西安交大考研

2011版 数学考研

新干线

概率统计

张卓奎

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学出版社考研图书网站 http://kaoyan.xjtupress.com

内容简介

本书根据全国硕士研究生入学统一考试大纲，首先简明扼要地给出了"概率论与数理统计"的内容提要，针对最新考研题型讲解了大量典型例题。解题示法，以题释理，注重解题思路，揭示解题规律，把握解题技巧。关注方法技巧的归纳，突出知识综合运用和解题能力的训练，以求举一反三，触类旁通，融会贯通之效。精选的习题(附有习题解答)可供读者自测自练。全书题型新颖，形式多样，综合性强。

本书可以作为报考硕士研究生的考生的复习辅导书，也可作为理工科大学生学习"概率论与数理统计"课程的学习参考书，还可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学考研新干线　概率统计：(2011版)/张卓奎编著．—西安：西安交通大学出版社，2010.4
(数学考研新干线)
ISBN 978-7-5605-3479-4

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-自学参考资料②数理统计-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第053389号

书　　名　数学考研新干线　概率统计(2011版)
编　　著　张卓奎
责任编辑　叶　涛

出版发行　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　三河市文阁印刷厂

开　　本　787mm×1 092mm　1/16　**印张**　10　**字数**　240千字
版次印次　2010年4月第4版　2010年4月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-3479-4/O·321
定　　价　18.00元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.ch

2011版前言

本书是在2010版的基础上，结合新大纲、新思想、新动向和新方法修订而成的。2010版使用后，积累了不少的经验，吸取了广大读者的意见，修订稿是在这一基础上写成的。

本书2010版倍受读者的喜爱，在2010年硕士研究生入学考试中，本书以这样或那样的方式在题型上、在思维上、在解法上均囊括了数学一、数学三及农学门类联考数学中概率论与数理统计包括选择题、填空题和解答题的所有问题，有些真题几乎就是本书的例题或习题。基于本书在实践中的成功使用，新版将继续秉承本书的特点、结合概率论与数理统计的学科性质，结合考生的实际情况，结合命题规律，突出基本概念、基本理论和基本方法的解析，直面考题，更好的为读者在较短的时间内复习概率论与数理统计提供帮助，达到省时、高效的目的。

本书具有如下的特点

1. 对大纲所要求的重要概念，公式，定理进行了系统地总结，便于读者理解及记忆。
2. 针对考研的新题型，安排章节，深入分析研究，总结解题规律，有利于读者掌握和应用。
3. 以题说法，开拓思路，有的放矢。
4. 注重解题方法和解题技巧的介绍，提高读者的解题速度和准确性。
5. 重点突出，使读者对重点一目了然。

全书共分8章，内容包括概率论的基本概念，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验和习题解答。每章内容都设计了三个板块：

一、内容提要

二、例题解析

三、习题

在例题解析和习题中，根据最新命题动向，又设计了三个层面：选择题、填空题和解答题。为了更贴近考研题型，除在三个板块、三个层面上进行强化外，重点突出综合能力的训练，基于随机变量及其数字特征能与概率、概率分布、数理统计紧密的联系，所以本书在处理这方面的内容时重点体现知识的综合运用，在题目的选择上，把求概率，求概率分布，求数字特征，求统计量的分布及数字特征等有机地结合起来，而这些恰恰是考研命题概率最大的地方。通过以上几个方面的训练，帮助读者正确理解基本概念，把握重点，掌握解题的方法与技巧，提高综合分析问题及解决问题的能力。

限于水平，书中疏漏与不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2010年3月

目　录

第一章　概率论的基本概念

一、内容提要

1. 随机事件

(1)随机试验:称试验为随机试验,如果

(ⅰ)可以在相同的条件下重复进行;

(ⅱ)每次试验的可能结果不止一个,并且可以事先明确试验的所有可能结果;

(ⅲ)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

(2)随机事件:称在随机试验中可能发生也可能不发生的事情为随机事件,用大写字母 A,B,C,…来表示。

(3)基本事件:随机试验的一个可能结果形成的随机事件称为一个基本事件,它是最简单且不能再分解的随机事件。

(4)样本空间:随机试验所有可能结果的集合称为随机试验的样本空间,记为 Ω,其元素称为样本点,记为 ω,即 $\Omega=\{\omega\}$。

注:有了样本空间和样本点的概念,随机事件还可以定义为:所谓随机事件是满足某种性质的样本点的集合或是样本空间的某个子集。

(5)必然事件:在随机试验中必然会发生的事件称为必然事件,记为 Ω。

(6)不可能事件:在随机试验中一定不发生的事件称为不可能事件,记为 $\varnothing$。

2. 事件的运算、关系与运算律(3种运算,4种关系,5种运算律)

(1)事件的运算

(ⅰ)和运算(和事件):称事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件为事件 A 与事件 B 的和事件,记为 $A\cup B$。称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,类似地有 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。

(ⅱ)积运算(积事件):称事件 A 与事件 B 同时发生的事件为事件 A 与事件 B 的积事件,记为 $A\cap B$ 或 AB。称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=A_1A_2\cdots A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,类似地有 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=A_1A_2\cdots A_n\cdots=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。

(ⅲ)差运算(差事件):称事件 A 发生而事件 B 不发生的事件为事件 A 与事件 B 的差事件,记为 $A-B$。

(2)事件的关系

(ⅰ)包含关系:若事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,则称事件 B 包含事件 A,也称事件 A 是事件 B 的子事件,记为 $A\subset B$。

(ⅱ)相等关系:若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$。

(ⅲ)互斥(不相容)关系:若事件 A 与事件 B 同时发生是不可能的,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是互斥的(或互不相容的)。

(ⅳ)对立关系:若 $A\cup B=\Omega$,$AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是对立的,称事件 B 是事件 A 的逆事件,记为 $\overline{A}$,即 $B=\overline{A}$。

(3)运算律

(ⅰ)吸收律:若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B,AB=A$

(ⅱ)交换律:$A\cup B=B\cup A,AB=BA$

(ⅲ)结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A(BC)=(AB)C$

(ⅳ)分配律:$A(B\cup C)=AB\cup AC,A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$

(ⅴ)对偶律:$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i},\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i},\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{A_n},\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\overline{A_n},\overline{\overline{A}}=A$

3. 概率的定义及其性质

(1)概率的定义

(ⅰ)古典概率:设随机试验的样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,$n$ 为有限的正整数,且每个样本点 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$出现的可能性相等,则事件 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}$,$1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant n$ 出现的概率

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{样本空间基本事件总数}}$$

(ⅱ)公理化概率:设随机试验的样本空间 Ω,对于随机试验的每一个随机事件 A 赋予一个实数 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果集合函数 $P(\cdot)$满足:

① $P(A)\geqslant 0$

② $P(\Omega)=1$

③ 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是两两互不相容的事件,即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i、j=1,2,\cdots$,则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

(ⅲ)几何概率

①设线段 l 是线段 L 的一部分,向线段 L 上任意投点,若投中线段 l 上的点的数目与该线段的长度成正比,而与该线段 l 在线段 L 上的相对位置无关,则点投中线段 l 的概率 p 为

$$p=\frac{l\text{ 的长度}}{L\text{ 的长度}}$$

②设平面图形 g 是平面图形 G 的一部分,向平面图形 G 上任意投点,若投中平面图形 g 上的点的数目与该平面图形的面积成正比,而与该平面图形 g 在平面图形 G 上的相对位置无关,则点投中平面图形 g 的概率 p 为

$$p=\frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}$$

③设空间形体 v 是空间形体 V 的一部分,向空间形体 V 上任意投点,若投中空间形体 v 上的点的数目与该空间形体的体积成正比,而与该空间形体 v 在空间形体 V 上的相对位置无关,则点投中空间形体 v 的概率 p 为

$$p=\frac{v\text{ 的体积}}{V\text{ 的体积}}$$

(2)概率的性质

(ⅰ)$P(\varnothing)=0$;

(ⅱ)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不相容,即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i、j=1,2,\cdots,n$,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

特别地设 A,B 不相容,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;

(ⅲ)设 A,B 是事件,且 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$,从而 $P(A)\leqslant P(B)$;

(ⅳ)设 A 是事件,则 $P(A)\leqslant 1$;

(ⅴ)设 A 是事件,则 $P(\overline{A})=1-P(A)$;

(ⅵ)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是事件,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

特别地设 A,B 是事件,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

4. 概率的三大公式

(1)条件概率:设 A,B 是事件,$P(A)>0$,则称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生了的条件下事件 B 发生的条件概率。需要指出的是条件概率 $P(\cdot|A)$ 具有概率的性质。

(2)乘法公式:设 A,B 是事件,$P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$。

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是事件,且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

(3)全概率公式:如果事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足

(ⅰ)$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相容,即 $B_iB_j=\varnothing,i\neq j,i、j=1,2,\cdots,n$,且 $P(B_i)>0$,$i=1,2,\cdots,n$。

(ⅱ)$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

(4)贝叶斯(Bayes)公式:设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足全概率公式中的(ⅰ),(ⅱ)两条,当 $P(A)>0$时,有

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)},i=1,2,\cdots,n$$

5. 事件的独立性

(1)定义

(ⅰ)两事件的独立:设 A,B 是事件,如果 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A,B 是相互独立的。

(ⅱ)多事件的两两独立:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是事件,如果 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),i\neq j,i、j=1,2,\cdots,n$,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两独立的。

(ⅲ)多事件的相互独立:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是事件,如果 $\forall\,2\leqslant k\leqslant n$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),\quad 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

(2)结论

(ⅰ)当 $P(A)>0$ 时,A,B 相互独立的充要条件是 $P(B|A)=P(B)$。

(ⅱ)当 $P(B)>0$ 时,A,B 相互独立的充要条件是 $P(A|B)=P(A)$。

(ⅲ)设 A,B 是事件,如果 A 与 B,$\overline{A}$ 与 B,A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对相互独立,则其余三对也相互独立。

(ⅳ)事件 A,B 相互独立与事件 A,B 不相容是两个不同的概念,不能混为一谈,但当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时,A,B 相互独立与 A,B 不相容不能同时成立。

(ⅴ)当 $0<P(B)<1$ 时,A,B 相互独立的充要条件是 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$(或 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$)。

(ⅵ)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 分成 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个没有相同事件的不同的小组,对每个小组施行各种运算(和、积、差、逆),所得到的 k 个事件相互独立。

■ 二、例题解析

1. 选择题

例 1 若两个事件 A,B 同时出现的概率 $P(AB)=0$,则(　　)。

(A) A,B 不相容　　(B) AB 是不可能事件

(C) AB 未必是不可能事件　　(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

解 应选(C)。

因为不可能事件的概率是零,但概率是零的事件未必是不可能事件。例如设 $X\sim N(0,1)$,则 $P(X=0)=0$,但 $\{X=0\}\neq\varnothing$,即 $\{X=0\}$ 不是不可能事件,故选(C)。

例 2 对于任意的两个事件 A,B,有 $P(A-B)=$(　　)。

(A) $P(A)-P(B)$　　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$

(C) $P(A)-P(AB)$　　(D) $P(A)+P(\overline{B})+P(\overline{AB})$

解 应选(C)。

因为 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$,故选(C)。

例 3 以 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\overline{A}$ 为(　　)。

(A)"甲种产品滞销,乙种产品畅销"　　(B)"甲、乙两种产品均畅销"

(C)"甲种产品滞销"　　(D)"甲种产品滞销或乙种产品畅销"

解 应选(D)。

设 A_1 表示"甲种产品畅销",A_2 表示"乙种产品畅销",则 $A=A_1\overline{A_2}$,从而 $\overline{A}=\overline{A_1\overline{A_2}}=\overline{A_1}\cup A_2$,即"甲种产品滞销或乙种产品畅销",故选(D)。

例 4 设 A,B 是任意两个概率不为零的不相容事件,则(　　)。

(A) $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 不相容　　(B) $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(A-B)=P(A)$

解 应选(D)。

因为 A 和 B 不相容,所以 $AB=\varnothing$,从而 $P(AB)=0$,于是 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)$,故选(D)。

例 5　当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则(　　)。

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(AB)$　　(D) $P(C)=P(A\cup B)$

解　应选(B)。

因为 $AB\subset C$，所以 $P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$，故选(B)。

例 6　设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1,P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则(　　)。

(A)事件 A 和 B 不相容　　(B)事件 A 和 B 互相对立

(C)事件 A 和 B 不独立　　(D)事件 A 和 B 独立

解　应选(D)。

因为当 $0<P(B)<1$ 时，$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$ 是 A,B 相互独立的充要条件，故选(D)。

例 7　设事件 A 与事件 B 互不相容，则(　　)。

(A) $P(\bar{A}\,\bar{B})=0$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A)=1-P(B)$　　(D) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

解　应选(D)。

因为事件 A 与事件 B 互不相容，所以 $AB=\varnothing$，从而 $\bar{A}\cup\bar{B}=\Omega$，于是 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\Omega)=1$，故选(D)。

例 8　设 $A\subset B,P(B)>0$，则(　　)。

(A) $P(A)<P(A|B)$　　(B) $P(A)\leqslant P(A|B)$

(C) $P(A)>P(A|B)$　　(D) $P(A)\geqslant P(A|B)$

解　应选(B)。

因为 $A\subset B$，所以 $P(A)=P(AB)=P(B)P(A|B)\leqslant P(A|B)$，故选(B)。

例 9　设 A,B,C 相互独立，且 $P(A)\neq 0,0<P(C)<1$，则下面四对事件中不独立的是(　　)。

(A) $\overline{A\cup B}$与 C　　(B) $\overline{AC}$与 $\overline{C}$　　(C) $\overline{A-B}$与 $\overline{C}$　　(D) $\overline{AB}$与 $\overline{C}$

解　应选(B)。

因为 A,B,C 相互独立，所以$\overline{A\cup B}$与 C，$\overline{A-B}$与 $\overline{C}$，$\overline{AB}$与 $\overline{C}$ 三对事件相互独立，故不独立的是$\overline{AC}$与 $\overline{C}$，故选(B)。

例 10　设 A,B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1,P(B)>0,P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$，则(　　)。

(A) $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　(B) $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

解　应选(C)。

因为 $P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$ 是 A,B 相互独立的充要条件，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$，故选(C)。

例 11　已知 $0<P(B)<1$，且 $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，则(　　)。

(A) $P(A_1\cup A_2|\overline{B})=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$

(B) $P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

(C) $P(A_1\cup A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

(D) $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

解　应选(B)。

因为 $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，所以 $\dfrac{P((A_1\cup A_2)B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}+\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}$，于是 $P((A_1\cup A_2)B)=P(A_1B)+P(A_2B)$，即 $P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$，故选(B)。

例 12　设 A,B,C 三个事件两两独立，则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是(　　)。

(A) A 与 BC 独立　　(B) AB 与 $A\cup C$ 独立

(C) AB 与 AC 独立　　(D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

解　应选(A)。

由于 A,B,C 相互独立的充分必要条件是 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，又 A,B,C 三个事件两两独立，故 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，从而 A 与 BC 独立等价于 $P(A(BC))=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$，即 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，所以在题设条件下，A,B,C 相互独立的充分必要条件是 A 与 BC 独立，故选(A)。

例 13　在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的，在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电。以 E 表示事件“电炉断电”，设 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于事件(　　)。

(A) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　　(B) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$　　(C) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　　(D) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

解　应选(C)。

因为只有 $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$ 表示只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度，而 $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$，$\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$，$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$，分别表示有 4 个、3 个和 1 个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，且 $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}\supset E$，$\{T_{(2)}\geqslant t_0\}\supset E$，故选(C)。

例 14　对于任意二事件 A 和 B(　　)。

(A) 若 $AB\neq\varnothing$，则 A,B 一定独立　　(B) 若 $AB\neq\varnothing$，则 A,B 有可能独立

(C) 若 $AB=\varnothing$，则 A,B 一定独立　　(D) 若 $AB=\varnothing$，则 A,B 一定不独立

解　应选(B)。

因为事件的不相容性与事件的独立性是两个不同的概念，不能混为一谈，它们之间也没有必然的结果，不能说两事件相容或不相容就一定独立或一定不独立，这些都可以用反例加以证明，若 $AB\neq\varnothing$，则 A,B 有可能独立，例如在掷甲、乙两枚硬币，观察正反面出现情况的随机试验中，设事件 A 为“甲币出现 H”，事件 B 为“乙币出现 H”，则 $\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$，$A=\{HH,HT\}$，$B=\{HH,TH\}$ 从而 $AB=\{HH\}\neq\varnothing$，且 $P(A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，$P(AB)=\dfrac{1}{4}$，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$ 即 A,B 相互独立，故选(B)。

例 15　将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$，$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$，$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$，$A_4=\{$正面出两次$\}$，则事件(　　)。

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立　　(B) A_2,A_3,A_4 相互独立

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立　　(D) A_2,A_3,A_4 两两独立

解　应选(C)。

因为 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{2}$，$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{4}$所以 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$，$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)$，$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)$，即 A_1,A_2,A_3 两两独立。但 $P(A_1A_2A_3)=0\neq\frac{1}{8}=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$，故选(C)。

2. 填空题

例 1　在区间(0,1)中随机地取两个数，则事件两数之和小于$\frac{6}{5}$的概率为_______。

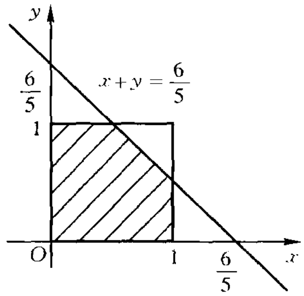

图 1-1

解　设 A 表示两数之和小于$\frac{6}{5}$，x,y 分别表示随机取出的两个数，则 $0<x<1,0<y<1$，从而 $\Omega=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$，$A=\{(x,y):x+y<\frac{6}{5}\}$，则由几何概率知(如图 1-1)

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{1-\frac{1}{2}(\frac{4}{5})^2}{1}=\frac{17}{25}$$

例 2　在区间(0,1)中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率为_______。

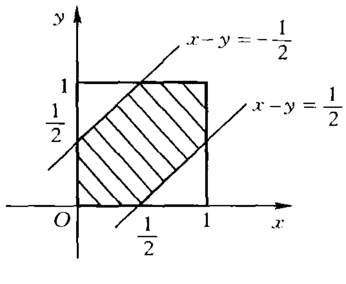

图 1-2

解　设 A 表示两数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$，x,y 分别表示随机取出的两个数，则 $0<x<1,0<y<1$，从而 $\Omega=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$，$A=\{(x,y):|x-y|<\frac{1}{2}\}$，则由几何概率知(如图 1-2)

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{1-2\times\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2}{1}=\frac{3}{4}$$

例 3　随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}\,(a>0)$ 内掷一点，点落在半圆内的任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率为_______。

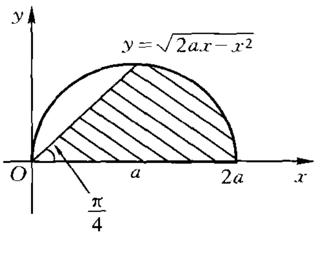

图 1-3

解　设 A 表示原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$，从而 $\Omega=\{(x,y):0<y<\sqrt{2ax-x^2}\}$，则由几何概率知(如图 1-3)

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

例 4　将 C,C,E,E,I,N,S 七个字母随机的排成一列，那么恰好成英文单词 SCIENCE 的概率为_______。

解　样本空间基本事件总数 $n=7!$，所求事件发生的基本事件数 $k=2\times2=4$，故所求的概率为

$$p=\frac{k}{n}=\frac{4}{7!}=\frac{1}{1260}$$

例 5　设 A,B 是随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$________。

解　由于 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，因此 $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.7-0.3=0.4$，于是 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$。

例 6　设 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，则

(ⅰ)若 A,B 不相容，则 $P(B)=$________。

(ⅱ)若 A,B 相互独立，则 $P(B)=$________。

解　(ⅰ)若 A,B 不相容，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，于是 $P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.7-0.4=0.3$；

(ⅱ)若 A,B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$，从而 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$，故 $P(B)=\dfrac{P(A\cup B)-P(A)}{1-P(A)}=\dfrac{0.7-0.4}{1-0.4}=0.5$。

例 7　设 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$，则 $P(A\overline{B})=$________。

解　由于 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，因此 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.3-0.6=0.1$，于是 $P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$。

例 8　已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，则 A,B,C 个不发生的概率为________。

解　$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(BC)+P(AC)-P(ABC)=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{3}{8}$。

例 9　设 A,B 是两个事件，满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$________。

解　由于 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=P(AB)$，因此可得 $P(B)=1-P(A)=1-p$。

例 10　设 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B|A)=0.8$，则 $P(A\cup B)=$________。

解　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)=0.5+0.6-0.5\times0.8=0.7$。

例 11　已知 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.8$，$P(B|\overline{A})=0.6$，则 $P(A|B)=$________。

解　由于 $P(B|\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，因此 $P(AB)=P(B)-(1-P(A))P(B|\overline{A})=0.8-0.4\times0.6$，从而 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.8-0.24}{0.8}=1-0.3=0.7$。

例 12　甲、乙两人独立地对同一目标各射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为________。

解　设 A 表示“甲射击一次命中目标”，B 表示“乙射击一次命中目标”，则目标被命中为 $A\cup B$，于是 $P(A|A\cup B)=\dfrac{P(A)}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}$

$=\frac{0.6}{0.6+0.5-0.6\times0.5}=0.75$。

例 13　设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知两件中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为________。

解　设 A 表示"两件均为不合格品"，B 表示"两件中有一件是不合格品"，则 $A\subset B$，从而

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{C_4^2}{C_{10}^2}}{\frac{C_6^1C_4^1+C_4^2}{C_{10}^2}}=\frac{1}{5}。$$

例 14　假设一批产品中一、二、三等品各占 60%，30%，10%，从中随意地取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为________。

解　设 A_i 表示"取出的是 i 等品"，$i=1,2,3$，则所求的概率为 $P(A_1|\overline{A_3})=P(A_1|A_1\cup A_2)=\frac{P(A_1)}{P(A_1\cup A_2)}=\frac{P(A_1)}{P(A_1)+P(A_2)}=\frac{0.6}{0.6+0.3}=\frac{2}{3}$。

例 15　一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为________。

解　设 A_i 表示"第 i 次抽到次品"，$i=1,2$

方法一：根据"抽签原则"可得 $P(A_2)=P(A_1)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

方法二：根据全概率公式得 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}+\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{1}{6}$

3. 解答题

例 1　考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B,C 分别是将一枚骰子接连掷两次后先后出现的点数，求该方程有实根和重根的概率。

解　一枚骰子连掷两次，其样本空间基本事件总数为 36，方程有实根的充要条件是 $B^2-4C\geqslant0$，即 $C\leqslant\frac{B^2}{4}$，方程有重根的充要条件是 $B^2-4C=0$，即 $C=\frac{B^2}{4}$，从而相关事件所包含的基本事件数为

B	1	2	3	4	5	6
$C\leqslant\frac{B^2}{4}$	0	1	2	4	6	6
$C=\frac{B^2}{4}$	0	1	0	1	0	0

于是使方程有实根的基本事件数为 $1+2+4+6+6=19$，使方程有重根的基本事件数为 $1+1=2$，因此方程有实根的概率为 $p_1=\frac{19}{36}$，方程有重根的概率为 $p_2=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$。

例 2　把 10 本书随机地放在书架上，求其中指定的 5 本书放在一起的概率。

解　样本空间基本事件总数为 $10!$，有利于所求事件发生的基本事件数为 $6!\cdot5!$（其中

6！是指把 5 本书看成一本书与其它 5 本书在 6 个位置上全排列，5！是指这 5 本书在 5 个位置上全排列），故所求的概率为

$$p=\frac{6!\cdot 5!}{10!}=\frac{1}{42}$$

例 3　袋中有硬币壹分 5 枚，贰分 3 枚和伍分 2 枚，现从中随机地取 5 枚，试求得到的钱额总数超过壹角的概率。

解　样本空间基本事件总数为 $C_{10}^5=252$，有利于所求事件发生的基本事件数可分两种情形：

(1)取两个伍分，其余三个任取，其种数为：$C_2^2C_8^3$

(2)取一个伍分，则贰分至少要取 2 个，其种数为：$C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2$

故有利于所求事件发生的基本事件数为 $C_2^2C_8^3+C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2=126$

从而所求的概率为 $p=\frac{126}{252}=\frac{1}{2}$。

例 4　甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的，如果甲船停泊的时间是 1 小时，乙船停泊的时间是 2 小时，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率。

解　设 x,y 分别为甲乙两船的到达时间，则 $0\leqslant x\leqslant 24$，$0\leqslant y\leqslant 24$，从而样本空间为 $\Omega=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 24,0\leqslant y\leqslant 24\}$，其面积为 24^2，由题设，若甲船先到，则乙船必须晚 1 小时到达，即 $y\geqslant x+1$，若乙船先到，则甲船必须晚到 2 小时到达，即 $x\geqslant y+2$，于是，有利于所求事件发生的基本事件构成集合为 A_1 与 A_2（如图 1-4），其面积和为 $\frac{1}{2}(23^2+22^2)$，故所求的概率为

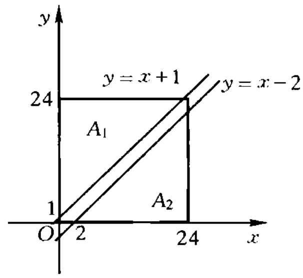

图 1-4

$$p=\frac{\frac{1}{2}(23^2+22^2)}{24^2}=\frac{1013}{1152}$$

例 5　假设有两箱同种零件，第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品，第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品，现从两箱中随意地挑出一箱，然后从该箱中先后随机地取 2 个零件，取出的零件不再放回，试求

(1)先取出的零件是一等品的概率；

(2)在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍是一等品的概率。

解　设 H_i 表示"被挑出的是第 i 箱"，$i=1,2$，A_j 表示"第 j 次取出的零件是一等品"，$j=1,2$，则 $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$，$P(A_1|H_1)=\frac{1}{5}$，$P(A_1|H_2)=\frac{3}{5}$，所以

(1)由全概率公式得

$$P(A_1)=P(H_1)P(A_1|H_1)+P(H_2)P(A_1|H_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

(2)$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{1}{P(A_1)}[P(H_1)P(A_1A_2|H_1)+P(H_2)P(A_1A_2|H_2)]$

$$=\frac{5}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{10}^1C_9^1}{C_{50}^1C_{49}^1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{C_{18}^1C_{17}^1}{C_{30}^1C_{29}^1}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{49}+\frac{51}{29}\right)=0.48557$$

例 6　玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱中含 0、1 和 2 只残次品的概率分别为 0.8、0.1 和 0.1。一位顾客欲买下一箱玻璃杯，售货员随意地取一箱，顾客开箱随意查看 4 只，若没有残次品则买下该箱玻璃杯，否则退回。试求（ⅰ）顾客买下该箱玻璃杯的概率；（ⅱ）在顾客买下的一箱中，没有残次品的概率。

解　设 A 表示"顾客买下所查看的一箱玻璃杯"，B_i 表示"顾客所查看的一箱玻璃杯中恰好有 i 只残次品"，$i=0,1,2$，则 $P(B_0)=0.8$，$P(B_1)=0.1$，$P(B_2)=0.1$，$P(A|B_0)=1$，$P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5}$，$P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$，所以

（ⅰ）由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A\mid B_i)=0.8\times1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}=0.94$$

（ⅱ）由 Bayes 公式得

$$P(B_0|A)=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\frac{0.8\times1}{0.94}=0.85$$

例 7　设有来自于三个地区的报名表分别登记了 10 名，15 名和 25 名考生，其中女生的报名表分别为 3 份，7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出 2 份。

（ⅰ）求先抽到的一份是女生表的概率；

（ⅱ）已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率；

（ⅲ）已知先抽到的一份是女生表，后抽到的一份是男生表，求它们是第二地区的概率。

解　设 H_i 表示"报名表是第 i 地区的"，$i=1,2,3$，A_j 表示"第 j 次抽到的是男生表"，$j=1,2$，则 $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$，$P(A_1|H_1)=\frac{7}{10}$，$P(A_1|H_2)=\frac{8}{15}$，$P(A_1|H_3)=\frac{20}{25}$，所以

（ⅰ）由全概率公式得

$$P(\overline{A_1})=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}\mid H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}$$

（ⅱ）由"抽签原则"知，$P(A_2|H_1)=\frac{7}{10}$，$P(A_2|H_2)=\frac{8}{15}$，$P(A_2|H_3)=\frac{20}{25}$，再由全概率公式得 $P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_2\mid H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90}$，所以

$$\begin{aligned}P(\overline{A_1}\mid A_2)&=\frac{P(\overline{A_1}A_2)}{P(A_2)}\\&=\frac{1}{P(A_2)}[P(H_1)P(\overline{A_1}A_2\mid H_1)+P(H_2)P(\overline{A_1}A_2\mid H_2)+P(H_3)P(\overline{A_1}A_2\mid H_3)]\\&=\frac{1}{P(A_2)}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3\times7}{10\times9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7\times8}{15\times14}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5\times20}{25\times24}\right)=\frac{90}{61}\cdot\frac{2}{9}=\frac{20}{61}\end{aligned}$$

（ⅲ）$P(H_2|\overline{A_1}A_2)=\frac{P(H_2)P(\overline{A_1}A_2|H_2)}{P(\overline{A_1}A_2)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{7\times8}{15\times14}}{\frac{2}{9}}=\frac{2}{5}$

例 8　为了防止意外，在矿内同时设有两种报警系统 A 和 B，每种系统可单独使用，其有

效的概率 A 为 0.92，B 为 0.93，在 A 失灵的情况下，B 有效的概率为 0.85，求

(ⅰ)发生意外时，这两个报警系统至少有一个有效的概率；

(ⅱ)B 失灵的条件下，A 有效的概率。

解 设 A 表示"系统 A 有效"，B 表示"系统 B 有效"，则 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(AB)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$，从而 $P(AB)=P(B)-P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.93-(1-0.92)\times 0.85=0.93-0.08\times 0.85$，所以

(ⅰ)所求的概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.92+0.93-(0.93-0.08\times 0.85)=0.988$$

(ⅱ)所求的概率为

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\overline{B})}=\frac{0.92-(0.93-0.08\times 0.85)}{1-0.93}=0.829$$

例 9 一架长机和两架僚机一同飞往某目的地进行轰炸，但要到达目的地非有无线电导航不可，而只有长机具有此项设备，一旦到达目的地各机独立地进行轰炸，且炸毁目标的概率均为 0.3，在到达目的地之前，须经过高射炮区，此时任一飞机被击落的概率为 0.2，求目标被击毁的概率。

解 设 B_i 表示"三架飞机中有 i 架通过高射炮区"，$i=0,1,2,3$，A 表示"目标被击毁"，则 $P(B_0)=0.2$，$P(B_1)=0.8\times 0.2\times 0.2=0.032$，$P(B_2)=0.8\times 0.8\times 0.2+0.8\times 0.2\times 0.8=0.256$，$P(B_3)=0.8\times 0.8\times 0.8=0.512$

$P(A|B_0)=0$，$P(A|B_1)=0.3$，$P(A|B_2)=0.3+0.3-0.3\times 0.3=0.51$，$P(A|B_3)=3\times 0.3-3\times 0.3^2+0.3^3=0.657$ 故由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)\\&=0.2\times 0+0.032\times 0.3+0.256\times 0.51+0.512\times 0.657=0.4765\end{aligned}$$

例 10 甲、乙、丙三人同时各自独立地对同一目标进行射击，三人击中目标的概率分别为 0.4，0.5，0.7，设一人击中目标时目标被击毁的概率为 0.2，两人击中目标时目标被击毁的概率为 0.6，三人击中目标时目标必定被击毁。

(ⅰ)求目标被击毁的概率；

(ⅱ)已知目标被击毁，求由一人击中的概率；

(ⅲ)已知目标被击毁，求只由甲击中的概率。

解 设 A,B,C 分别表示甲、乙、丙击中目标，D 表示目标被击毁，H_i 表示有 i 个人击中目标，$i=0,1,2,3$，则 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，$P(C)=0.7$，$P(D|H_0)=0$，$P(D|H_1)=0.2$，$P(D|H_2)=0.6$，$P(D|H_3)=1$，由于 A,B,C 相互独立，因此

$$P(H_0)=P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=0.6\times 0.5\times 0.3=0.09$$

$$\begin{aligned}P(H_1)&=P(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)\\&=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)\\&=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)\\&=0.4\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.7=0.36\end{aligned}$$

同理 $P(H_2)=0.41$，$P(H_3)=0.14$

(ⅰ)由全概率公式得