高普考、高普檢、特考
分類職位考試
公務員各類考試
大專、五專、商職學生

參考用書

統計學九百題

附歷屆高普特考、留學考試及研究所入學考試試題解答

下冊

黃琼珠 編譯

五南出版社 印行

本書共分十七章，每章計列綱要、問題解答、補充問題及試題詳解等四部分，凡八七五題。各章前三部分係譯自Murray R. Spiegel博士所著統計學理論及問題，後部分則爲歷年高普特考、分類職位考試、留學考試以及研究所入學考試等試題之解答。舉凡有關統計學之各類型問題，均已搜羅無遺。讀者如能細加演練，詳爲研討，一則能貫通統計學原理，二則能了解考試命題之重點與趨勢，助益考試非淺，允爲參加各類考試之最佳必備參考用書。

五南出版社

統計學九百題

附：歷屆高普特考、留學考試、研究所入學考試試題解答。

目　錄
（下　册）

上　册　篇　目

第十一章　小樣本理論—司徒登的t分配和X^2分配

本章要點

小樣本

在前幾章，我們經常使用樣本大小$N>30$的事實，稱爲大樣本。隨著N的增加許多樣本統計量分配愈近似於常態。因爲當樣本大小$N<30$時（稱小樣本），近似常態的程度降低，即隨N之減小，愈不近似常態，所以必須有所修正。

研究小樣本樣本統計量分配稱爲小樣本理論。更適當的名稱是精密抽樣理論。因爲從大樣本所得的結果和小樣本所得者相同，在這章我們要學習二種重要的分配稱爲司徒登t分配和x^2分配（卡方分配）。

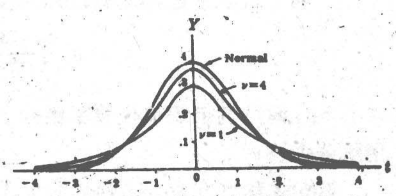
司徒登的t分配

讓我們定義統計量

$$t=\frac{\bar{X}-\mu}{s}\sqrt{N-1}=\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{s}/\sqrt{N}} \tag{1}$$

t很類似z統計量$z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}$

若我們考慮到樣本大小N從一個常態分配整體（或近似常態），它的平均數是μ，且若對每一個樣本，使用樣本平均數X和樣本標準差s或$\hat{s}$而算出t，則t的樣本分配可以求得，這分配（看圖11-1　）的公式如下：



變異值ν之t分配

圖11-1

$$Y=\frac{Y_0}{\left(1+\frac{t^2}{N-1}\right)^{N/2}}=\frac{Y_0}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}} \tag{2}$$

其中Y_0是基於N之常數，所以在曲綫下的總面積是1，而常數$\nu=(N-1)$稱為自由度數（ν是希臘字母 *nu*）。

(2)式分配稱爲司徒登t分配，爲Gosset 發現，在20 世紀初期以“學生”的筆名出版。

當ν或N是很大的值時（$N\geq 30$）(2)式的曲綫很近似於標準常態分配

$Y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$，如圖11-1所示。

信賴區間

如同在第九章常態分配所做，我們能定95％，99％或其他的信賴區間，使用附錄中的t分配表。如此，我們能在特定之信賴度限制內推定整體平均數μ。

例：若一個t分配的兩端的面積各爲2.5％的t值是$-t_{.975}$和$t_{.975}$，則一個95％的信賴區間的t是

$$-t_{.975}<\frac{\bar{X}-\mu}{s}\sqrt{N-1}<t_{.975} \tag{3}$$

其中，已知μ是推定在區間之內

$$\bar{X}-t_{.975}\frac{s}{\sqrt{N-1}}<\mu<\bar{X}+t_{.975}\frac{s}{\sqrt{N-1}} \tag{4}$$

有95％的信賴度（即機率0.95）。注意$t_{.975}$表示97.5的百分位數值，而$t_{.025}=-t_{.975}$表示2.5。

一般，表示整體平均數的信賴度界限的方法是

$$\bar{X}\pm t_c\frac{s}{\sqrt{N-1}} \tag{5}$$

其中$\pm t_c$稱爲判定值或信賴度係數；隨所要信賴水準和樣本大小而不同，可用附錄中查得。

第(5)式和第九章之信賴界限（$\bar{X}\pm z_c\sigma/\sqrt{N}$）比較，可說明在小樣本中我們以$t_c$取代$z_c$（$t_c$是從$t$分配求得，$z_c$是從常態分配求得）以$\sqrt{N/(N-1)}\cdot s=\hat{s}$ 代替$\hat{\sigma}$。當N增加時，二種方法趨於一致。

假設和顯著性測驗

如同在第十章所討論的，假設和顯著性測驗很容易地可推廣至有關小本的問題，唯一的不同是 z 值或 z 統計量將被 t 值或 t 統計量取代。

1. 平均數

測驗假設 H_0 ——一個常態整體有平均數 μ，我們使用 t 值或 t 統計量

$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{s}\sqrt{N-1}=\frac{\overline{X}-\mu}{\hat{s}}\sqrt{N} \tag{6}$$

其中 $\overline{X}$ 是樣本大小爲 N 之平均數。

除了以 $\hat{s}=\sqrt{N/(N-1)}\cdot s$ 取代 σ 的位置位，(6)式很類似在大樣本中使用 z 值的公式 $z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}$。不同的是 z 值是屬常態分配的，而 t 值乃 t 分配。

2. 平均數差

假定二個隨機抽樣，樣本大小爲 N_1 和 N_2 都從常態整體取得。常態整體的標準差相等（$\sigma_1=\sigma_2$），又設這兩個樣本的平均數和標準差分別爲 $\overline{X}_1$，$\overline{X}_2$ 和 s_1，s_2。測驗假設 H_0：這兩個樣本來自相同的整體（即 $\mu_1=\mu_2$ 和 $\sigma_1=\sigma_2$）。我們使用 t 值如下：

$$t=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sigma\sqrt{1/N_1+1/N_2}} \quad \text{其中} \quad \sigma=\sqrt{\frac{N_1s_1^2+N_2s_2^2}{N_1+N_2-2}} \tag{7}$$

t 分配的自由度是 $\nu=N_1+N_2-2$。

在方程式(2)的 z 值內，以(7)式合理地取代 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$，且以加權平均數 $\dfrac{(N_1-1)\hat{s}_1^2+(N_2-1)\hat{s}_2^2}{(N_1-1)+(N_2-2)}$（其中 $\hat{s}_1^2$ 和 $\hat{s}_2^2$ 是 σ_1^2 和 σ_2^2 的不偏推定量）作爲 σ^2 的一個推定量。

χ^2 的分配

讓我們定義統計量

$$\chi^2=\frac{Ns^2}{\sigma^2}=\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_N-\overline{X})^2}{\sigma^2} \tag{8}$$

其中 χ 是希臘字母 *chi* 而 χ^2 讀做 *chi-square*。

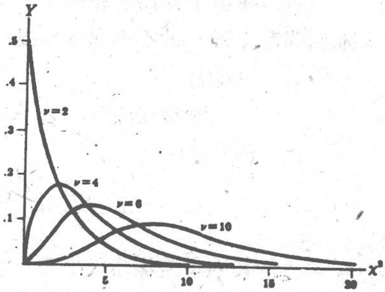
若我們考慮一個樣本大小爲 N，其樣本從一個標準差爲 σ 的常態整體中

取出，且若我們對每一樣本算出 χ^2，則樣本 χ^2 分配可以求得，這分配稱爲 χ^2 分配。公式如下：

$$Y = Y_0(\chi^2)^{\frac{1}{2}(\nu-2)} \cdot e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

$$= Y_0\chi^{\nu-2}e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \tag{9}$$

其中 $\nu = N-1$ 是自由度數目。Y_0 是與 ν 有關之常數，而在曲綫以下之總面積是 1。對應於各變數值 ν 的 χ^2 分配在圖 11-2 Y 之最大值發生於 $\chi^2 = \nu - 2$，對 $\nu \geq 2$ 的情況。



變異值之 x^2 分配

圖 11-2

X^2 的信賴區間

如同在常態和 t 分配中所做，我們能定義 95 %，99 %或其他的信賴界限，和區域。藉使用附錄中 χ^2 分配表而得。如此，我們可以藉樣本標準差 s 在特定的信賴界限之內推定出整體標準差 σ。

例如：若 $\chi^2_{.025}$ 和 $\chi^2_{.975}$ 是 χ^2 值（稱判定值），其中在此分配之兩端的面積分別是2.5 %，則 95 %的信賴區域是

$$\chi^2_{.025} < \frac{Ns^2}{\sigma^2} < \chi^2_{.975} \tag{10}$$

從其中我們知得 σ 值被推定在以下區間內，有 95 %之信賴度

$$\frac{s\sqrt{N}}{\chi_{.975}} < \sigma < \frac{s\sqrt{N}}{\chi_{.025}} \tag{11}$$

同樣地，其他的信賴區域亦可被求得 $\chi_{.025}$ 和 $\chi_{.0975}$ 代表了 2.5和 97.5 的百分位數值。

附錄Ⅳ，告訴我們對應於各種自由度數目 ν 下的百分位數值。對 ν 值很大的數而言（$\nu \geq 30$），我們能使用此事實，即（$\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$）是非常近似於平均數爲 0，而標準差爲 1 的常態分配，所以若 $\nu \geq 30$，常態分配表同樣可以使用。那麼，若 χ^2_p 和 z_p 是 χ^2 分配和常態分配的第 p 百分位數，我們有

$$\chi^2_p = \frac{1}{2}(z_p + \sqrt{2\nu - 1})^2 \tag{12}$$

這例子的一致性和第八章、九章所得之結果相近。

χ^2 分配的應用見第十二章。

自由度

為了計算一個統計量，像(1)式或(8)式，使用由樣本（所得之觀察值）和某些整體母數是需要的，若這些母數是未知的，它們必須從樣本中推定而得

統計量的自由度數目記為ν，定義為：在樣本中獨立觀察值的數目N，減去必須由樣本觀察值推定的整體母數的數目k。符號表示為$\nu = N - k$。

在統計量(1)式中的例子，在樣本中獨立觀察值的數目是N，從其中我們可以算出$\bar{X}$和s，然而因我們必須推定μ，所以$k = 1$，而$\nu = N - 1$。

在統計量(8)式中的例子，在樣本中獨立觀察值的數目是N，從它可以算出s。然而，因必須推定σ，所以$k = 1$，而$\nu = N - 1$。

問題解答

司徒登的 t 分配

1. 自由度為9之司徒登t分配，圖形如圖 .11-3，求下列各小題之t_1值
   (a) 右邊之陰影區域值為0.05
   (b) 陰影區域總值＝0.05
   (c) 非陰影區域總值＝0.99
   (d) 左邊陰影區域＝0.01
   (e) t_1左邊區域之值為0.9

【解答】 (a) 若右邊陰影區是0.05，則t_1左邊區域為（$1-0.05$）＝0.95而t_1表示第95個百分位數，$t_{.95}$。

查書後之附錄表Ⅲ，先在ν行找出9然後從9這一列往右移至$t_{.95}$這一行，其所對應之1.83即所求之t值。

(b) 若陰影區總值為0.05，則由對稱知右邊之陰影區為0.025。因此t_1左邊的區域為（$1-0.025$）＝0.975，t_1表示第97.5個百分數$t_{.975}$。由附錄Ⅲ可查出2.26為所求之t值。

(c) 若非陰影區總值為0.99，則陰影區總值＝（$1-0.99$）＝0.01，而右邊之陰影區為$0.01/2 = 0.005$，查附錄可知

$t_{.995}=3.25$ 。

(d) 若左邊陰影區爲0.01，則由對稱知右邊陰影區亦爲0.01，查附錄知 $t_{.99}=2.82$，因此左邊陰影區爲0.01之 t 判定值爲－2.82 。

(e) 若 t_1 左邊區域爲0.9，則 t_1 爲第90個百分數 $t_{.90}$ 查表知其值爲1.38 。

2. 若 t 分配之右尾區域爲0.05，自由度 ν 各爲(a) 16，(b) 27，(c) 200，試求各 t 之判定值。

【解答】利用附錄表Ⅲ，發現 $t_{.95}$ 這一行之值：(a) 1.75 對應 $\nu=16$，(b) 1.7 對應 $\nu=27$，(c) 1.645 對應 $\nu=200$（此和利用常態分配所求出者同）。

3. 常態分配95％的信賴係數（雙尾測驗）爲±1.96，當(a) $\nu=9$，(b) $\nu=20$，(c) $\nu=30$，(d) $\nu=60$，t 分配的對應係數爲何？

【解答】信賴係數爲95％（雙尾測驗）則圖 11－3 之陰影區總值爲0.05，因此右邊陰影區爲0.025，t 之對應判定值爲 $t_{.975}$。則所求信賴係數爲 $\pm t_{.975}$。由題所給之 ν 得其值爲(a) ±2.26，(b) ±2.09，(c) ±2.04，(d) ±2.00 。

4. 測量10個球體半徑，得其平均數 $\overline{X}=4.38$ 吋，標準差 $s=0.06$ 吋，求實際直徑之(a) 95％，(b) 99％之信賴界限。

【解答】(a) 95％之信賴界限爲 $\overline{X}\pm t_{.975}(s/\sqrt{N-1})$。

因 $\nu=N-1=10-1=9$，$t_{.975}=2.26$（由習題3 (a)知），則利用 $\overline{X}=4.38$，$s=0.06$ 得95％之信賴界限爲 $4.38\pm2.26(0.06/\sqrt{10-1})=4.38\pm0.0452$ 吋。

因此我們有95％的信心說實際的平均值落在（4.38－0.045）＝4.335吋和（4.38＋0.045）＝4.425吋間。

(b) 99％之信賴界限爲 $\overline{X}\pm t_{.995}(s/\sqrt{N-1})$。

因 $\nu=9$，$t_{.995}=3.25$。所以99％之信賴界限為 $4.38\pm3.25(0.6/\sqrt{10-1})=4.38\pm0.065$ 吋，亦即99％之信賴區間為4.315吋至4.445吋。

5.　(a)假若用大樣本理論的方法對上題有效，試解之。(b)比較二種方法的結果。

【解答】(a)　利用大樣本方法，95％之信賴界限為

$$\overline{X}\pm1.96\sigma\sqrt{N}=4.38\pm1.96(0.06/\sqrt{10})$$
$$=4.38\pm0.037 \text{ 吋}$$

在此我們是用標準差0.06作為 σ 之估計值。

同樣地，99％之信賴界限為

$$\overline{X}\pm2.58\sigma/\sqrt{N}=4.38\pm2.58(0.06/\sqrt{10})$$
$$=4.38\pm0.049 \text{ 吋}$$

(b)　用小樣本（或稱精確樣本）所求的信賴區間較大樣本為大。此乃因小樣本的可信度和精確性較大樣本為低。

6.　以前某機器所製造出的肥皂厚度為0.05吋，今為了解機器性能是否良好，取10個肥皂為樣本得平均厚度0.053吋，標準差0.003吋，試以(a)0.05，(b)0.01之顯著水準檢定"機器性能良好"之假設。

【解答】吾人欲從下二假設中作決定

H_0：$\mu=0.05$ 機器性能良好

H_1：$\mu\neq0.05$ 機器性能不好

我們須採雙尾檢定。

$$\text{在假設 } H_0 \text{ 下，} t=\frac{\overline{X}-\mu}{s}\sqrt{N-1}$$
$$=\frac{0.053-0.050}{0.003}\sqrt{10-1}$$
$$=3.00$$

(a)　以0.05之顯著水準作雙尾測驗，我們所採決策規則為：

(1)　若 t 介於 $-t_{.975}$ 和 $t_{.975}$ 間則接受 H_0；自由度為10

$1=9$，即 t 須介於 -2.26 和 2.26 之間。

(2) 否則拒絕 H_0。

因 $t=3.00$，以 0.05 之水準吾人拒絕 H_0。

(b) 以 0.01 之顯著水準作雙尾測驗，我們採下決策規則：

(1) 若 t 介於 $-t_{.995}$ 和 $t_{.995}$ 間則接受 H_0，自由度爲 $10-1=9$，亦即 t 須介於 -3.25 和 3.25 間。

(2) 否則拒絕 H_0。

因 $t=3.00$，故以 0.01 之顯著水準吾人接受 H_0。

以 0.05 之水準我們拒絕 H_0，而以 0.01 之水準則不拒絕，所以我們說樣本的結果爲"可能顯著的"（參考第十章第 5 題）。因而須對機器作檢查或另作樣本調查。

7. 一廠所產繩子取出 6 條，測驗其受損強度，得其平均強度爲 7750 磅標準差 145 磅，而廠商謂其平均數受損強度爲 8000 磅。以 (a) 0.05，(b) 0.01 之顯著水準，吾人能否支持廠商之言？

【解答】 我們從下二假設中作決定

H_0：$\mu=8000$ 磅，廠商之言正確

H_1：$\mu<8000$ 磅，廠商之言不正確

須採單尾測驗。

$$\text{在假設 } H_0 \text{ 下，} t=\frac{\bar{X}-\mu}{s}\sqrt{N-1}$$

$$=\frac{7750-8000}{145}\sqrt{6-1}$$

$$=-3.86$$

(a) 以 0.05 之顯著水準作單尾測驗，決策規則爲：

(1) 若 t 大於 $-t_{.95}$ 則接受 H_0；自由度爲 $6-1=5$，$\therefore t$ 須大於 -2.01。

(2) 否則拒絕 H_0。

因 $t=-3.86$，所以拒絕 H_0。

(b) 以 0.01 之顯著水準作單尾測驗，決策規則爲：

(1) 若 $t>-t_{.99}$ 則接受 H_0，也就是必須 $t>-3.36$。

(2)　否則拒絕H_0。

因$t=-3.86$，吾人拒絕H_0。

我們下結論說廠商之言正確是極不可能的。

8.　16個來自同一城市的學生做IQ（智商）測驗，其平均數爲107，標準差10，另14個來自另一城市的學生測驗得平均112，標準差8，則在(a) 0.01，(b) 0.05 之顯著水準下這二群學生IQ是否顯著差異？

【解答】 以μ_1，μ_2表示這兩個地區學生IQ的整（母）體平均數，吾人從下二假設中作決定

H_0：$\mu_1=\mu_2$，這兩群學生沒有差異

H_1：$\mu_1\neq\mu_2$　兩群間有顯著差異。

在假設H_0之下，$t=\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sigma\sqrt{1/N_1+1/N_2}}$

而　$\sigma=\sqrt{\dfrac{N_1s_1^2+N_2s_2^2}{N_1+N_2-2}}$

則　$\sigma=\sqrt{\dfrac{16(10)^2+14(8)^2}{16+14-2}}$

$=9.44$

$t=\dfrac{112-107}{9.44\sqrt{1/16+1/14}}$

$=1.45$

(a)　以0.01之顯著水準作雙尾測驗，若t超出$-t_{.995}$和$t_{.995}$之區間則拒絕H_0，自由度$=N_1+N_2-2=(16+14-2)=28$該區間爲-2.76至2.76間。

因而以0.01之顯著水準我們不能拒絕H_0。

(b)　以0.05之顯著水準作雙尾測驗，若t超出$-t_{.975}$和$t_{.975}$之區間（亦即-2.05和2.05）則拒絕H_0。

因此以0.05之水準我們不能拒絕H_0。

所以可下結論說這兩群學生的IQ沒有顯著差異。

9.　一農場想知某種肥料對小麥產量是否有影響，爲此，挑出24塊

等面積的土地，將其中一半施以此種肥料，另一半不施（控制組）。不施肥的平均小麥產量爲4.8 bushels，標準差0.4 bushels 而施肥的平均產量爲5.1 bushels 標準差0.36 bushels，則以(a)0.01，(b)0.05之顯著水準，能否說肥料對小麥產量有顯著影響？

【解答】 以μ_1，μ_2 各別表示施肥地和不施肥地的整（母）體平均產量，須從下二假設中作決定。

H_0 ：$\mu_1 = \mu_2$ ，差異乃機會所致

H_1 ：$\mu_1 > \mu_2$ ，肥料促進生產

在H_0之下，$t = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sigma\sqrt{1/N_1 + 1/N_2}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$$

則 $$\sigma = \sqrt{\frac{12(.40)^2 + 12(.36)^2}{12+12-2}}$$

$$= .397$$

$$t = \frac{5.1-4.8}{.397\sqrt{1/12+1/12}}$$

$$= 1.85$$

(a) 以0.01 之顯著水準作單尾測驗，若t大於$t_{.99}$則拒絕H_0，$t_{.99} = 2.51$（自由度$= N_1 + N_2 - 2 = 12+12-2 = 22$）。

因而以0.01 之顯著水準不能拒絕H_0。

(b) 以0.05 之水準作單尾測驗，若$t > t_{.95}$則拒絕H_0，$t_{.95} = 1.72$（自由度$= 22$）。

故以0.05之顯著水準，吾人可拒絕H_0。

我們說肥料對小麥產量的影響是“可能顯著”。所以欲作明確結論有待更進一步之證明。

卡方分配

10. 自由度爲5之卡方分配圖，表示於 圖 11-4，試求χ^2 的判定値

(a) 右邊陰影區域＝0.05

(b) 陰影區總值＝0.05
(c) 左邊陰影區域＝0.1
(d) 右邊陰影區域＝0.1

【解答】(a) 右邊陰影區域爲0.05，則 χ^2_2 的左邊區域爲（1－0.05）＝0.95，χ^2_2 表第95個百分數，$\chi^2_{.95}$。

參看附錄表Ⅳ，在 ν 行找出5，然後往右推，至 $\chi^2_{.95}$ 之行止，其所對應之11.1即 χ^2 之判定值。

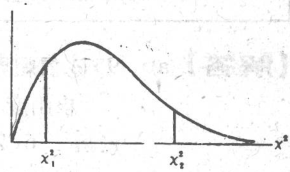


圖11－4

(b) 因分配不對稱，所以陰影區爲0.05之判定值有許多個，例如右邊陰影區＝0.04 左邊＝0.01 等。一般習慣都令左右兩邊相邊，也就是每邊0.025。

若右邊陰影區爲0.025則 χ^2_2 之左邊區域爲1－0.025＝0.975，χ^2_2 表第97.5個百分數，由附錄Ⅳ知其爲12.8。

同樣地，若左邊陰影區爲0.025則 χ^2_1 之左邊區域爲0.025，χ^2_1 表第2.5個百分數，$\chi^2_{.025}$ 其值爲0.831。

因此判定值爲0.831和12.8。

(c) 若左邊陰影區是0.1，χ^2_1 表第10個百分數，$\chi^2_{.10}$，等於1.61。

(d) 若右邊陰影區爲0.01則 χ^2_2 之左邊區域爲0.99，χ^2_2 表第99個百分數，$\chi^2_{.99}$，等於15.1。

11． 若自由度 ν 爲(a) 15，(b) 21，(c) 50，試求當 χ^2 分配右邊區域爲0.05之 χ^2 判定值。

【解答】附錄Ⅳ，由 $\chi^2_{.95}$ 行知(a) 25.0 對應 ν ＝15，(b) 32.7 對應 ν ＝21 (c) 67.5 對應 ν ＝50。

12． 求自由度爲(a) 9，(b) 28，(c) 40所對應 χ^2 之中位數值。

【解答】查附錄Ⅳ，由 $\chi^2_{.50}$ 行（因中位數即第50 個百分數）知(a) 8.34

對應 $\nu=9$，(b) 27.3 對應 $\nu=28$，(c) 39.3 對應 $\nu=40$。

在此應注意的是所求出的中位數值和其自由度很相近。事實上，當 $\nu>10$ 中位數值即 $(\nu-0.7)$，此可由表查出。

13. 某校女生 1000 人，從中任意選出 16 人，得其身高標準差為 2.4 吋，試求全體女生標準差 (a) 95%，(b) 99% 的信賴界限。

【解答】 (a) 95% 信賴界限為 $s\sqrt{N}/\chi_{.975}$ 和 $s\sqrt{N}/\chi_{.025}$。

自由度 $\nu=16-1=15$，$\chi^2_{.975}=27.5$，$\chi_{.975}=5.24$
$\chi^2_{.025}=6.26$，$\chi_{.025}=2.50$。

則 95% 之信任界限為 $2.40\sqrt{16}/5.24$ 和 $2.40\sqrt{16}/2.50$ 亦即 1.83 和 3.84 吋。

因此我們有 95% 的信心認為整（母）體的標準差落在 1.83 和 3.84 吋。

(b) 99% 之信賴界限為 $s\sqrt{N}/\chi_{.995}$ 和 $s\sqrt{N}/\chi_{.005}$。

自由度 $\nu=16-1=15$，$\chi^2_{.995}=32.8$ 或 $\chi_{.995}=5.73$
$\chi^2_{.005}=4.60$ 或 $\chi_{.005}=2.14$。

故 99% 之信賴界限為 $2.40\sqrt{16}/5.73$ 和 $2.40\sqrt{16}/2.14$ 亦即 1.68 和 4.49 吋。因此我們有 99% 的信心認為整（母）體標準差是落在 1.68 和 4.49 間。

14. 求自由度 (a) $\nu=50$，(b) $\nu=100$ 之 $\chi^2_{.95}$ 值。

【解答】 因 ν 大於 30，我們可利用 $(\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2\nu-1})$ 以近似常態分配（平均數為 0 標準差為 1），則若 z_p 為標準常態分配的 z 值百分數，則

$$\sqrt{2\chi^2_p}-\sqrt{2\nu-1}=z_p \text{ 或 } \sqrt{2\chi^2_p}=z_p+\sqrt{2\nu-1}$$

則

$$\chi^2_p=\frac{1}{2}(z_p+\sqrt{2\nu-1})^2$$

(a) 若 $\nu=50$，$\chi^2_{.95}=\frac{1}{2}(z_{.95}+\sqrt{2(50)-1})^2$

$$=\frac{1}{2}(1.64+\sqrt{99})^2=69.2$$