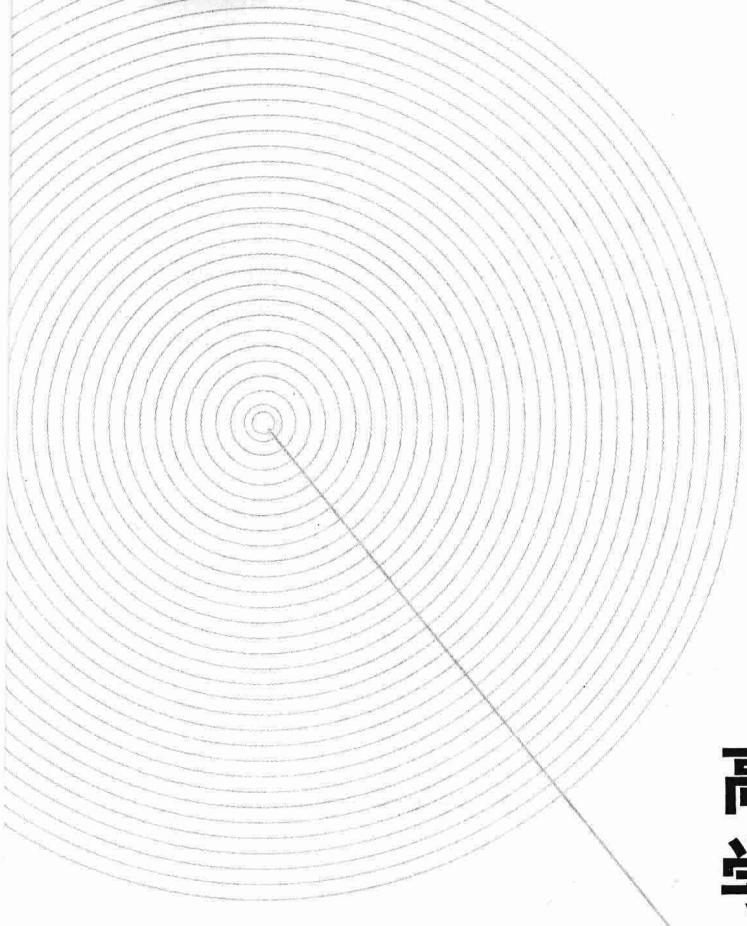


北京联合大学数学教研室 编

高等数学 学习指导 (第2版)

清华大学出版社



高等数学 学习指导

(第2版)

北京联合大学数学教研室 编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书在总结第1版教学使用过程中的经验的基础上,围绕最新教学大纲中的教学基本要求,按章节以知识点为单位进行编排.全书共13章.第1~12章内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数.每章节包括知识要点、典型例题、自测题及答案等内容.部分章节后有数学家简介、数学史话和数学应用范例.第13章介绍用 Mathematica 研究高等数学问题.本书内容编排兼顾现行教材次序,同时考虑趣味性及应用性.

本书可作为普通高等院校一般工科类及经济管理类的本科生及专升本学生的高等数学课程习题课用书或学生自学的参考书,同时也可供高等院校相关课程教师参考.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/北京联合大学数学教研室编.--2版.--北京:清华大学出版社,2010.9
ISBN 978-7-302-23541-5

I. ①高… II. ①北… III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 147038 号

责任编辑:佟丽霞

责任校对:刘玉霞

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:北京富博印刷有限公司

装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:170×230 印 张:22.75 字 数:394 千字

版 次:2010 年 9 月第 2 版 印 次:2010 年 9 月第 1 次印刷

印 数:1~4000

定 价:32.00 元

产品编号:038015-01

第1版 前言

如果将整个数学比作一棵大树,那么初等数学是树根,高等数学是树干,名目繁多的数学分支是树枝,而树干的主要部分就是微积分.这只是一个粗浅的比喻,说明高等数学中微积分的重要性以及它和各科之间的关系.学习高等数学当然应该有初等数学的基础,而学习任何一门近代数学或者工程技术都必须先学高等数学中的微积分.它对工程技术的重要性就像望远镜之于天文学,显微镜之于生物学一样.因此在所有的工科大学中,微积分总是一门重要的必修课程.

随着教学改革의 深入发展,面对高等学校扩招的现状,现有的高等数学教材已不能满足非重点院校一般工科类及经济管理类的文理兼收的学生.一方面学生感觉难学,抓不住重点,学起来没兴趣;另一方面教师也觉得难教,教材与学生接受能力的差距较大.因此,编写一本行之有效的学习指导书势在必行.

本书以非重点院校的一般工科类及经济管理类的本科生及专升本学生为主要对象,是在总结一线教师多年教学实践的基础上,围绕最新教学大纲中的教学基本要求,结合现行主流教材章节次序,以知识点为单位进行编排的,起点低,适应扩招后的形势,做到由浅入深.侧重帮助学生轻松地掌握高等数学课程中最基本的概念、理论和最常用的基本方法,达到让学生了解高等数学的基本思想、掌握基本运算和基本方法的目的,提高学生的自学能力及应用数学知识解决实际问题的能力.

全书共13章.第1~12章内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其

应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程。每章节包括知识要点、典型例题、自测题及答案等内容。知识要点简单明了、重点突出；典型例题具有代表性，由浅入深；例题之后，又列举了类题以加深读者对知识要点的理解，巩固对典型例题的掌握；每章末的自测题用于对基本概念和基本运算能力掌握情况的自我检测。这种结构安排可使读者对所学知识易于有个总体认识，做到见微知著，一目了然。

本书突出微积分的基本思想和基本方法，以便使学生在在学习过程中能较好地了解各部分内容的内在联系，从总体上把握微积分的思想方法。在数学应用范例和数学史话中，特别注意对基本概念、基本定理和重要公式的几何背景和实际应用背景的介绍，以加深学生对它们的理解。数学家简介可帮助学生提高科学素质。

鉴于计算机的广泛应用以及数学软件的日臻完善，为了提高学生使用计算机解决数学问题的意识和能力，我们编写了第13章“用 Mathematica 研究高等数学问题”，将微积分的教学与计算机功能的利用有机结合起来。这样有利于提高学生的学习主动性，改进教学效果，并以此带动教学方法和教学手段的改革。

本书由北京联合大学数学教研室编写，编写组的成员如下：主编陈冬，副主编魏荣、李宗杰，策划人张静。具体分工如下：魏荣编写第1章，齐进军编写第2章，尚学海编写第3章，崔海英编写第4章，侯文宇编写第5章，常广平编写第6章，顾英编写第7章，李林杉编写第8章，陈冬编写第9章，史凤丽编写第10章，曹彩霞编写第11章，常广平、车燕编写第12章，张静编写第13章。全书由陈冬、张静统稿，校订。

本书在编写过程中，得到了任开隆教授、赵杰民教授的鼓励和帮助，在此谨志谢忱。

由于编写时间仓促，编者水平有限，书中难免存在缺点错误，敬请读者批评指正。

编 者

2005年6月

第2版 前言

本书第1版自2005年9月出版以来,受到了读者的广泛欢迎,并在一定程度上满足了教与学的需求.为了更好地指导学生学习高等数学,提高高等数学课程的教学质量,在清华大学出版社及北京联合大学教务处的鼓励与支持下,我们有了再版的想法,并借此机会作了以下修订:

(1) 对第1版编写及排印中的疏漏进行了修正,并对一些章节的内容进行了充实.

(2) 为了方便学生从不同角度加强对基本概念、基本方法的了解与掌握,各章自测题中新增加了填空题和单选题.

(3) 为了方便学生的学习与参考,在章节次序上进行了调整,调整后与同济大学数学系编《高等数学(第六版)》的章节次序一致,将第1版的第12章常微分方程改为第7章,第1版的第7章至第11章顺延.

(4) 第1版第13章中介绍的 Mathematica 上机案例,本次修订全面更新为最新的 7.0 版本.

参加第2版修订及编写工作的有:陈冬、魏荣、邢春峰、尚学海、崔海英、侯文字、常广平、顾英、李林杉、史凤丽、曹彩霞、车燕、张静,由陈冬担任主编,魏荣担任副主编.全书第2版由陈冬、张静校订.

由于编者水平所限,书中难免有不妥之处,欢迎同行及读者批评指正.

编 者

2010年7月

目录

第1章 函数与极限	1
1.1 函数	1
1.1.1 知识要点	1
1.1.2 典型例题	7
1.2 极限概念 极限运算	10
1.2.1 知识要点	10
1.2.2 典型例题	14
1.3 无穷小的比较 函数的连续性	18
1.3.1 知识要点	18
1.3.2 典型例题	21
自测题1	26
数学史话	28
1. 极限思想——重要性及其发展阶段	28
2. 刘徽与“割圆术”	30
第2章 导数与微分	31
2.1 导数的概念与运算	31
2.1.1 知识要点	31
2.1.2 典型例题	32
2.2 高阶导数与微分	40
2.2.1 知识要点	41
2.2.2 典型例题	42
自测题2	48
数学应用范例	50
1. 相关变化率问题	50
2. 微分在近似计算中的应用	50

3. 导数在经济学上的应用	51
第3章 微分中值定理与导数的应用	53
3.1 微分中值定理 洛必达法则	53
3.1.1 知识要点	53
3.1.2 典型例题	55
3.2 导数的应用	61
3.2.1 知识要点	61
3.2.2 典型例题	63
自测题 3	70
数学家简介	72
1. 罗尔	72
2. 拉格朗日	73
3. 柯西	74
4. 泰勒	75
5. 洛必达	75
第4章 不定积分	77
4.1 不定积分的概念与性质	77
4.1.1 知识要点	77
4.1.2 典型例题	78
4.2 不定积分的换元积分法与分部积分法	82
4.2.1 知识要点	82
4.2.2 典型例题	84
自测题 4	93
第5章 定积分	96
5.1 定积分的概念、性质和微积分基本公式	96
5.1.1 知识要点	96
5.1.2 典型例题	99
5.2 定积分的换元法、分部积分法和反常积分	107
5.2.1 知识要点	107
5.2.2 典型例题	109

自测题 5	116
数学应用范例	120
1. 已知变化率求变化量	120
2. 在经济学中的应用	120
3. 润滑油的存储量(反常积分的应用实例)	121
数学家简介	121
1. 牛顿	121
2. 莱布尼茨	123
数学史话 牛顿和莱布尼茨创立了微积分	124
第 6 章 定积分应用	126
6.1 知识要点	126
6.2 典型例题	130
自测题 6	141
数学应用范例 连续变量作用和问题	145
数学史话 穷竭法求面积	146
第 7 章 常微分方程	148
7.1 一阶微分方程	148
7.1.1 知识要点	148
7.1.2 典型例题	150
7.2 高阶微分方程 二阶线性微分方程	156
7.2.1 知识要点	156
7.2.2 典型例题	158
自测题 7	169
数学应用范例 微分方程模型初步	170
数学史话 钟摆、悬链线和伯努利兄弟	176
第 8 章 向量代数与空间解析几何	180
8.1 向量代数	180
8.1.1 知识要点	180
8.1.2 典型例题	181
8.2 曲线与曲面	183

8.2.1 知识要点	183
8.2.2 典型例题	186
8.3 平面与直线	189
8.3.1 知识要点	189
8.3.2 典型例题	190
自测题 8	195
数学家简介 笛卡儿	196
第 9 章 多元函数微分法及其应用	198
9.1 多元函数微分法的概念及偏导数、全微分	198
9.1.1 知识要点	198
9.1.2 典型例题	200
9.2 多元复合函数及隐函数的微分	204
9.2.1 知识要点	204
9.2.2 典型例题	205
9.3 多元函数微分学的几何应用、方向导数与梯度、 多元函数的极值	210
9.3.1 知识要点	210
9.3.2 典型例题	212
自测题 9	218
数学应用范例 如何测定太湖的最深处	220
第 10 章 重积分	222
10.1 二重积分	222
10.1.1 知识要点	222
10.1.2 典型例题	225
10.2 三重积分	233
10.2.1 知识要点	233
10.2.2 典型例题	235
10.3 重积分的应用	240
10.3.1 知识要点	240
10.3.2 典型例题	242
自测题 10	244

第 11 章 曲线积分与曲面积分	248
11.1 曲线积分	248
11.1.1 知识要点	248
11.1.2 典型例题	250
11.2 格林公式 平面上曲线积分与路径无关的条件	255
11.2.1 知识要点	255
11.2.2 典型例题	256
11.3 曲面积分	260
11.3.1 知识要点	260
11.3.2 典型例题	262
自测题 11	268
数学应用范例	271
1. 小岛在涨潮与落潮之间的面积变化	271
2. 通信卫星的覆盖面积	272
数学家简介 高斯	273
第 12 章 无穷级数	275
12.1 常数项级数	275
12.1.1 知识要点	275
12.1.2 典型例题	277
12.2 幂级数	282
12.2.1 知识要点	282
12.2.2 典型例题	283
12.3 函数展开成幂级数	287
12.3.1 知识要点	287
12.3.2 典型例题	288
自测题 12	292
数学应用范例	295
1. 阿基里斯问题	295
2. 利用级数估计 π 的值	295
3. 微分方程的级数解	296
4. 表示特殊函数	296

第 13 章 用 Mathematica 研究高等数学问题	298
13.1 入门	298
13.1.1 启动和退出	298
13.1.2 Mathematica 7.0 的工作界面	299
13.1.3 Mathematica 7.0 的输入、输出和运行	299
13.1.4 数值类型和系统中的数学常数	300
13.1.5 内建函数(built-in function)	302
13.1.6 变量	304
13.1.7 表达式	305
13.1.8 7.0 以前版本中调用软件包	307
13.1.9 Mathematica 的联机帮助系统	307
13.1.10 给初学者的提示	310
13.2 函数 二维图形 极限	311
13.2.1 自定义函数	311
13.2.2 二维图形	313
13.2.3 极限	317
13.3 一元函数微分学	318
13.3.1 求导数	318
13.3.2 求函数的极小值	319
13.4 一元函数积分学	323
13.4.1 积分的计算	323
13.4.2 反常积分的计算	323
13.4.3 数值积分	324
13.5 三维图形	324
13.5.1 三维作图命令	324
13.5.2 三维作图范例	327
13.6 多元函数微积分运算	330
13.6.1 求偏导数	330
13.6.2 求全微分	331
13.6.3 重积分	332
13.7 无穷级数	332
13.7.1 求无穷和	332

13.7.2	把函数展开为幂级数	333
13.7.3	去掉余项	333
13.8	常微分方程	333
13.8.1	求解微分方程通解	334
13.8.2	求解微分方程初值问题	334
13.8.3	求解微分方程组	334
自测题答案与提示		335

第 1 章

函数与极限

1.1 函数

本节介绍函数的概念及性质,反函数、复合函数、分段函数的概念,基本初等函数和初等函数的概念及性质.

1.1.1 知识要点

1. 函数的概念(略)

2. 函数的特性

(1) 有界性: 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\exists M > 0$, 使得对于一切 $x \in X$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界. 否则, 称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注意 ① 函数 $f(x)$ 是否有界与讨论区间有关.

② 正数 M 不是惟一的, 故定义中的 $|f(x)| \leq M$ 也可以写成 $|f(x)| < M$.

以下列出 6 个常用的有界函数:

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, \quad |\arccos x| \leq \pi, \quad x \in [-1, 1]$$

$$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}, \quad |\operatorname{arccot} x| < \pi, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

(2) 单调性: 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) >$

$f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

注意 函数 $f(x)$ 的单调性与讨论区间有关.

以下列出 8 个常用的单调函数:

e^x 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加, 其反函数 $\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加;

$\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加, 其反函数 $\arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调增加;

$\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上单调减少, 其反函数 $\arccos x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调减少;

$\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加, 其反函数 $\arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

(3) 奇偶性: 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\forall x \in X$, 恒有 $f(-x) = f(x)$ (或 $f(-x) = -f(x)$), 则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).

注意 ① 由定义知, 具有奇偶性的函数其定义区间一定是关于原点的对称区间.

② 奇偶函数的运算性质: 在同一定义区间内,

- 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数.
- 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数; 奇数个奇函数之积为奇函数.
- 一奇一偶两函数的乘积为奇函数.

(4) 周期性: 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 T , 使 $\forall x \in D$, 有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

注意 周期函数的运算性质:

① 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$ (如 $\sin x$ 的周期为 2π , 则 $\sin(3x+4)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{3}$).

② 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的周期函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.

③ 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2 (T_1 \neq T_2)$ 为周期的周期函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的周期函数.

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W , 若对每个 $y \in W$, 有惟一的 $x \in D$, 使得 $f(x)=y$, 这时变量 x 也是变量 y 的函数, 称为 $y=f(x)$ 的反函数, 记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上, $y=f(x)$, $x \in D$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$, $x \in W$.

注意 ① 只有一一对应的函数才有反函数.

② 若 f 是定义在 D 上的单调增加(或单调减少)函数, 则其反函数 f^{-1} 在 W 上也是单调增加(或单调减少)函数.

③ $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y=x$ 对称.

4. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u=\varphi(x)$ 在 D 上有定义(D 是构成复合函数的定义域, 它可以是函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的一个非空子集), 且 $\varphi(D) \subset D_f$, 则函数 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由函数 $u=\varphi(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数, 它的定义域为 D , 变量 u 称为中间变量.

注意 并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数, 若 D 为空集, 即 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域交集为空集则不能复合.

5. 分段函数

在自变量的不同变化范围内, 对应法则用不同解析式子来表示的一个函数, 称为分段函数.

注意 ① 分段函数是用不同式子表示的一个函数.

② 分段函数的定义域是各段定义域之并集.

6. 基本初等函数和初等函数

(1) 基本初等函数: 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数统称为基本初等函数(表 1-1).

(2) 初等函数: 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

表 1-1 基本初等函数

名称	表达式 (定义域 D 、值域 W)	性质与说明	图 像
基本初等函数	幂函数 $y=x^{\mu}$ (μ 为常数) 如当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时, $y=x^{\frac{1}{2}}$, $D: [0, +\infty)$, $W: [0, +\infty)$	幂函数的定义域, 由 μ 的取值而定, 但不论 μ 取什么值, 幂函数在 $(0, +\infty)$ 内总有定义. 图像过点 $(1, 1)$	
	指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$), $D: (-\infty, +\infty)$, $W: (0, +\infty)$	若 $a>1$, 单调增加; 若 $0<a<1$, 单调减少. 图像过点 $(0, 1)$. 特例: 以常数 e 为底的指数函数 $y=e^x$, $e=2.718\ 281\ 8\cdots$	
	对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$), $D: (0, +\infty)$, $W: (-\infty, +\infty)$	若 $a>1$, 单调增加; 若 $0<a<1$, 单调减少. 图像过点 $(1, 0)$. 特例: 自然对数 $y=\log_e x = \ln x$	
	三角函数		
三角函数	正弦函数 $y=\sin x$, $D: (-\infty, +\infty)$, $W: [-1, 1]$	奇函数, 周期函数 $T=2\pi$, 有界函数 $ \sin x \leq 1$	
	余弦函数 $y=\cos x$, $D: (-\infty, +\infty)$, $W: [-1, 1]$	偶函数, 周期函数 $T=2\pi$, 有界函数 $ \cos x \leq 1$	