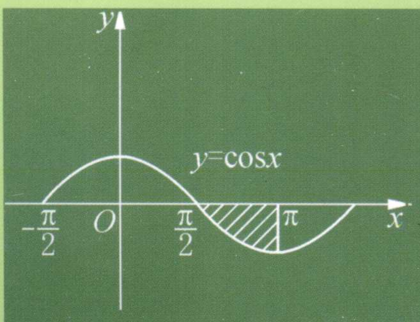
JINGJI YINGYONG SHUXUE JICHUYI WEIJIFEN QUANCHENG XUEXI ZHIDAO YU XITIJINGJIE

经济应用数学基础一

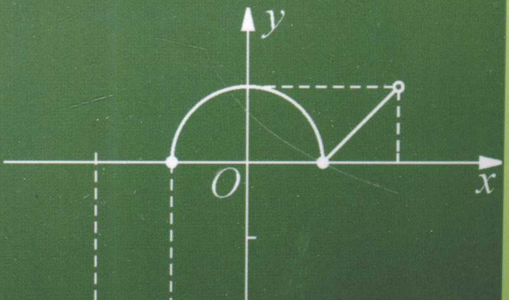
微积分 全程学习指导与习题精解

（人大三版）

主编◎滕兴虎　张　燕　滕加俊　颜　超



重点难点提示
典型例题分析
课后习题全解
考研真题精解
同步测试检验
权威全面全能
考试考研无敌



东南大学出版社
Southeast University Press

经济应用数学基础(一)

微　积　分

全程学习指导与习题精解

人大三版

滕兴虎　张　燕
滕加俊　颜　超　编著

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

《微积分》是经济数学中一门很重要的基础课程，也是经济类各专业研究生入学考试必考的内容，赵树嫄编写的《经济应用数学基础(一)——微积分》反映了该学科前沿的最新动态，广受好评。为了帮助广大同学扎实地掌握微积分的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们编写了本辅导教材。本书主要由以下几个部分组成：1. 基本要求；2. 主要概念与公式；3. 重点、难点解答；4. 典型例题分析；5. 课后习题全解；6. 考研真题精解；7. 同步测试题。本书内容编排合理，实用性强，是广大微积分学习者不可或缺的一本参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学基础(一). 微积分全程学习指导与习题精解/滕兴虎等编著. —南京：东南大学出版社，2010. 7
ISBN 978-7-5641-2298-0

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①滕… Ⅲ. ①经济数学—高等学校—教学参考资料 ②微积分—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. ①F224.0 ②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 126311 号

经济应用数学基础(一). 微积分全程学习指导与习题精解(人大三版)

编　　著	滕兴虎 等	责任编辑	刘　坚
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu. edu. cn
出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江　汉
社　　址	南京市四牌楼 2 号	邮　　编	210096
销售电话	(025)83793191/57711295(传真)		
网　　址	www. seupress. com	电子邮件	press@seu. edu. cn
经　　销	全国各地新华书店	印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	718mm×1005mm　1/16	印　　张	23　字　数　480 千
版　　次	2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-2298-0		
定　　价	29.00 元		

* 未经本社授权，本书内文字不得以任何方式转载、演绎，违者必究。
* 东大版图书若有印装质量问题，请直接与读者服务部联系，电话：025—83792328。

前　言

《微积分》是经济数学中一门很重要的基础课程，也是经济类各专业研究生入学考试必考的内容，《微积分》中的概念复杂多样，从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分，形成了一个无比精美的庞大系统，这个系统不仅内容丰富，更重要的是结构严密、无懈可击，赵树嫄编写的《经济应用数学基础(一)——微积分》反映了该学科前沿的最新动态，广受好评。为了帮助广大同学扎实地掌握微积分的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们编写了本辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 基本要求、重点与难点：给出了每一章的基本要求及该章的重点和难点内容。

2. 主要概念与公式：列出了每一章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

3. 重点、难点解答：列出了每一章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出了详细的归纳与解答，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻。

4. 典型例题分析：精选每一章内容所涉及的重要题型，并进行了详细的分析和解答，以帮助广大同学更好地掌握和理解相关题型的解法，达到举一反三、触类旁通的效果。

5. 课后习题全解：对教材中课后每一道习题均给出了详细的解答，以帮助广大同学回顾、巩固、深化每一章的内容讲解。

6. 考研真题精解：精选历年硕士研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的分析和解答。这些题目涉及内容广、题型多、解题技巧性强，可以进一步帮助广大同学举一反三、触类旁通、开拓解题思路，更好地掌握《微积分》的基本内容和解题方法。

7. 同步测试题：根据《微积分》课程考试和考研内容，在每一章设计了一套同步测试题，目的是给广大同学提供练习机会，帮助广大同学进一步消化知识、夯实基础、提高能力，同时检验自己对微积分知识的掌握程度，找出差距，以便更好地学好微积分。

本辅导教材由解放军理工大学应用数学教研室滕兴虎、张燕、滕加俊、颜超编写，全书由滕加俊教授统稿，解放军理工大学应用数学教研室吴欧、王璞以及邱颖萍、殷婷、胡俊等同志参加了编写工作。在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社领导以及刘坚博士和戴季东老师的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请广大同行和读者批评指正。

编者

2010 年 6 月

目　录

第一章　函数与极限

第二章　极限与连续

第三章　导数与微分

第四章　中值定理与导数的应用

第五章　不定积分

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第六章　定积分

第七章　无穷级数

第八章　多元函数

第九章　微分方程与差分方程简介

第一章　函数与极限

基本要求、重点与难点

基本要求：

(1) 了解集合的概念，掌握集合的描述及运算；

(2) 理解函数及其定义域、值域、图形等概念，掌握函数的表示法. 了解函数的有界性、单调性和奇偶性；

(3) 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念；

(4) 理解基本初等函数及其定义域、值域等概念. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念；

(5) 会建立简单应用问题中的函数关系式.

重点：

(1) 复合函数的定义域；

(2) 函数的基本性质；

(3) 求函数的复合及反函数；

(4) 建立简单应用问题的函数关系式.

难点：

(1) 抽象函数的表达式；

(2) 分段函数的复合及反函数的求法.

主要概念与公式

集合与子集

集合	定义	具有某种属性的事物的全体或一些确定对象的汇总称为集合. **注**　构成集合的事物或对象称为集合的元素
	表示法	列举法：按任意顺序列出集合的所有元素并用大括号括起来
		描述法：设 $p(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则，A 为满足的一切构成的集合，则 $A=\{a \mid p(a)\}$
	特殊集合	全集：由所研究的所有事物构成的集合，常记作 I 或 U. **注**　全集是相对的
		空集：不包含任意元素的集合，常记作 $\varnothing$
子集	定义	若任意 $x\in B$，都有 $x\in A$，则称 B 是 A 的子集，记作 $B\subset A$（即 B 包含于 A）或 $A\supset B$（即 A 包含 B）
	性质	$\varnothing\subset A$
		$A\subset A$
		若 $A\subset B, B\subset C$，则 $A\subset C$

特殊数集

名称	表示
自然数集	$\mathbf{N}=\{0,1,2,3\cdots n,\cdots\}$
整数集	$\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots\}$
有理数集	$\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q} \mid p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0,\text{且 } p,q \text{ 互质}\right\}$

续表

名　称	表　示
正实数集	$\mathbf{R}^{+}=\{x \mid x \in \mathbf{R}, x>0\}$
去零实数集	$\mathbf{R}^{*}=\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$
复数集	$\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i} \mid a,b \in \mathbf{R}, \mathrm{i}^{2}=-1\}$

集合运算公式

		公　式
运　算	并集	$A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$
	交集	$A \cap B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$
	差集	$A \backslash B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \notin B\}$
	余集	$A^{C}=\{x \mid x \in I$ 或 $x \notin B\}$
	直积	$A \times B=\{(x,y) \mid x \in A$ 或 $y \in B\}$（又称笛卡尔积）
运算律	交换律	$A \cup B=B \cup A, A \cap B=B \cap A$
	结合律	$(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cup C),(A \cap B) \cap C=A \cap(B \cap C)$
	分配律	$(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup(B \cap C),(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap(B \cup C)$
	对偶律	$(A \cup B)'=A' \cap B',(A \cap B)'=A' \cup B'$

绝对值

定　义	说　明	性　质	注
$\lvert x\rvert=\begin{cases}x, x \geqslant 0, \\ -x, x \leqslant 0\end{cases}$	表示数轴上点与原点之间的距离	$\lvert x\rvert \geqslant 0$；$\lvert -x\rvert=\lvert x\rvert$；$\lvert\lvert x\rvert-\lvert y\rvert\rvert \leqslant \lvert x+y\rvert \leqslant \lvert x\rvert+\lvert y\rvert$；$\lvert x \cdot y\rvert=\lvert x\rvert\lvert y\rvert$；$\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert=\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert, y \neq 0$	$\lvert x\rvert \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y \Leftrightarrow x \leqslant y$ 且 $-x \leqslant y$

区间与邻域

名　称	表　示
开区间	$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$
闭区间	$[a,b]=\{a \leqslant x \leqslant b\}$
左开右闭区间	$(a,b]=\{a<x \leqslant b\}$
点 a 的 δ 邻域	$U(a,\delta)=\{x \mid \lvert x-a\rvert<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$
点 a 的去心邻域	$\dot{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}=\{x \mid(a-\delta,a) \cup(a,a+\delta)\}$
点 a 点左 δ 邻域	$U_{-}(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a\}$
点 a 的右 δ 邻域	$U_{+}(a,\delta)=\{x \mid a<x<a+\delta\}$

映射及相关定义

名　称	定　义
映　射	给定两个非空集合，如果存在一个法则 T，使得任 $x \in X$，按法则 T 使存在唯一的元素 y 与之对应，则称 T 为从 X 到 Y 的一个映射，记作 $T: X \rightarrow Y$. 其中 x 称为原像，y 为像. 集合 X 称映射 T 的定义域. X 的所有元素的像的集合称映射 T 的值域

续表

名　称	定　义
满　射	若 $T(X)=Y$，则称 T 为从 X 到 Y 的满射
单　射	若任 $x_1,x_2\in x,x_1\neq x_2$，必有 $T(x_1)\neq T(x_2)$，则 T 为从 X 到 Y 的单射
双　射	若 T 是从 X 到 Y 的满射且又是单射，则 T 为双射
复合映射	若映射 $T_1:X\to Y_1,T_2:Y_2\to Z$，且 $T_1(x)\subset Y_2$，则 $T_2\circ T_1:X\to Y,(T_1\circ T_2)(x)=T_2(T_1(x))$，称为由 T_1,T_2 构成的复合映射

函数及相关定义

名　称	定　义
函　数	设数集 $D\in\mathbf{R}$，则 D 到 $\mathbf{R}$ 的映射 f 称为定义在 D 上的一元函数，记为 $y=f(x),x\in D$. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，$\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为值域
函数的图形	点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形
反函数	若函数 $f:D\to f(D)$ 为单射，则称其逆函数 $f^{-1}:f(D)\to D$ 为 f 的反函数，f^{-1} 的对应法则由 f 来决定，即若 D 与 $f(D)$ 间是一一对应的，则 x 也是 y 的函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此反函数也记作 $y=f^{-1}(x)$
复合函数	若函数 $y=f(u)$ 的定义域包含 $u=g(x)$ 的值域，则在函数 $g(x)$ 的定义域上可确定一个函数 $y=f(g(x))$，称其为 g 与 f 的复合函数，记作 $y=f(g(x))$ 或 $y=f\circ g$
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数
分段函数	在函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 内，如果自变量 x 的不同变化范围内，对应规则用不同的式子来表示，则称函数 $y=f(x)$ 为 D 上的分段函数

常见的几种分段函数

名　称	表达式
绝对值函数	$y=\mid x\mid=\begin{cases}x,x\geqslant 0,\\-x,x\leqslant 0\end{cases}$
符号函数	$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0\end{cases}$
狄利克雷(Dirichlet)函数	$y=\begin{cases}1,x\in\mathbf{Q},\\0,x\in\mathbf{Q}^C\end{cases}$
取整函数	$y=[x]$

常见的经济函数

名　称	表达式	注
总成本函数	$C=C_F+C_V$	C_F 表示固定成本，C_V 为可变成本
总收益(收人)函数	$R=Qp$	Q 表示产量或销售量，p 为产品价格
总利润函数	$L=R-C$	R 为总收益函数，C 为总成本函数
需求函数	$Q_d=f(p)$	Q_d 表示需求量，p 表示价格
供给函数	$Q_s=g(p)$	Q_s 表示供给量，p 表示价格

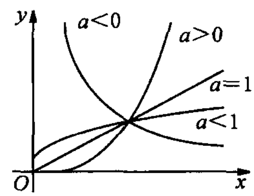
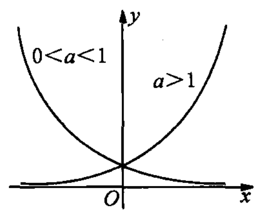
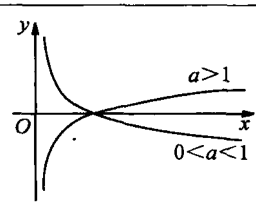
函数的几种特性

性质	定义
奇偶性	设 $f(x)$ 在 D 上定义，任 $x, -x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$（$f(-x) = -f(x)$），则称 $f(x)$ 为 D 上的偶（奇）函数
单调性	函数 $f(x)$ 在 D 上定义，若任 $x_1, x_2 \in D$，由 $x_1 < x_2$ 恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加（单调减少）的，若严格不等号成立，则称严格单调增加（减少）
周期性	$f(x)$ 在 D 上定义，若存在一个与 x 无关的正数 T，使任 $x \in D$，均有 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，通常把满足关系式的最小正数 T 称为最小正周期，简称周期
有界性	$f(x)$ 在 D 上定义，若存在 $M > 0$，使任 $x \in D$，有 $\|f(x)\| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界
无界性	$f(x)$ 在 D 上定义，若任意 $M > 0$，均存在 $x_0 \in D$，使 $\|f(x_0)\| \geqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上无界

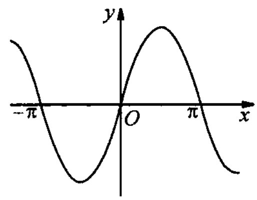
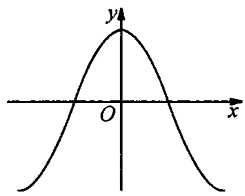
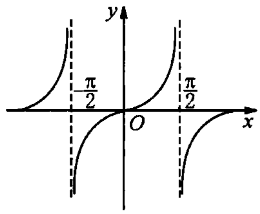
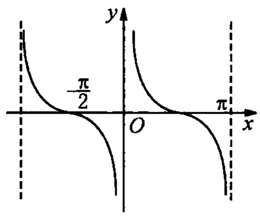
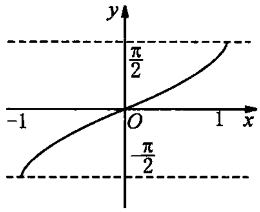
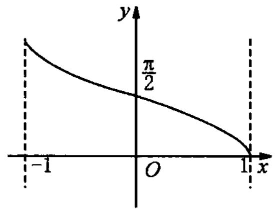
函数的运算

运算	定义
和	$(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in D$
差	$(f-g)(x) = f(x) - g(x), x \in D$
积	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$
商	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D$ 且 $g(x) \neq 0$

基本初等函数

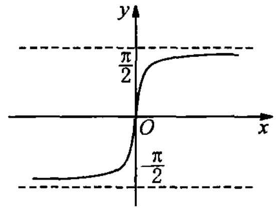
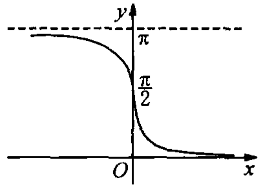
名称	定义域及性质	图例
幂函数	$y = x^a$ $a > 0$ 时，函数 x^a 在 $(0, +\infty)$ 严格递增； $a < 0$ 时，函数 x^a 在 $(0, +\infty)$ 严格递减； $y = x^a$ 与 $y = x^{\frac{1}{a}}$ 互为反函数	
指数函数	$y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$. $a > 1$ 时，函数 a^x 在 $(-\infty, +\infty)$ 严格递增； $0 < a < 1$ 时，函数 a^x 在 $(-\infty, +\infty)$ 严格递减	
对数函数	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1, x > 0)$. $a > 1$ 时，$y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加； $0 < a < 1$ 时，$y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少； $y = x^a$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数	

续表

名　称	定义域及性质	图　例
三角函数	正弦函数 $y=\sin x, x\in\mathbf{R}$	
	余弦函数 $y=\cos x, x\in\mathbf{R}$	
	正切函数 $y=\tan x$，$(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z})$	
	余切函数 $y=\cot x$，$(-1\leqslant x\leqslant 1, -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2})$	
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$，$(-1\leqslant x\leqslant 1, -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2})$	
	反余弦函数 $y=\arccos x$，$(-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant\pi)$	

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

续表

名　称	定义域及性质	图　例
反三角函数	反正切函数 $y=\arctan x$，$\left(-\infty<x<+\infty,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$	
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，$(-\infty<x<+\infty,0<y<\pi)$	

三角函数的基本关系式与公式

三角函数基本关系式	乘积的关系	$\sin x\cdot\csc x=1,\cos x\cdot\sec x=1,\tan x\cdot\cot x=1$
	商的关系	$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$
	平方和的关系	$\sin^2x+\cos^2x=1,\tan^2x+1=\sec^2x,\cot^2x+1=\csc^2x$
三角函数基本公式	加法公式	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$, $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$, $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta},\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$
	和差化积	$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$, $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$, $\cot\alpha\pm\cot\beta=\pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta},\tan\alpha\pm\cot\beta=\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$
	倍角公式	$\sin2x=2\sin x\cdot\cos x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2x}$, $\cos2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x=\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}$, $\tan2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x},\cot2x=\frac{\cot^2x-1}{2\cot x}$
	半角公式	$\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$, $\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$
	降幂公式	$\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2},\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}$

续表

反三角函数	和的关系	$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$

函数图形的组合与变换

类　型	注	方　法
叠　加	由 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图形求 $y=f(x)+g(x)$ 的图形	在同一横坐标处将两图的纵坐标加起来
翻　转	由 $y=f(x)$ 的图形求 $y=-f(x)$ 的图形	在同一横坐标处 $f(x)$ 图形的纵坐标改变正负号，即作与原图形关于 x 轴对称的图形
放　缩	由 $y=f(x)$ 的图形求 $y=kf(x)$ 的图形	当 $k>1$（$0<k<1$）时，在同一横坐标处 $f(x)$ 图形的纵坐标放大（缩小）k（$\frac{1}{k}$）倍； 当 $k<0$ 时，先进行 $\lvert k\rvert$ 的放缩，再进行翻转
平　移	由 $y=f(x)$ 的图形求 $y=f(x)+C$ 的图形（C 为常数）	当 $C>0$（$C<0$）时，将 $f(x)$ 的图形向上（下）平移距离 C（$\lvert C\rvert$）

重、难点解答

1. 函数的定义

准确把握函数的定义，一般地，需从自变量的取值范围（即定义域 D）、函数的解析式（即因变量与自变量的对应法则 f）和值域（即因变量的变化范围 $\mathbf{Z}$ 或 $f(D)$）等三个方面来考虑. 但由于对函数来说，如果当定义域和对应法则确定后，值域随之确定，因此定义域和对应法则为函数的两大要素. 一旦两个函数的定义域和对应法则相同，这两个函数就是相同的函数.

下面通过例题对函数的定义加以说明.

【例 1】 在关系式 $y=\ln x+\ln(-x)$ 中的 y 与 x 不构成函数关系.

分析　这是因为在函数的定义中，要求函数的定义域非空，而在这里对任给的实数 x，按对应法则没有与之对应的实数 y，即定义域为空集.

【例 2】 (1) $y=x^2+\sin x$ 与 $x=t^2+\sin t$ 是两个相同的函数.

这是因为这两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，且对应法则都是“自变量的平方与自变量正弦的和”，所以尽管它们有公共的字母，但它们是两个相同的函数.

(2) 由于 $y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$ 的定义域不同，所以它们不是相同的函数；

(3) 由于 $y=x$，$y=\sqrt{x^2}$ 的对应法则不同，所以它们不是相同的函数；

(4) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域与对应法则相同，所以它们是相同的函数.

2. 函数的定义域

(1) 如果不考虑函数的实际意义，是指使得函数表达式有意义的所有实数的集合，即自然定义域；

(2) 求复杂函数的定义域，就是求由简单函数定义域所构成的不等式组；

(3) 求复合函数定义域时，同时要使得函数满足函数复合的条件：内层函数的值域不超过外层函数的定义域.

3. 关于函数的表达式及函数性质

求函数的表达式时，常常利用函数的表达式以及表达式与所用字母无关的特性.

【例 3】 设 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 a,b,c 为常数且 $|a|\neq|b|$，求函数 $f(x)$ 并证明它是奇函数.

分析　由 $f(x)$ 所满足的方程，无法直接求出 $f(x)$ 的表达式，但作代换令 $x=\frac{1}{t}$，可以得到新的方

程;联立并消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$,即可解出 $f(x)$,再利用奇函数定义即可证之.

解 在原方程中作代换 $x=\frac{1}{t}$,可得

$$af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$$

即

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$$

与原方程联立,消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$,可解出

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)$$

又

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)$$

$$f(x)+f(-x)=0$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

4. 关于反函数

(1) 求 $y=f(x)$ 的反函数,首先由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$,再把所得表达式中的 x 与 y 对换,即得所求函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$. 或者先把表达式 $y=f(x)$ 中的 x 与 y 对换,再解出 $y=f^{-1}(x)$;

(2) 对于分段函数的反函数,应当分段去求;

(3) 反函数的定义域为原来函数的值域.

应当注意,在同一坐标系中,$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形是相同的,而 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形是关于 $y=x$ 对称的.

【例 4】 设 $f(x)=\begin{cases}x, & -2<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2^x, & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

分析 $f(x)$ 是分段函数,因此要分别求出各区间段的反函数及定义区间.

解 由

$$y=x,-2<x<1$$

可得

$$x=y,-2<y<1$$

故它的反函数为

$$y=x,-2<x<1$$

由

$$y=x^2,1\leqslant x\leqslant 2$$

可得

$$x=\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant 4$$

故它的反函数

$$y=\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 4$$

由

$$y=2^x,2<x\leqslant 4$$

可得

$$x=\log_2 y,4<y\leqslant 16$$

故它的反函数

$$y=\log_2 x,4<x\leqslant 16$$

故 $f(x)$ 的反函数是

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x,-2<x<1,\\ \sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 4,\\ \log_2 x,4<x\leqslant 16\end{cases}$$

5. 关于复合函数

任意函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$，并不一定能构成复合函数，如 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=-e^x$ 不能构成复合函数. 函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 能构成复合函数的前提 $Z(g)\cap D(f)$ 是非空，即内层函数 $u=g(x)$ 的值域全部或部分的落在外层函数 $y=f(u)$ 的定义域中，多个函数的复合类似.

在函数能够复合的条件下，求两个或两个以上函数复合后的表达式主要是使用代入法，即把一个函数的表达式代替另一个含函数中的自变量即得由这两个函数构成的复合函数.

而要讨论含有分段函数的复合函数，应抓住外层函数定义域的各区间段，再结合中间变量的表达式和中间变量的定义域进行分析.

【例 5】求下列复合函数：

(1) 设 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，求 $f\{f[f(x)]\}$ 及其定义域 D.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x+1)=x^2+x+1$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

分析　(2)中出现分段函数，求 $f[g(x)]$ 时，外层是分段函数，先求出 $g(x)$ 的表达式再依 $g(x)>0$ 或 $g(x)<0$ 代入 $f(x)$ 的表达式；求 $g[f(x)]$ 的表达式 $g[f(x)]=f^2(x)-f(x)+1$.

应先求出 $f^2(x)$ 后依 $f^2(x)-f(x)+1$ 大于零或小于零一并代入，得到的依然是分段函数.

解　(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$　$x\neq -1$，所以

$$f[f(x)]=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=-\frac{1}{x},x\neq 0$$

$$f\{[f(x)]\}=\frac{f[f(x)]-1}{f[f(x)]+1}=\frac{1+x}{1-x},x\neq 1$$

其定义域 $x\neq -1,0,1$.

(2) $g(x+1)=x^2+x+1=(x+1)^2-(x+1)+1$，

$g(x)=x^2-x+1=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，

因为

$$f(x)=\begin{cases}0,x<0,\\ x,x\geqslant 0\end{cases}$$

所以

$$f[g(x)]=g(x)=x^2-x+1,g[f(x)]=f(x)^2-f(x)+1$$

又因为

$$f(x)=\begin{cases}0,x<0,\\ x,x\geqslant 0\end{cases}$$

所以

$$g[f(x)]=\begin{cases}0-0+1,x<0,\\ x^2-x+1,x\geqslant 0\end{cases}$$

即

$$g[f(x)]=\begin{cases}1,x<0,\\ x^2-x+1,x\geqslant 0\end{cases}$$

6. 关于函数的特性

(1) 函数的奇偶性主要依据定义去判定，有时也可

① 利用 $f(x)+f(-x)=0$ 来判断函数为奇函数；

② 利用 $f(x)-f(-x)=0$ 来判断函数为偶函数.

运用如下的运算性质也可判定函数的奇偶性：

① 奇函数与奇函数的和(差)是奇函数；
② 奇函数与奇函数的积(商)是偶函数(商的分母非零)；
③ 偶函数与偶函数的和(差)是偶函数；
④ 偶函数与偶函数的积(商)是偶函数(商的分母非零)；
⑤ 奇函数与偶函数的积(商)是奇函数(商的分母非零).

应当注意，函数的奇偶性是相对于区间而言的，如果定义域或所给的数集关于原点不对称，则该函数就具备奇偶性.

(2) 通常所说的周期函数的周期是指函数的最小正周期，但周期函数不一定存在最小正周期(如常数函数).

周期函数具备下列的性质：

① 若 $f(x)$ 的周期是 T，则函数 $f(ax+b)$ $(a\neq 0)$亦是周期函数，周期为$\frac{T}{|a|}$；

② 若 $f(x)$，$g(x)$ 分别是以 T_1，T_2 为周期的周期函数，则 $f(x)\pm g(x)$是以 T_1，T_2 的最小公倍数为周期的周期函数；

③ 若函数 $f(x)$ 的定义域为全体实数，$a<b$，函数 $y=f(x)$ 的图像关于 $x=a$ 和 $x=b$ 同时对称(即 $f(a-x)=f(a+x)$，$f(b-x)=f(b+x)$)，则 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的函数.

提示：
$$f(x+2b-2a)=f(b+x+b-2a)=f(b-(x+b-2a))=f(a+a-x)$$
$$=f(a-(a-x))=f(x)$$

由周期函数的定义，我们还可以得到周期函数的必要条件：
① 周期函数的定义域必是既无下界又无上界的；
② $f(x)-f(x_0)$ 的零点如果存在，则零点必有周期性.

(3) 函数的单调性可以依靠定义来判定，后面的第四章中，利用导数提供了另一判定方法.

另一方面，如果 x_1，x_2 为函数 $f(x)$ 定义域内两个不同的点，若
$$(f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)>0$$
则函数 $f(x)$ 在其定义域内必单调. 但函数在定义域单调增还是单调减，这一方法判断不出.

(4) 函数的有界性必须在给定的区间内讨论，若题中只给出函数而没有指定区间，此时需要先求出函数的定义域. 如果函数在某一区间上有界，界也是不唯一的.

典型例题分析

【例 1】 判断下列各对函数是否为同一函数：

(1) $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$ 与 $g(x)=\sqrt{2}\sin x$；

(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 与 $g(x)=-\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ ；

(3) $f(x)=\ln[x(1-x)]$ 与 $g(x)=\ln x+\ln(1-x)$ ；

(4) $f(x)=\ln\frac{1+x}{x}$ 与 $g(x)=\ln(1+x)-\ln x$.

分析 *判断函数是否相同，需从定义域和对应法则两方面是否相同考虑.*

解 (1)两个函数的定义域都是全体实数，显见 $f(x)$ 为非负函数，而 $g(x)$ 可取负值，如
$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
可见函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则不同，故二者不是同一函数.

(2) 两个函数的定义域都是$[1,+\infty)$，且
$$g(x)=\ln\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$
可见函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则相同，故两者是同一函数.

(3) $f(x)=\ln[x(1-x)]$ 的定义域为 $0<x<1$，而 $g(x)=\ln x+\ln(1-x)$ 的定义域要求
$$\begin{cases}x>0,\\1-x>0\end{cases}$$

即 $0<x<1$.

两个函数有相同的定义域和对应法则，可见两个函数是同一函数.

(4) $f(x)=\ln\frac{1+x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)=\ln(1+x)-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，二者定义域不同，所以两个函数不是同一函数.

【例 2】 求函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\ln\cos x}$ 的定义域.

分析　求复杂函数的定义域，就是求由简单函数定义域所构成的不等式组.

解　由题设和分析，有

$$\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi+\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z},\\ x\neq 2n\pi\end{cases}$$

解上述不等式组得函数定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$.

【例 3】 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+1$，求 $f\left(\sec\frac{\pi}{3}\right)$.

分析　要求 $f\left(\sec\frac{\pi}{3}\right)$，只需由 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}-1$ 求出 $f(x)$.

解　方法一　用变量代换. 令 $t=x+\frac{1}{x}$，解得 $x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$，代入原式，得

$$f(t)=\frac{(t\pm\sqrt{t^2-4})^2}{4}+\frac{4}{(t\pm\sqrt{t^2-4})^2}=t^2-1$$

所以

$$f(x)=x^2-1,\ f\left(\sec\frac{\pi}{3}\right)=\sec^2\frac{\pi}{3}-1=1$$

方法二　用拼凑法. 在 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 的表达式中拼凑出 $x+\frac{1}{x}$ 的形式. 因为

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+1=x^2+2+\frac{1}{x^2}-1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1$$

所以

$$f(x)=x^2-1,\ f\left(\sec\frac{\pi}{3}\right)=\sec^2\frac{\pi}{3}-1=1$$

【例 4】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于________.

A. 0;　　B. 1;

C. $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$　　D. $\begin{cases}1, & |x|>1,\\ 0, & |x|\leqslant 1.\end{cases}$

解　因 $|f(x)|\leqslant 1$，故 $f[f(x)]=1$，从而 $f\{f[f(x)]\}=1$.

【例 5】 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(x+1)$.

分析　将 $x+1$ 代入函数 $f(x)$ 的表达式即可.

解　由分析，

$$f(x+1)=\begin{cases}(x+1)+1, & x+1\geqslant 0,\\ (x+1)^2, & x+1<0.\end{cases}=\begin{cases}x+2, & x\geqslant -1,\\ (x+1)^2, & x<-1\end{cases}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com