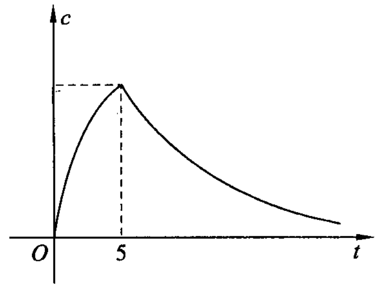


图 1.2

例 1.4 **取整函数**：设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数简称为 x 的**取整函数**，记为 $f(x)=[x]$. 例如 $[\pi]=3$, $[\sqrt{3}]=1$, $\left[\frac{2}{5}\right]=0$, $\left[-\frac{2}{5}\right]=-1$. 取整函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是整数集 $\mathbf{Z}$，这是一个分段函数，它的图形是阶梯状的，见图 1.3.

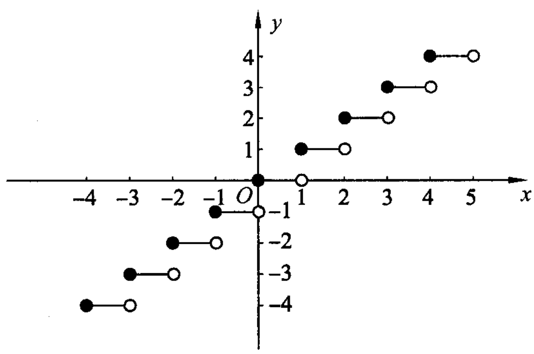


图 1.3

2. 反函数

函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 与因变量 y 的关系是相对应的，有时我们不仅要研究 y 随 x 而变化的情况，也要研究 x 随 y 而变化的情况. 为此，引入反函数的概念.

定义 1.2 函数 $y=f(x)$ 的定义域为数集 D，值域为数集 W. 若对每一个 $y\in W$，都有唯一的 $x\in D$ 适合 $f(x)=y$，那么就把此 x 值作为取定的 y 值的对应值，从而得到一个定义在 W 上的新函数，这个新函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**(inverse function)，记作

$$x=f^{-1}(y).$$

这个函数的定义域为 W，值域为 D. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由于习惯上以 x 为自变量，y 为因变量，所以一般将 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=$

$f^{-1}(x)$. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

单调函数必存在反函数. 实际上,对于有些在定义域内不单调的函数,我们可以根据需要求出在它的某个单调区间上的反函数.

例 1.5 正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[-1,1]$,对于任意 $y\in[-1,1]$,在 $(-\infty,+\infty)$ 内有无穷多个 x 与之对应,因此 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在反函数. 但如果把正弦函数的定义域限制在它的一个单调区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上,就可以得到函数 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数. 这个函数称为**反正弦函数**,记作 $y=\arcsin x$,它的定义域是 $[-1,1]$,值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,见图 1.4.

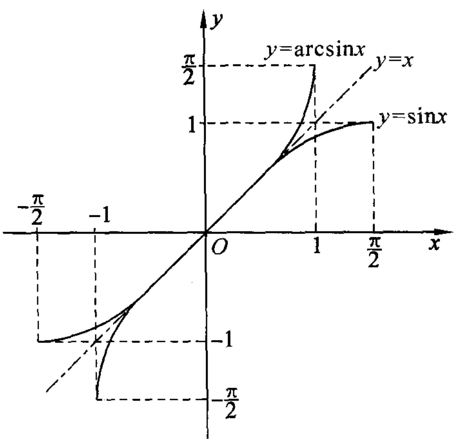


图 1.4

类似地,定义在 $[0,\pi]$ 上的余弦函数 $y=\cos x$ 的反函数为反余弦函数 $y=\arccos x$ $(x\in[-1,1],y\in[0,\pi])$;定义在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的正切函数 $y=\tan x$ 的反函数为反正切函数 $y=\arctan x\left(x\in(-\infty,+\infty),y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$;定义在 $(0,\pi)$ 内的余切函数 $y=\cot x$ 的反函数为反余切函数 $y=\operatorname{arccot}x(x\in(-\infty,+\infty),y\in(0,\pi))$.

函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot}x$ 统称为**反三角函数**.

3. 隐函数

前面我们用公式法表示的函数,如 $y=\sin x$, $y=x^3+\ln x$,它们的表达方式的特点是,直接给出由自变量的取值 x 求因变量对应值的规律(公式). 这种用 $y=f(x)$ 方式表达的函数叫**显函数**(explicit function),有些函数的表达方法不是这样的,例如,方程

$$6x-y+1=0 \tag{1.1}$$

也表示一个函数,因为当变量 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内取值时,变量 y 按方程规定的法则,有唯一确定的值与之对应,如 $x=0$ 时,$y=1$;$x=1$ 时,$y=7$,等等. 这种由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数称为**隐函数**(implicit function).

有的隐函数可以转化为显函数，如上面(1.1)式可转化为 $y=6x+1$，再如隐函数$x^2+y^2-1=0$，在 $y\geqslant 0$ 的范围内可转化为 $y=\sqrt{1-x^2}$；在 $y\leqslant 0$ 的范围内可转化为 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 把隐函数转化成显函数，叫做**隐函数的显化**.

但有些隐函数却很难甚至不能转化为显函数，如

$$2x-y+\sin xy=0,\quad e^y+xy-e=0.$$

四、函数的基本性态

1. 有界性

定义 1.3　若存在正数 M，使得函数 $y=f(x)$ 在其定义域的某区间内的一切 x 值总满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在该区间内为**有界函数**(bounded function)；若这样的 M 不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在该区间内为**无界函数**(unbounded function).

例如，函数 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x|\leqslant 1$ 总成立，这里 $M=1$(当然 M 也可取大于 1 的任何数). 而函数$y=\dfrac{1}{x}$在其定义域内显然是无界的，但函数 $y=\dfrac{1}{x}$在其定义域的某个子区域，如$(1,2)$或$(1,+\infty)$内却是有界的.

2. 单调性

若对于函数 $y=f(x)$ 定义域的某个区间内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $y=f(x)$ 在该区间内是**单调增加**(或**单调减少**)的，该区间称为函数的**单调区间**(monotone interval)，单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**(monotone function). 其图形是沿 x 轴正方向逐渐上升或下降的曲线.

如 $y=\ln x$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 内单调增加；$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，而在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，若对定义域内每一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**(even function)；若对定义域内每一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**(odd function).

函数 $y=x^2$ 是偶函数，$y=x^3$ 是奇函数，而 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. 周期性

对于函数 $f(x)$，若存在一个正常数 T，使得对于定义域内任何 x 值，$f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**(periodic function)，T 称为**函数的周期**，满足此关系的最小正数称为这个函数的**最小正周期**，最小正周期常简称为**周期**.

例如，函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$\tan x$ 和 $\cot x$ 都是以 π 为周期

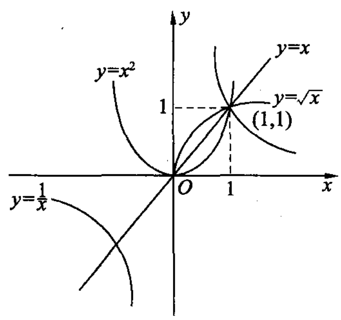
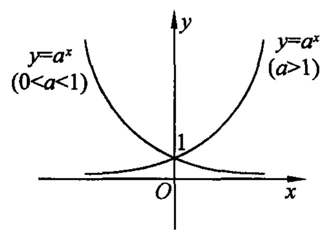
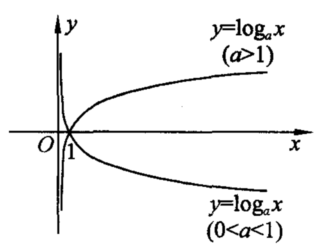
的周期函数.

五、初等函数

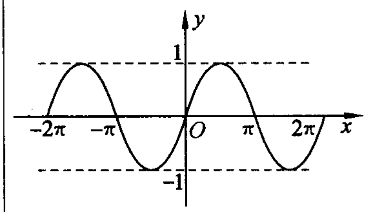
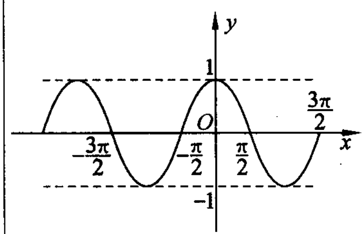
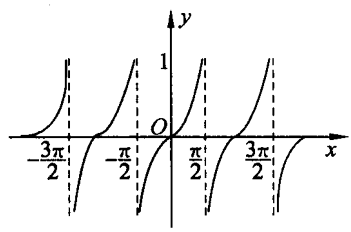
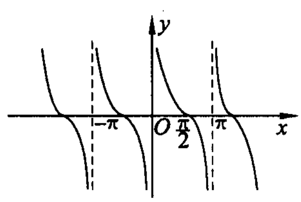
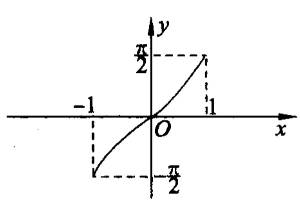
1. 基本初等函数

通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数，统称为**基本初等函数**(basic elementary function). 现将这五种基本初等函数列于表 1.2. 从中可清楚地看到这五种基本初等函数的定义域、值域、有界性、奇偶性、单调性、周期性及其函数图形等.

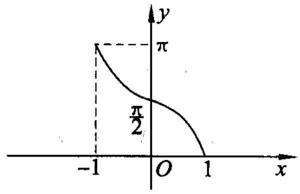
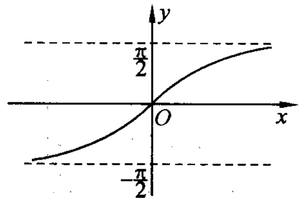
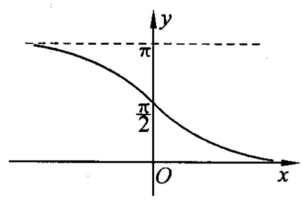
表 1.2

名称	表达式	定义域	图形	特性
幂函数	$y=x^{\mu}$ $(\mu\neq 0)$	随 μ 而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		过 $(1,1)$ 点，在第一象限内，当 $\mu>0$ 时，为增函数；当 $\mu<0$ 时，为减函数.
指数函数	$y=a^x$ $\begin{pmatrix}a>0\text{ 且}\\ a\neq 1\end{pmatrix}$	$(-\infty,+\infty)$		图形在 x 轴上方，且过点 $(0,1)$，当 $0<a<1$ 时为减函数；当 $a>1$ 时为增函数.
对数函数	$y=\log_a x$ $\begin{pmatrix}a>0\text{ 且}\\ a\neq 1\end{pmatrix}$	$(0,+\infty)$		图形在 y 轴右侧，且过点 $(1,0)$，当 $0<a<1$ 时，为减函数；当 $a>1$ 时，为增函数.

续表

名称		表达式	定义域	图形	特性
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，为奇函数，$\|\sin x\|\leqslant 1$.
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期，为偶函数，$\|\cos x\|\leqslant 1$
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期，为奇函数，$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内为增函数.
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期，为奇函数，$(0,\pi)$内为减函数.
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调增加，奇函数，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

续表

名称		表达式	定义域	图形	特性
反三角函数	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减少,值域为$[0,\pi]$
	反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调增加,奇函数,值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
	反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		单调减少,值域为$(0,\pi)$

2. 复合函数

定义 1.4 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,若 x 在 $u=\varphi(x)$的定义域或其子域上取值时,所对应的 u 值在 $y=f(u)$的定义域内,使$y=f(u)$有定义,这样每一个 x 通过 u 有 y 与之对应,则称 y 是 x 的**复合函数**(compound function),记为 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为**中间变量**(intermediate variable).

复合函数的概念可以推广到多个函数的情形,此时复合函数是通过多个中间变量传递而构成的.

例 1.6 求由 $y=\mathrm{e}^u$,$u=v+\sin v$,$v=1-2x$ 构成的复合函数.

解 u 是 y 的中间变量,v 是 u 的中间变量,依次代入可得

$$y=\mathrm{e}^{1-2x+\sin(1-2x)}.$$

例 1.7 已知 $f(x)=\begin{cases}3x, & x\geqslant 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$ 和 $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{3}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{5x}{3}, & x<0.\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解 当 $x\geqslant 0$ 时,函数 $g(x)$对应值为$-\frac{x}{3}$,非正,故此值代入函数 $f(x)$时,应代入当 $x<0$ 时的表达式,即当 $x\geqslant 0$ 时,$f[g(x)]=-\frac{x}{3}$;当 $x<0$ 时,$g(x)$对应值为$\frac{5x}{3}<0$,非正,代入 $f(x)$时应代入当 $x<0$ 时的表达式,即当 $x<0$ 时,$f[g(x)]=\frac{5x}{3}$. 故

$$f[g(x)]\begin{cases}-\dfrac{x}{3}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{5x}{3}, & x<0.\end{cases}$$

当复合函数的外层函数是分段函数时，须视内层函数的函数值处于外层函数定义域内的哪一个区间，来决定下一步运算该用外层函数的哪一个表达式.

例 1.8　指出函数 $y=\mathrm{e}^{\arcsin 3x}$ 是由哪几个函数复合而成的.

解　$y=\mathrm{e}^{\arcsin 3x}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\arcsin v$ 和 $v=3x$ 复合而成的.

例 1.9　指出函数 $y=\lg[\tan(x^2+\arcsin x)]$ 是由哪几个函数复合而成的.

解　$y=\lg[\tan(x^2+\arcsin x)]$ 是由 $y=\lg u$，$u=\tan v$，$v=x^2+\arcsin x$ 复合而成的.

3. 初等函数

定义 1.5　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次复合运算所构成的且仅用一个解析式表达的函数，称为**初等函数**(elementary function). 如

$$y=\sqrt{\mathrm{e}^x+\sin x},\ y=\frac{a^x+1}{a^x-1},\ y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

都是初等函数. 分段函数虽不是初等函数，但在不同段内的表达式，通常是初等函数.

第二节　极限

一、数列的极限

1. 数列

定义 1.6　设函数 $x_n=f(n)$（n 为正整数），当 n 从小到大取值，对应的函数值形成的一列数

$$f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$$

称为**数列**(sequence of numbers). 通常用 a_n 表示 $f(n)$，且称 a_n 为数列的**通项**(general term)，用 $\{a_n\}$ 记此数列.

在几何上，数列 a_n 可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$ 如图 1.5.

图 1.5

按函数的定义，数列 a_n 可看作自变量为整数 n 的函数：

$$a_n=f(n),$$

它的定义域是正整数集，当自变量 n 依次取 $1,2,3,\cdots$ 等一切正整数时，对应的函数值就