



全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

○ 主编 周光亚 张宏伟



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

主 编 周光亚 张宏伟
副主编 邓云辉 徐雅玲 赵洪文



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是全国高职高专教育“十一五”规划教材,是以教育部《高职高专教育基础课程基本要求》为基础,参考国内外一些优秀教材,并结合编者多年高等数学教学实践经验和教学改革研究的成果而编写的高职高专工程类专业适用的高等数学教材。本书配有电子教案、电子书等教学包资源,从而形成综合性的立体化教材。

本书主要包括函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,定积分与不定积分,定积分的应用,常微分方程初步,空间解析几何初步,偏导数及其应用,二重积分,无穷级数以及 Mathcad 入门等内容,书后附有习题参考答案。

本书适用于高职高专院校、成人高校、继续教育学院和民办高校的数学教学,也可作为有关人员学习数学知识的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/周光亚,张宏伟主编. —北京:高等教育出版社,2010. 5

ISBN 978-7-04-028685-4

I. ①高… II. ①周… ②张… III. ①高等数学—高等学校:技术学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 043003 号

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000
经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 河北新华印刷一厂

开 本 787×960 1/16
印 张 19.75
字 数 410 000

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2010 年 5 月第 1 版
印 次 2010 年 5 月第 1 次印刷
定 价 27.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 28685-00

前 言

本书是以教育部《高职高专教育基础课程基本要求》为基础,参考国内外一些优秀教材,并结合编者多年高等数学教学实践经验和教学改革研究的成果而编写的高职高专工程类专业适用的高等数学教材。另外本书还配有光盘,便于教与学,可向高等教育出版社免费索取。

一、本书的主要特点

1. **“渗透式”引入数学软件。**在本书中数学软件应用不是作为独立于数学的知识方法,而是作为数学教学辅助工具直接融入教材正文和习题当中,并对教材编写乃至数学教学体系的构建产生影响。数学软件采用 Mathcad。与 Mathematica 等数学软件相比,它更加直观易懂,易学易用,便于交流,因此认为它更适合作为计算机辅助数学教学,特别是高职数学教学的入门软件。

2. **突出数学认识。**本书强调对数学的认识,包括对基本概念、基本理论、基本思想方法的理解,也包括用数学来描述实际问题,用计算结果来解释说明问题,等等。为了形象化这些认识,本书编入了较多插图,其中很多是用数学软件描绘的。

3. **切实加强应用。**本书注重培养学生数学应用的能力和意识,并且使加强应用更加切实可行。数学软件的引入既可为我们赢得更多讨论数学应用的时间,又为其提供强大工具,从而可讨论更多实际问题。

4. **适度把握严谨性与通俗性。**本书努力在两者之间寻求一种平衡。一方面尽可能讲清“道理”,另一方面尽量做到深入浅出,通俗易懂,符合高职数学教育实际。

二、给学生的建议

1. **乐于学习数学。**相信数学学习对于你是极其重要、终身受益的,即使你可能感到所学的数学知识在你的专业课程或工作岗位中出现不多。数学学习将系统地培养你的科学思维能力和习惯,提高你的科学文化素养,这些对于你的可持续发展是必不可少的。数学的应用本来是极其广泛的,只是你需要学会怎样去应用。

2. **课堂上保持与教师同步。**无论你的实际程度是超前还是暂时落后,都应优先做好本堂课应做的一切,充分利用课堂这一最为宝贵的资源。

3. **充分认识自学的重要性。**自学能力是在大学学习期间需要重点培养的能力之一。书中所编写的内容可能大大超过老师对你的要求。你应当保证完成这些要求但也不必拘泥于这些要求。在与书配套的光盘中编写了大量的相关阅读材料供你选读,你还可以读一些参考书、到网上查阅相关信息和资料。另一方面,多与老师和同学交流,

讨论问题。

4. **多动手。**你最好在听课或读书的同时,亲自在练习本或草稿纸上动手演算,这可能会收到事半功倍的效果。本书中编写有不少图形和计算机探究题。只要条件许可,最好多上机做做这些题,即使老师并未作这些要求。

5. **认真对待作业。**不要一边看例题一边做习题,也不要过多地依赖书末的习题参考答案,而应当尽量充分地做好准备以后再做习题,力求在做每一道题后都有新的收获。习题解答应做到过程完整,理由充分,表述清楚,书写工整,养成严谨负责的作风和习惯。每学完一个单元,最好做一个简短的小结。

三、写给教师的话

1. **关于数学软件 Mathcad 的使用。**本书采用的数学软件为 Mathcad 2001 和 Mathcad 14,两种版本各有优缺点。赠送的光盘中提供了与本书配套的 ppt 电子教案,其中包括 Mathcad 例题和数学实验的链接。后者用于学生集中上机练习。

2. **关于计算。**由于数学软件的引入,本书原拟适当减少传统计算训练和要求,但作为一种兼容或过渡方案,本书中仍然编写了较多关于计算的例题和习题,可根据教学实际选择使用其中的一部分。

3. **关于授课计划。**本课程建议分两个学期完成,上学期完成第一~六章,约 70 课时,下学期完成第七~十章,约 50 课时。光盘中的 ppt 电子教案是按教学单元制作的,每单元(即每一讲)为 2 课时,这相当于给出了一个参考授课计划。可根据本校教学实际自行调整。

4. **关于练习题、习题和复习题。**本书尽可能使编排的章节与教学单元相对应,以便编制授课计划。每一节后编排一组练习题和习题。其中练习题主要用于课堂练习,并作为习题的热身。习题主要用作课外作业。每一章后编排一组复习题,主要用于复习巩固本章知识,也可用于期末复习。

5. **关于加 * 号的内容。**加 * 号的章节或段落为选学内容,但并非是次要的内容。其中不少正是体现本书特色的“亮点”,如 6.5 节、7.7 节、条件极值和最小二乘法等。

四、本书各章特点

第一章 函数、极限与连续

函数描述 以“输入、输出”的观点描述函数、复合函数、反函数,直观生动,与工程技术、信息技术语言相吻合。

极限描述 极限以(自变量)“充分…”,(因变量)“任意接近…”的直观方式描述。这不是极限的正式定义,但比两个“无限”的描述方式更接近于极限的正式定义(在光盘中给出了极限正式定义的简单介绍)。

第二章 导数与微分

曲线的斜率与切线 给出曲线斜率的概念,并以此来定义切线。曲线的斜率本身

对描述曲线的性态有实际意义;利用曲线斜率定义的切线有更确切的意义,用这种定义可更加明确地判断切线的存在性。

导数的意义 一般高等数学教材都给出导数的物理意义和几何意义,并指出导数是函数的变化率。本书不仅如此,而且明确指出 $f'(x_0)$ 描述函数 f 在点 x_0 附近的变化方向和快慢程度,并用实例强化导数这一一般性意义。

导数公式 根据导数定义推出导数公式 $(\ln x)' = 1/\ln x$, $(\sin x)' = \cos x$,并以此为源头,利用导数的公式和法则以一种“最简方案”推出全部基本初等函数的导数。使读者不但对每个导数公式知其所以然,而且认识到它们之间的内在联系,认识到两个重要极限在导数公式体系中的基础性地位。

微分 指出导数与微分在描述函数性态上的联系与区别:导数和微分都描述函数的局部变化;导数描述的是相对变化,微分描述的是绝对变化。而“线性逼近”则是“以直代曲”思想在微分学中的体现。并在此基础上自然地给出了弧微分概念,为以后的“曲率”和“弧长”做好了理论上的准备。

第三章 导数的应用

初值问题 本书反复提出初值问题模型,并陆续在第三、四、六章给出不同的求解策略:应用拉格朗日中值定理推论2、应用积分上限函数、应用不定积分,最后纳入微分方程求特解的模型。并强化这一模型在实际中的应用。

临界点 将驻点、奇点(即不可导点)统称为临界点,并从讲单调区间的分界点处开始提出,便于单调区间和极值及其相互关系的讨论。

凹凸性 直接以 y' 的单调性来定义曲线的凹凸性。这样既易于理解,也便于进一步掌握凹凸性判定定理。同时指出凹凸性反映函数的某种变化规律,即函数变化速度的变化规律。

取极值的条件 以“仅有临界点是可能极值点”这一表述方式取代传统的“取极值的必要条件”的相关表述,以“极值点检验法”取代“取极值的充分条件”。这样表述更加确切,也更突出应用。

最大(小)值问题 将临界点唯一时最大(小)值的计算原理明确地以定理的形式给出。因为它们在应用中经常用到,有必要强化。除了讨论函数在闭区间上的最大(小)值和临界点唯一时的最大(小)值外,本书还举例讨论了既非闭区间,又非临界点唯一时最大(小)值的求法。

曲率与曲率圆 这部分内容不但应用性强,而且是学习微积分思想方法的很好的素材。本书用 Mathcad 处理本节的计算和绘图,既减小了学习的障碍,又增强了应用性。

第四章 定积分与不定积分

曲边梯形的面积 从一个数学实验开始,从感性到理性认识“无限分割,以直代曲”的思想。

原函数存在性定理 给出了原函数存在性定理的一个重要的应用:利用积分上限

函数求解初值问题。

换元积分法 将第一类换元法表述为:如果 F 是 f 的一个原函数,则无论 t 是自变量还是中间变量, $\int f(t) dt = F(t) + C$ 都是成立的。这可与微分形式的不变性进行类比,似可称为“积分形式的不变性”。

将第一类和第二类换元法解释为关系式 $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx \stackrel{\varphi(x)=t}{=} \int f(t) dt$ 在不同方向上的应用,从而指出了两类换元法之间的关系。

第五章 定积分的应用

平面图形的面积 公式 $A = \int_a^b |f(x)| dx$ 或 $A = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx$ 在 Mathcad 计算中具有特别意义。例如根据后一公式进行 Mathcad 计算时,不必考虑两条曲线的上下关系,也不必去掉绝对值符号。当交点多于两个时,只需计算两头的坐标。这些在应用中是十分有用的。在光盘中还系统介绍了由曲线参数方程求平面图形的面积的方法。

弧长与侧面积 与曲率一样,用 Mathcad 计算解决了平面曲线的弧长和旋转体的侧面积的计算困难的问题,从而使学习和应用这部分十分有用的知识成为可能。

第六章 常微分方程初步

微分方程 重点放在可分离变量的方程,强化应用,介绍了“牛顿冷却定律”、“利用碳-14 测定年代”和“正比于速度的阻力”等模型。在光盘中对常数变易法进行了更深入的讨论。二阶常系数非齐次线性微分方程的求解问题也放在了光盘中。

介绍了 Mathcad 的 given-odesolve 求解模块。该模块用来求解最高阶项是线性的常微分方程。此类方程涵盖了一般高等数学中所讲的全部微分方程。

第七章 空间解析几何初步

直线的参数方程 在直线方程的三种形式中,本书更突出参数方程。理由有两点:一是参数形式更便于相关计算(如求直线与平面的交点)和(用软件)作图;二是空间曲线的方程也较多以参数方程形式给出。直线的参数方程更能体现直线与一般曲线的关系。

曲线(面)参数方程与向量值函数 引入向量方程和向量值函数概念,为研究质点沿空间曲线运动、(利用软件)绘出或研究曲线(面)提供了理论基础和重要方法,在此基础上自然地引入了空间曲线的切线和法平面的概念,并利用向量值函数的导数求它们的方程。

第八章 偏导数及其应用

二元函数的等位线 二元函数的图形(曲面)和等位线同为二元函数形象化的标准方法。等位线还在实际中有直接应用(如地图中的等高线)。数学软件的引入使描绘和研究等位线成为可能。

条件极值与规划问题 提出条件极值概念,但不讲拉格朗日乘数法(放在光盘中介绍),而是用 Mathcad 的 given-maximize() | minimize() 模块来计算,并在此基础上将

模型扩展到一般规划问题。这样处理既使学习更加容易,又使应用更加广泛。

最小二乘法 介绍最小二乘法原理,并给出一个用 Mathcad 进行程序化计算的方案。

第九章 二重积分

用极坐标计算二重积分 注意到中学一般不讲极坐标,因此本书在这里首先介绍极坐标的基础知识。至于用极坐标计算二重积分,本书只举例介绍由圆或圆弧构成的积分区域的情形。更加一般的情形以及极坐标面积元素的讨论则放在光盘中介绍。

平面图形的面积 介绍利用二重积分计算平面图形的面积,顺便解决了利用极坐标计算平面图形的面积的问题(因为极坐标方法是在二重积分中开始介绍的,在第五章并未讨论)。

曲面的面积 与曲率一样,用 Mathcad 计算解决了曲面的面积的计算困难的问题,从而使学习和应用这一有用的知识成为可能。

第十章 无穷级数

判定敛散性的意义 指出能像几何级数一样用公式来求和的级数是十分稀少的,大多只能用有限和逼近无限和,但其前提是级数收敛。这给为什么要判别级数的敛散性提供了一个简单而有说服力的理由。

积分审敛法 先给出积分审敛法(其证明放在光盘中),据此轻松推出 p -级数的敛散性,再讲比较审敛法就比较顺畅。

函数展开成幂级数 从函数的线性逼近出发,到泰勒公式,最后到泰勒级数,突出这些知识之间的相互关系,并体现从量变到质变的过程。

五、关于本书编者

参与本书编写的有:周光亚(四川工程职业技术学院)、张宏伟(湖南电气职业技术学院)、邓云辉(四川工程职业技术学院)、徐雅玲(河北农业大学海洋学院)、罗胡英(河北农业大学海洋学院)、赵洪文(辽宁铁道职业技术学院)、谢科达(湖南电气职业技术学院)、何祖国(四川工程职业技术学院)、张勇(四川工程职业技术学院)、余川祥(四川工程职业技术学院)、李传伟(四川工程职业技术学院)、吴世旭(四川工程职业技术学院)、王丽君(河北农业大学海洋学院)、郑志静(成都东软信息技术职业学院)。全书编写的策划、组织和统稿由周光亚承担。教育部文化教育类专业教学指导委员会委员李以渝教授和四川工程职业技术学院徐诗勤副院长担任了本书的主审,四川工程职业技术学院基础部邹毓文主任、湖南电气职业技术学院彭希林教授等专家对本书的编写给予了极大的支持,在此一并表示感谢!

作者联系邮箱为 yjwxjj114@163.com,高等教育出版社网站为 <http://www.hep.cn/>。

因水平有限,加之时间仓促,书中必然存在疏漏或不尽如人意之处,敬请指正。

编者
2010年春

目 录

第一章 函数、极限与连续	1	3.2 函数的单调性与曲线的 凹凸性	74
1.1 函数	1	习题 3.2	79
习题 1.1	5	3.3 函数的极值	80
1.2 初等函数	6	习题 3.3	83
习题 1.2	10	3.4 函数的最大值与最小值	84
1.3 极限及其代数运算	11	习题 3.4	88
习题 1.3	19	* 3.5 曲率、曲率圆和曲率半径	90
1.4 无穷小与无穷大、两个重要 极限	20	* 习题 3.5	94
习题 1.4	26	第三章复习题	94
1.5 函数的连续性	27	第四章 定积分与不定积分	97
习题 1.5	33	4.1 定积分概念和性质	97
第一章复习题	34	习题 4.1	103
第二章 导数与微分	36	4.2 微积分基本公式	103
2.1 导数概念	36	习题 4.2	106
习题 2.1	42	4.3 不定积分概念、直接积分法	107
2.2 导数的四则运算法则	42	习题 4.3	111
习题 2.2	45	4.4 换元积分法	112
2.3 高阶导数、反函数求导法则	47	习题 4.4	119
习题 2.3	50	4.5 分部积分法	120
2.4 链式法则、求初等函数的导数	50	习题 4.5	123
习题 2.4	53	4.6 反常积分	123
2.5 隐函数求导方法、参数式函数 的导数	54	习题 4.6	125
习题 2.5	59	第四章复习题	126
2.6 微分	60	第五章 定积分的应用	128
习题 2.6	67	5.1 平面图形的面积	128
第二章复习题	67	习题 5.1	134
第三章 导数的应用	70	5.2 体积	135
3.1 微分中值定理	70	习题 5.2	138
习题 3.1	74	* 5.3 平面曲线的弧长、旋转体的侧 面积	139

* 习题 5.3	140	习题 8.1	200
5.4 定积分在物理中的应用	141	8.2 偏导数	200
习题 5.4	144	习题 8.2	203
第五章复习题	145	8.3 高阶偏导数、全微分	204
第六章 常微分方程初步	148	习题 8.3	206
6.1 可分离变量的微分方程	148	8.4 链式法则	207
习题 6.1	152	习题 8.4	209
6.2 一阶线性微分方程	153	8.5 隐函数求导公式	209
习题 6.2	156	习题 8.5	210
6.3 可降阶的高阶微分方程	157	8.6 偏导数的应用	211
习题 6.3	158	习题 8.6	218
6.4 二阶常系数齐次线性微分 方程	159	第八章复习题	220
习题 6.4	162	第九章 二重积分	221
* 6.5 用 given-odesolve 求解模块 求解常微分方程	162	9.1 二重积分概念和性质	221
* 习题 6.5	164	习题 9.1	223
第六章复习题	164	9.2 二重积分的计算	223
第七章 空间解析几何初步	166	习题 9.2	228
7.1 空间向量及其线性运算	166	9.3 二重积分的应用	229
习题 7.1	169	习题 9.3	233
7.2 向量的坐标	169	第九章复习题	234
习题 7.2	172	第十章 无穷级数	236
7.3 向量的数量积与向量积	173	10.1 常数项级数的概念和性质	236
习题 7.3	177	习题 10.1	240
7.4 平面的方程	177	10.2 正项级数的审敛法	241
习题 7.4	181	习题 10.2	243
7.5 空间直线的方程	181	10.3 任意项级数的审敛法	244
习题 7.5	184	习题 10.3	246
7.6 一些常见曲面的方程	185	10.4 幂级数及其收敛区间	246
习题 7.6	187	习题 10.4	249
* 7.7 空间曲线及其方程	188	10.5 幂级数的性质、求幂级数的和 函数	250
* 习题 7.7	192	习题 10.5	251
第七章复习题	193	10.6 函数展开成幂级数	252
第八章 偏导数及其应用	196	习题 10.6	256
8.1 二元函数及其极限与连续	196	* 10.7 傅里叶级数	256
		* 习题 10.7	261

第十章复习题	261	四 Mathcad 的数据处理	279
附录 Mathcad 入门	264	附表 Mathcad 常用运算符	280
一 公式基础	264	习题参考答案	282
二 运算基础	267	主要参考文献	300
三 图形基础	274		

第一章 函数、极限与连续

函数是用数学术语来描述现实世界的主要工具,也是微积分的研究对象.极限是微积分的基本研究方法.连续是函数的重要性质,也是微积分许多重要理论的基础.

1.1 函 数

函数的概念

变量与常量 在某一过程中其值发生变化,或可取不同的值的量称为**变量**;其值不变,或取相同的值的量称为**常量**.

例如,把一个物体从地面以初速度 v_0 垂直向上抛出,并作自由落体运动,则时刻 t 、物体距地面的高度 h 、运动速度 v 都在变化,因此它们都是变量,由物理学知道,这里加速度是保持不变的,因此是一个常量,即重力加速度 g . 又如,考察某一个班级的学生的情况时,不同学生的年龄、身高、体重是不完全相同的,即这些量可取不同的值,因此这些量都是变量. 而他们的学制应该相同(例如 3 年),因此学制是常量.

变量与常量是相对的,随着研究目的或条件的改变,它们可能是互相转化的. 例如在不同的纬度,重力加速度是可能不同的,因此对于不同的纬度,重力加速度是一个变量. 又如考察更大范围的学生群体时,不同学生的学制也可能不同,这时学制就成了变量.

值得关注的是变量之间的相互关系. 在前面的例子中,高度 h 、速度 v 都与时刻 t 有关. 或者说它们都依赖于时刻 t ,或者说它们受时刻 t 的影响. 被依赖的变量称为**自变量**,如时刻 t ;受影响的变量称为**因变量**. 如 h 和 v 都是因变量. 由物理学知道

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, v = v_0 - g t (0 \leq t \leq 2v_0/g).$$

根据这些关系,在 $[0, 2v_0/g]$ 内的每一个时刻 t ,都有唯一确定的 h 和 v . 这时我们说 h 和 v 是 t 的函数.

函数 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集, $x \in D$, y 是实数变量,如果对于 x 的每个值,通过某种规则 f ,有 y 的唯一确定的值与 x 对应,就说 y 是 x 的**函数**(或者说规则 f 是一个函数). D 称为函数的**定义域**,全体函数值的集合称为函数的**值域**. 这里 x 是自变量, y 是因变量.

函数可想象为对每个允许的输入(即自变量的值)指定一个唯一确定的输出(即函数值)的机器. 输入构成了函数的定义域;输出构成了函数的值域(图 1.1-1).

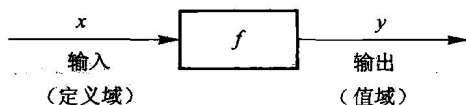


图 1.1-1 函数的“机器”图示

许多年前,瑞士数学家欧拉(Euler,1707—1783)首创了一种用符号来说“ y 是 x 的函数”的方法: $y=f(x)$. 而 $f(a)$ 就表示函数 $f(x)$ 在 a 处的值. 有时,我们将函数 $f(x)$ 简记为 f .



函数 f 规定了自变量 x 与因变量 y 之间的一种对应关系,它由定义域和 x 与 y 之间的对应规则确定. 如果两个函数的定义域和对应规则相同,就说这两个函数相同.

例如,函数 $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $g(x)=1$ 是相同的函数,但 $h(x)=x/x$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数,因为它们的定义域不同.

在上述的函数定义中,对每个 $x \in D$,对应的函数值 y 是唯一的. 我们称这样的函数为**单值函数**. 有时我们也讨论 y 不唯一的情形. 如果对每个 $x \in D$,通过某种规则,总有确定的 y 与 x 对应,但这样的 y 并不唯一,就说 y 是 x 的一个**多值函数**. 例如,对每个 $x \in [-1, 1]$,由方程 $x^2+y^2=1$,总有两个确定的 y ,即 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 与 x 对应. 方程 $x^2+y^2=1$ 所确定的 y 就是一个多值函数. 对于多值函数,如果我们附加一些条件,使对应的函数值是唯一的,这样就确定了一个函数,称为该多值函数的一个**单值分支**. 如在 $x^2+y^2=1$ 基础上,附加条件“ $y \geq 0$ ”构成新的对应法则,就得到上述多值函数的一个单值分支 $y=\sqrt{1-x^2}$.

在本书中,如果没有特别说明,函数都是指单值函数.

我们可以用公式、表格和图形来表示函数.

函数的图形是研究函数的有用而且重要的工具. 在本书中我们将尽可能多地给出所讨论问题的图形解释,从而使我们的讨论更加直观形象而且容易. 其中各个具体函数的图形都用数学软件(Mathcad)画出.

实际问题中的函数的定义域是由问题的背景限定的:如果自变量是距离,则不能取负数;如果自变量是人数,则只能取非负整数,等等. 当函数用一个公式表示时,如果没有特定条件指定函数的定义域,那么函数的定义域是指使公式有意义的自变量的集合. 如 $y=x^2$ 的定义域是整个实数集, $y=\ln(1+x)$ 的定义域是区间 $(-1, +\infty)$, 等等.

函数的几个特性

函数的奇偶性 如果对定义域内任意的 x , 都有 $f(-x)=-f(x)$ ($f(x)$), 则称函数 f 是奇函数(偶函数).

例如, 函数 $y=x^n$ 当 n 为奇数时是奇函数, 当 n 为偶数时是偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1.1-2); 奇函数的图形关于原点对称(图 1.1-3). 根据这种对称性, 我们可以先只讨论奇(偶)函数在 y 轴一侧的性质, 然后根据对称性得到另一侧的性质.

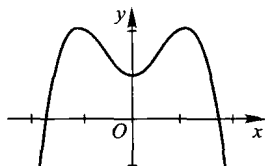


图 1.1-2

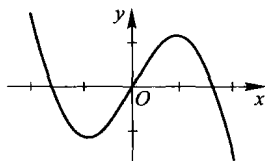


图 1.1-3

思考 奇函数或偶函数的和、差、积、商可能具有怎样的奇偶性?

函数的单调性 设函数 f 在区间 I 上有定义. x_1, x_2 是 I 内任意的两点, 且 $x_1 < x_2$, 如果 $f(x_1) < (>) f(x_2)$, 则称函数 f 在区间 I 上是增函数(减函数).

例如, 函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是减函数, 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数(图 1.1-4).

在定义域上增(减)的函数简称为增(减)函数. 例如, 函数 a^x 当 $a > 1$ 时是增函数, 当 $0 < a < 1$ 时是减函数.

在区间 I 上的增(减)函数的图形在 I 上从左到右是上升(下降)的.

函数 f 在区间 I 上是增(减)函数也称为 f 在 I 上严格单调增加(减少), I 称为 f 的单调增(减)区间, 统称单调区间.

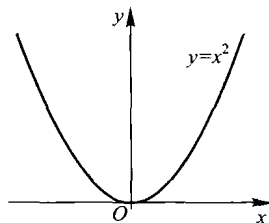


图 1.1-4

函数的周期性 如果存在常数 $T \neq 0$, 对于定义域内任意的 x , 都有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 f 是一个周期函数, 称 T 是 f 的一个周期. 如果 f 的周期中存在一个最小的正数 t , 则称 t 是 f 的最小正周期, 简称周期.

例如三角函数 $y = \sin x, y = \tan x$ 都是周期函数, 前者的周期是 2π , 后者是 π . 如果函数 $f(x)$ 的最小正周期是 t , 则函数 $f(ax+b)$ ($a \neq 0$) 的最小正周期是 $t/|a|$.

例如, $\sin(2x-3)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, $\tan\left(-\frac{x}{3}\right)$ 的周期是 $\frac{\pi}{1/3} = 3\pi$.

周期函数的图形可认为是将其一个周期的图形不断地向左右复制得到的(图 1.1-5).

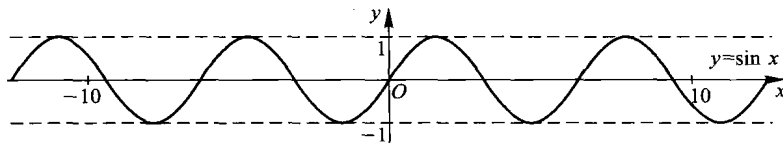


图 1.1-5

在科学中研究的许多现象的性态特征都是周期的. 如脑电波和心跳、交流电、微波炉中的电磁场、季节和气候、月相和行星的运动都是周期的.

函数的有界性 设函数 $y=f(x)$ 在 I 上有定义. 如果存在 $M \geq 0$, 对于 I 内任意的 x , 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 f 在 I 上有界. 反之称 f 在 I 上无界.

如果 I 是 f 的定义域, 就说 f 是有界函数.

例如, 函数 $y=\sin x$ 是有界函数(图 1.1-5);

函数 $y=\ln x$ 在区间 $(0,1)$ 上无界, 在 $[1,2]$ 上有界, 在 $[2,+\infty)$ 上无界(图 1.1-6).

思考 在 I 上有界的函数的图形有什么特点?

反函数

一对一函数 如果对于函数 f 定义域内任意的 a, b , 当 $a \neq b$ 时, $f(a) \neq f(b)$, 则称 f 是一对一函数. 例如增(减)函数就是一对一函数.

反函数 由于一对一函数 f 的每个输出只来自一个输入, 因此我们可以制定一个新的规则: 将 f 的输出作为输入, f 的输入作为输出, 这就得到一个新的函数, 称为 f 的反函数, 记为 f^{-1} . 这时 f 也是 f^{-1} 的反函数, 即 f 与 f^{-1} 互为反函数.

思考 函数 f^{-1} 与 f 的定义域和值域是什么关系?

例 求函数 $y=-\sqrt{3-2x}$ 的反函数, 并表示为 x 的函数.

解 由方程 $y=-\sqrt{3-2x}$ 解出 x :

$$x = \frac{3-y^2}{2} \quad (y \leq 0) \quad (\text{注意 } y \text{ 是负的算术根}), \text{ 交换 } x \text{ 和 } y, \text{ 得反函数为}$$

$$y = \frac{3-x^2}{2} \quad (x \leq 0).$$

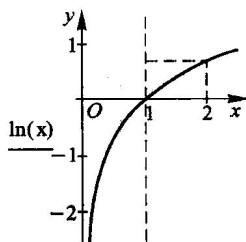


图 1.1-6

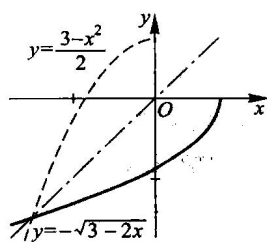
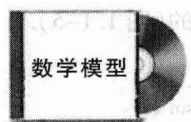


图 1.1-7



在图 1.1-7 中的两个互为反函数的函数图形是关于直线 $y=x$ 对称的. 一般的, 函数 $f(x)$ 和它的表示为 x 的函数的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图形总是关于直线 $y=x$ 对称.

练习题

1. 下列各对函数是否相同:

$$(1) f(x) = x/x, g(x) = 1; \quad (2) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x;$$

$$(3) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}.$$

2. 作出下列方程的图形,并说明它们为什么不是 x 的函数的图形:

$$(1) |y| = x; \quad (2) y^2 = x^2;$$

$$(3) |x| + |y| = 1; \quad (4) |x+y| = 1.$$

3. 作出下列函数的图形:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}; \quad (2) g(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

4. 写出下列图形(图 1.1-8, 图 1.1-9)的函数表达式:

(1) (2)

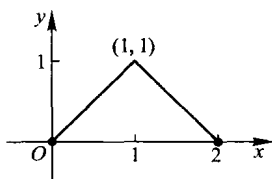


图 1.1-8

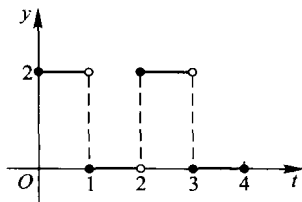


图 1.1-9

习 题 1.1

$$1. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^2+1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1-x, & 1 < x < 2 \end{cases}, \text{ 求 } f(0), f(1), f\left(\frac{5}{4}\right).$$

2. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x^2-1}; \quad (2) y = \sqrt{2-x} + \lg x.$$

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$, 值域是 $[0, 1]$, 图形如图 1.1-10 所示. 试确定下列函数的定义域和值域, 并作出它们的草图:

$$\begin{aligned} (1) & f(x) + 2; & (2) & 2f(x); \\ (3) & -f(x); & (4) & f(x-1); \\ (5) & f(-x); & (6) & -f(x+1) + 1. \end{aligned}$$

4. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \frac{1}{x+1}; \quad (2) y = 1-x^2 (x \leq 0).$$

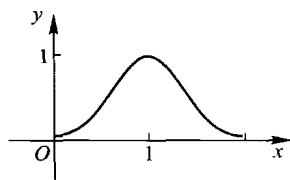


图 1.1-10

5. 把圆的面积和周长表示为圆半径的函数,再把面积表示为周长的函数.
6. 把球的半径表示为球的表面积的函数,再把表面积表示为体积的函数.

1.2 初等函数

基本初等函数

下面的函数多数是在中学数学中学习过的. 它们是学习微积分时需要事先熟悉的. 应当记住它们的图形,并能利用图形分析它们的性质.

1. 幂函数 $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) (图 1.2-1)

思考

- 1) 怎样确定幂函数的定义域?
- 2) 如果 $\alpha = m/n$ (m, n 是非零整数), 则当 m, n 分别取什么样的整数时, 幂函数具有奇偶性?

2. 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) (图 1.2-2)

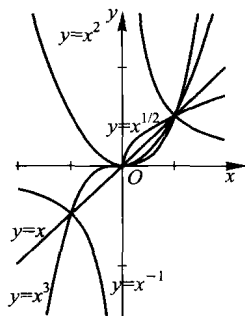


图 1.2-1

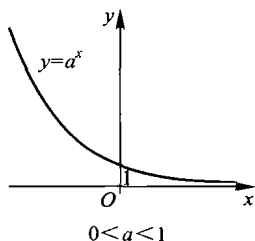
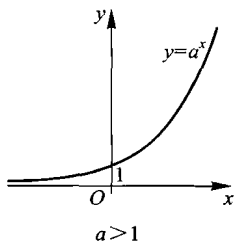


图 1.2-2

思考 幂函数和指数函数的表达式都是一个幂,如何区分它们?

3. 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) (图 1.2-3)

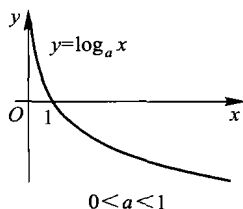
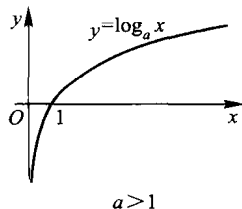


图 1.2-3