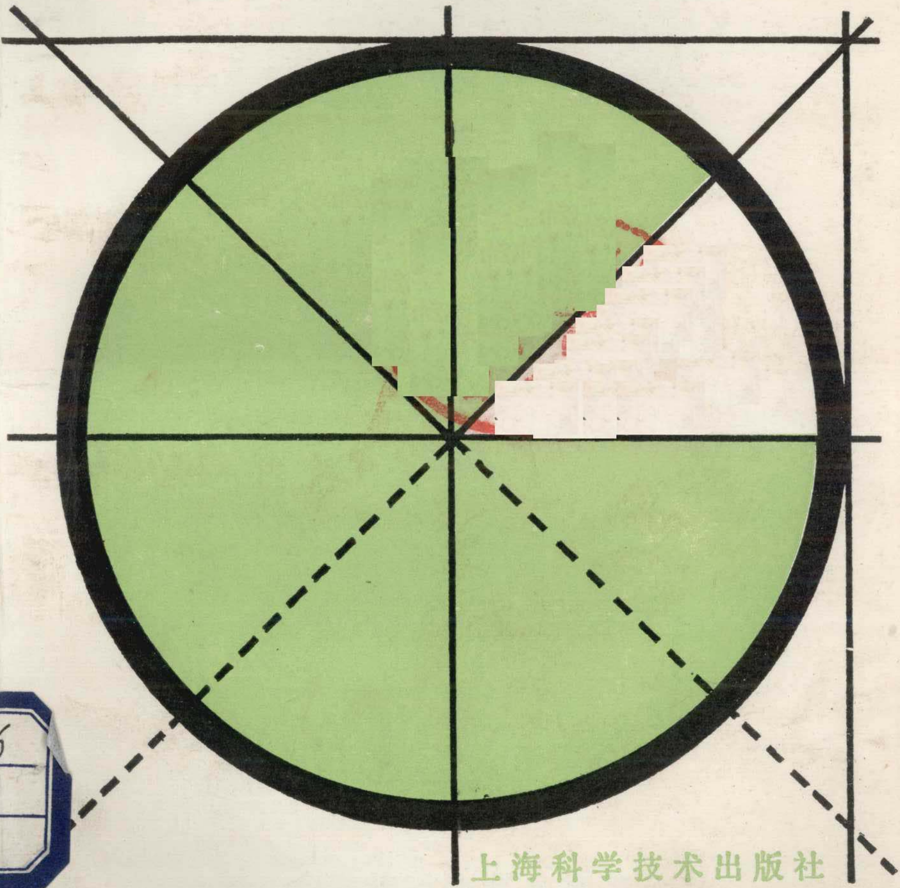
初中数学课外活动讲座

第二册

吴兴宗　汪天忠　等编



上海科学技术出版社

初中数学课外活动讲座

第 二 册

吴兴宗 汪天忠 等

上海科学技术出版社

初中数学课外活动讲座

第 二 册

吴兴宗　汪天忠　等编

上海科学技术出版社出版发行

（上海瑞金二路 450 号）

上海市印刷十二厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 5　字数 110,000

1988 年 11 月第 1 版　1991 年 1 月第 2 次印刷

印数 25,001—35,000

ISBN 7-5323-1181-3/G·159

定价：1.60 元

前　言

随着数学教学改革的深入，各中学纷纷开展数学学科小组、数学爱好者的课外活动。然而，为指导课外小组的活动，数学教师要花费大量时间去寻找材料、编写讲义；而学生缺乏一套较有系统、可供阅读的辅导书，它既能巩固课内所学的知识，又能开扩视野，提高数学思维能力。这就促使我们编写一套供广大初中学生阅读，或供他们开展数学小组活动使用的小丛书。

本丛书就是为此目的而编写的。全书共分三册，其内容与教材内容大致“同步”，初中一年级使用第一册，初中二年级使用第二册，初中三年级使用第三册。在编写过程中，我们尽量考虑内容与要求适合于较多的读者，即既要适合普通中学中等程度的学生，也要适合重点中学一般学生；既考虑缩短普通中学与重点中学学生的知识差距，也考虑进一步发展学生的智力与能力。

本书是这套书中的第二册，主要是为初二年级学生的课外活动而编写的。本书突出了初二数学中的重要内容，在加强基础知识的同时，介绍了有关的教学方法和数学问题，为进一步学习打下扎实的基础。本书特点是深入浅出，重视数学思想方法训练，重视解题思路的分析。本书可以作为课堂教学的补充，有些内容可作复习参考之用，也是课外活动的合适的教材。

本书第一讲、第十三讲由朱淳生同志编写；第二讲由柏新镒同志编写，第三讲由朱世耿同志编写；第四讲、第十讲由戴永贵、毛国隆同志编写；第五讲、第八讲由吴兴宗同志编写；第六讲由吴勇生同志编写；第七讲由陈士明同志编写；第九讲由干雪超同志编写；第十一讲由邬先鸿同志编写；第十二讲由许汝递同志编写；第十四讲由金惠明、叶令逸同志编写。全书由吴兴宗、汪天忠同志审稿，并协助作了许多修改。

由于编者水平有限，又兼完稿仓促，书中不免存在一些缺点、错误，恳望读者不吝赐教。

编　　者

一九八八年六月

目　　录

第一讲 算 术 根

算术根是初中数学中的一个应用很广泛的重要概念。如果算术根概念模糊，往往会导致解题错误，因而准确地掌握算术根概念，并灵活运用于解题之中，确实是很重要的。

由于任何正数的偶次方根有两个，它们互为相反数，因此开偶次方运算就不能有唯一确定的结果。例如，"求 9 的平方根与 4 的平方根的和"，就会得到四种不同的结果。在定义算术根后，"求 9 的算术平方根与 4 的算术平方根的和"，就可得到唯一确定的值 5。由此可见，算术根的概念可以说是为了使根式运算有唯一的确定的结果而提出来的。

算术根有两个特征：第一，被开方数是非负数（可以是正数或零）；第二，算术根是非负数。根式的一些性质都是在算术根的规定下才能成立，所以，根式的恒等变形，实质上就是算术根的恒等变形。

下面举例说明算术根概念在解题中的一些应用。

例 1 在$\triangle ABC$中，若$\angle C$是最大角，a、b、c分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边，化简$\sqrt{(a-c)^2}+\sqrt{(c-a-b)^2}$。

分析 要确定$a-c$和$c-a-b$的符号，只要比较a与c，以及c与$a+b$的大小。

解 $\because$ $\angle C$是最大角，

$\therefore$ $a<c$，$a-c<0$。

又 $\because$ $a+b>c$，

$\therefore\ c-a-b<0$。

$$\therefore\ \sqrt{(a-c)^2}+\sqrt{(c-a-b)^2}=(c-a)-(c-a-b)$$
$$=c-a-c+a+b$$
$$=b。$$

说明 本题根据已知条件，利用三角形的有关知识，确定了 $a-c$ 和 $c-a-b$ 的符号，从而应用了算术根的概念，正确求解。

例 2 已知：a、b、c、d 在数轴上的位置如图 1·1 所示，化简：

$$\sqrt{(c-d)^2}-\sqrt{d^2-2ad+a^2}-\sqrt[3]{(b-c)^3}$$
$$+\sqrt{(a+c)^2}-\sqrt{(a+b+c)^2}。$$

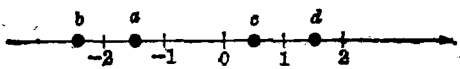


图1·1

分析 要确定 $c-d$、$d-a$、$a+c$、$a+b+c$ 的符号，可根据 a、b、c、d 所表示的点在数轴上的位置考虑。

解 由数轴上的点的位置可知，

$$c<d,\ d>a,\ |a|>c,\ a<0,$$

$\therefore\ c-d<0,\ d-a>0,\ a+c<0,\ a+b+c<0$。

$$\therefore\ \text{原式}=|c-d|-|d-a|-(b-c)+|a+c|$$
$$-|a+b+c|$$
$$=d-c-d+a-b+c-a-c+a+b+c$$
$$=a。$$

说明 (1) 要区别偶次方根的算术根与奇次方根的不同求法。

(2) 算术根与绝对值有着密切的联系，它们都是非负数，特别是 $\sqrt{a^2}$ 与 $|a|$ 的数值相等（一般地有：$\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$），因此，在求偶次方根的算术根时，可先把算术根问题转化为绝对值问题，然后再计算。

例 3 求 $1-\sqrt{(2a-1)^2}$ 的值。

分析 $2a-1$ 的符号可由 a 的取值范围不同而不同。

解 $1-\sqrt{(2a-1)^2}=1-|2a-1|$

$$=\begin{cases}2-2a, & \text{当 } a>\frac{1}{2}\text{时;}\\ 1, & \text{当 } a=\frac{1}{2}\text{时;}\\ 2a, & \text{当 } a<\frac{1}{2}\text{时。}\end{cases}$$

说明 当不知道变数 a 的取值范围，求算术根时，要根据变数 a 的取值范围分三步逐一讨论。讨论时，要先找出被开方数 $2a-1$ 等于零的 a 的值作为分界点(零点)。

例 4 化简：$(a-b)\sqrt{\frac{1}{b-a}}+\sqrt{\sqrt{(a-b)^2}}$。

分析 根据根式的意义，$b-a>0$，利用化去根号内的分母与算术根概念可化简。

解 $\because$ $\sqrt{\frac{1}{b-a}}$有意义，

$\therefore$ $b-a>0$。

$$\text{原式}=\frac{a-b}{b-a}\sqrt{b-a}+\sqrt{b-a}$$

$$=-\sqrt{b-a}+\sqrt{b-a}=0。$$

说明 本题由$\sqrt{\frac{1}{b-a}}$有意义，隐含了 $b-a>0$ 的条件。在解题时，要特别注意题目中的隐含条件。

例 5 若 $m+\sqrt{\frac{n}{p^2}}<0$，$p\neq0$，化简$\sqrt{m^2-2mn+n^2}$。

分析 由$\sqrt{\frac{n}{p^2}}$有意义，可确定 n 的符号；由$\sqrt{\frac{n}{p^2}}\geq0$，可推得 m 的符号；从而确定 $m-n$ 的符号。

解 $\because$ $\sqrt{\frac{n}{p^2}}$有意义，$\therefore$ $\frac{n}{p^2}\geqslant 0$，$n\geqslant 0$。

又 $\because$ $m+\sqrt{\frac{n}{p^2}}<0, \sqrt{\frac{n}{p^2}}\geqslant 0,$

$\therefore$ $m<0$，故 $m-n<0$，

$\therefore$ $\sqrt{m^2-2mn+n^2}=\sqrt{(m-n)^2}=|m-n|=n-m$。

说明　本题利用了算术根的两个特征，先后确定了 n 和 m 的符号，推得了 $m-n<0$，使问题得解，这种思想方法在解算术根的有关问题中常用。

例 6　已知$\sqrt{(x-3)^2}=(\sqrt{2}-1)\sqrt{3+2\sqrt{2}}$，求 x。

分析　先将$\sqrt{(x-3)^2}$ 与$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 化简，再利用绝对值概念求解。

根式$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$的化简，要先利用配方将 $3+2\sqrt{2}$ 化成 $(\sqrt{2}+1)^2$，再利用算术根概念求解。

解　$\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$，

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}$$
$$=\sqrt{2}+1,$$

原方程变形为$|x-3|=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$，

即　$|x-3|=1, x-3=1$ 或 $x-3=-1$，

$\therefore$ $x=4$ 或 $x=2$。

请读者试一试：将$\sqrt{6-2\sqrt{5}}$与$\sqrt{5-2\sqrt{6}}$化简。

例 7　若$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，求证：

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}。$$

分析　将 $x+\sqrt{2x-1}$ 与 $x-\sqrt{2x-1}$ 配成两数和或差的平方形

式，再利用算术根概念化简，推得结论。

证明 $\because$ $x+\sqrt{2x-1}=\frac{1}{2}\cdot 2x+\sqrt{2x-1}$

$$=\frac{1}{2}(2x+2\sqrt{2x-1})$$

$$=\frac{1}{2}(2x-1+2\sqrt{2x-1}+1)$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}+1)^2,$$

同理可得 $x-\sqrt{2x-1}=\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}-1)^2$,

$\therefore$ $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}+1)^2}+\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}-1)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\left|\sqrt{2x-1}+1\right|+\sqrt{\frac{1}{2}}\left|\sqrt{2x-1}-1\right|$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(|\sqrt{2x-1}+1|+|\sqrt{2x-1}-1|)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2x-1}+1-\sqrt{2x-1}+1)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2=\sqrt{2}。$$

说明 要注意本题的已知条件：$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，其中$x\geqslant\frac{1}{2}$，可保证$\sqrt{2x-1}$有意义；$x\leqslant 1$，可推得$\sqrt{2x-1}\leqslant 1$，故$\sqrt{2x-1}-1\leqslant 0$，才能得到正确的结论。

例 8 若 $a<0$，$b<0$ 时，化简$\sqrt{-a-b-2\sqrt{ab}}$。

分析 将$-a-b-2\sqrt{ab}$配成完全平方的形式，再找出分界点，逐

一讨论。

解 $\because\ a<0, b<0,$

$\therefore\ -a>0, -b>0,$

$-a=(\sqrt{-a})^2,\ -b=(\sqrt{-b})^2,$

$\therefore\ \sqrt{-a-b-2\sqrt{ab}}$

$$=\sqrt{(\sqrt{-a})^2-2\sqrt{(-a)(-b)}+(\sqrt{-b})^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})^2}=|\sqrt{-a}-\sqrt{-b}|$$

$$=\begin{cases}\sqrt{-a}-\sqrt{-b}, & \text{当 } a<b<0 \text{ 时,}\\ 0, & \text{当 } a=b<0 \text{ 时,}\\ \sqrt{-b}-\sqrt{-a}, & \text{当 } b<a<0 \text{ 时。}\end{cases}$$

说明 本题要特别注意：a、b 都表示负数的条件，因此$-a$、$-b$ 都是正数，$\sqrt{-a}$、$\sqrt{-b}$ 都有意义。

本题的分界点(零点)的求法：$\sqrt{-a}-\sqrt{-b}=0$，$\sqrt{-a}=\sqrt{-b}$，$\therefore\ a=b<0$。当 $a<b<0$ 时，$-a>-b>0$，$\sqrt{-a}>\sqrt{-b}>0$，则$\sqrt{-a}-\sqrt{-b}>0$；当 $b<a<0$ 时，$\sqrt{-b}-\sqrt{-a}>0$。

本题容易得出错误结论：原式$=|\sqrt{a}-\sqrt{b}|$，请读者分析一下，错在哪里？

例 9 解下列方程：

(1) $\sqrt{2x^2-3x+1}+1=0$；

(2) $\sqrt{x^2-6x+9}+x=3$。

分析 (1) 根据算术根的特征，判断方程无解；(2) 将原方程变形为：$\sqrt{(x-3)^2}=3-x$，利用算术根概念，求出 x 的取值范围。

解 (1) $\sqrt{2x^2-3x+1}=-1$，

$\therefore$ 原方程无解。

(2) $\sqrt{(x-3)^2}=3-x$,

$\therefore\ x\leqslant 3$。

说明 判断方程无解，也是解方程的结果之一；$x\leqslant 3$ 的含意是方程有无数个解，这些解都不大于 3 。

本题若用常规方法求解，不但过程繁琐，而且常会得到错误结论。

例 10 若 $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$，求

$$\frac{x^4-x^3-9x^2-5x+5}{x^2-4x+3}\text{的值。}$$

分析 将 $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 变形为 $x=2-\sqrt{3}$，得 $x-2=-\sqrt{3}$，两边平方整理后得 $x^2-4x+1=0$，再把要求值的代数式的分子、分母都化为含有 x^2-4x+1 的式子，可求值。

解 $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}$

$=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$,

$\therefore\ 2-x=\sqrt{3}$。

两边平方整理后得：$x^2-4x+1=0$,

$$\therefore\quad \frac{x^4-x^3-9x^2-5x+5}{x^2-4x+3}$$

$$=\frac{(x^2-4x+1)(x^2+3x+2)+3}{(x^2-4x+1)+2}$$

$$=\frac{0\cdot(x^2+3x+2)+3}{0+2}=\frac{3}{2}\text{。}$$

说明 解本题的两个关键点是：(1) 化简：$\sqrt{7-4\sqrt{3}}\neq\sqrt{3}-2$；(2)把要求值的代数式的分母写成$(x^2-4x+1)+2$；分子除以 x^2-4x+1 得商为 x^2+3x+2，余式为 3，故分子就化为 $(x^2-4x+1)\cdot(x^2+3x+2)+3$。

本题还可用"降次法"求解，读者可自行求解。

习　题　一

（本习题中的字母不一定表示正数。）

1. 下列四个式子：

(1)$\sqrt{4}=\pm2$；　　(2)$\sqrt{9}=3$；

(3)$\sqrt{a^2}=a$；　　(4)$\sqrt[3]{a^3}=|a|$，

其中正确式子的个数是（　　）。

(A) 3；　(B) 2；　(C) 1；　(D) 0。

2. 计算$\sqrt{-a}\cdot\sqrt[3]{a}$的结果是（　　）。

(A) $\sqrt[3]{-a^2}$；(B) $-\sqrt[6]{a^5}$；(C) $-\sqrt[6]{-a^5}$；(D) $\sqrt[6]{-a^5}$。

3. 把 $(3-\pi)\sqrt{x}$中的 $(3-\pi)$ 移入二次根号内，其结果是（　　）。

(A) $\sqrt{(3-\pi)^2x}$；　　(B) $-\sqrt{(\pi-3)^2x}$；

(C) $\sqrt{(\pi-3)^2x}$；　　(D) 以上答案都不对。

4. A、B 为数轴上位于原点两侧的两个点，它们分别表示实数 a 和 b，且$|OA|=\frac{1}{2}|OB|$，则$\sqrt{(a-b)^2}=$（　　）。

(A) $3b$；　(B) $3|b|$；　(C) $3|a|$；　(D) $3a$。

5. 若$\sqrt{(-a)^2}>-a$，则 a 的取值范围是________。

6. 化简：$2a\sqrt{\frac{-a-2}{4a^2}}=$________。

7. 若 $x=2.5, y=3.5$，则

$\sqrt{x^3-x^2y+\frac{1}{4}xy^2}+\sqrt{\frac{1}{4}x^3-x^2y+xy^2}$的值等于________。

8. 等式$\sqrt{a^2b^2}=-ab$ 成立的条件是________。

9. 解方程：$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=0$。

10. 解方程：$\sqrt{3x^2+8}+x^2=0$。

11. 解方程$\sqrt{4x^2-4x+1}+2x-1=0$。

12. (1) 若 $m<n<0$, 且 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{m}{n}}-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)$,

求 $y=\frac{2m\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$的值。

13. 计算：$\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$。

14. 计算 $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$。

15. 化简：$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2}$。

第二讲　式的变换

式的变换就是根据式的有关概念，利用式的性质与有关的法则、公式，将式改变形状，以达到迅速地化简或求值的目的。

式的变换是初中数学的重要内容之一，在有关式的化简、计算或证明中都有广泛的应用。灵活地进行式的变换，往往是解题的关键，而要正确地进行式的变换，必须要深刻地理解式的有关概念与性质，熟练地掌握有关的法则与公式，并熟悉公式的各种变形，以能在不断地探索和积累解题方法中逐步提高进行式的变换的能力。

本文仅以整式、分式和根式的有关计算、化简、证明等问题为例，说明式的变换的方法和应用。

例 1　若$\sqrt{a^2}=9$，$\sqrt{b^2}=4$，且$\sqrt{(a-b)^2}=b-a$，则$\sqrt{(a+b)^2}$等于(　　　　)。

(A) $a+b$;　　　　(B) $-(a+b)$;

(C) $a+b$ 或 $-(a+b)$;　　　　(D) 以上答案都不对。

分析　要确定$\sqrt{(a+b)^2}$的结果，只要考虑怎样确定 $a+b$ 的符号，由已知条件可知 $b>a$，故 a 不能等于 9，这样 $a+b$ 的符号可确定。

解　$\because$　$\sqrt{(a-b)^2}=b-a$，$\therefore$　$b\geqslant a$。

由$\sqrt{b^2}=4$，得 $b=\pm4$;

由$\sqrt{a^2}=9$，得 $a=-9$。

$\therefore\ a+b=-5$ 或 $a+b=-13$,

即 $a+b<0$, $\therefore\ \sqrt{(a+b)^2}=-(a+b)$，故选(*B*)。

说明 正确理解算术平方根的概念与二次根式的性质是解本题的关键，也是进行有关的根式变形的关键。

例 2 计算：$(3+\sqrt{6}+\sqrt{3})\div(2+\sqrt{6}+\sqrt{2})$。

分析 将根式的除法转化为分母有理化问题，进行化简。

解法一 原式$=\dfrac{(3+\sqrt{6}+\sqrt{3})(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})}{[(2+\sqrt{2})+\sqrt{6}][(2+\sqrt{2})-\sqrt{6}]}=$

$$\frac{6+3\sqrt{2}-3\sqrt{6}+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-6+2\sqrt{3}+\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}。$$

说明 本题是较复杂的分母有理化问题，一般应利用分式的基本性质，将分母中根号逐渐化去。若本题的分子与分母先同乘 $(2+\sqrt{6}-\sqrt{2})$，虽也能得到同样的结果，但过程繁琐，读者不妨试一试，并想一想，为什么分子、分母先同乘$[(2+\sqrt{2})-\sqrt{6}]$，会使过程简化？

解法二 仔细观察本题的分子、分母，可发现分子可变形为 $\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)$，而分母可变形为$\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1$，则

$$原式=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

这样的变换显然简单得多了。

例 3 已知：$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p+q}$，求$\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}$的值。