



2011 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

# 考研数学

数学二

## 10年真题点评

✧ 文登培训学校策划 ✧

陈文灯 / 主 编

陈启浩 / 副主编

立足真题 把握规律

名师亲笔 点评独到

附赠真题线路图 考点一目了然



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



KNOWLEDGE  
TREE

2011 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

# 考研数学

## 数学二

# 10年真题点评

陈文灯 / 主 编

陈启浩 / 副主编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学 10 年真题点评. 2/陈文灯主编. —3 版. —北京:  
北京理工大学出版社, 2010. 3  
(知识树考研)  
ISBN 978 - 7 - 5640 - 0712 - 6

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学  
考试 - 自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 034806 号

---

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京柯蓝博泰印务有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 11.5

字 数 / 275 千字

版 次 / 2010 年 3 月第 3 版 2010 年 3 月第 11 次印刷

定 价 / 19.80 元

责任校对 / 陈玉梅

责任印制 / 母长新

---

图书出现印装质量问题,本社负责调换

# 前言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届,积累了近百份数学试卷,这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶,也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题,除其内容外,还包含诸多有价值的信息,例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法,我们将 2001—2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题作了精心的解析,编写成《考研数学·10 年真题点评》系列丛书,奉献给广大考研朋友,书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明的语言给出解题思路;在“详解”中用简捷、新颖的方法给出详细解答;在“评注”中强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。

我们希望读者在使用本书时,不要輕易地翻阅真题的解答,只有当百思不得其解时才查阅解答;而且每做完一道真题,应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注,进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题,读完全书,我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上,在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃,而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高,从而更加从容地面对研究生入学考试。

这套系列丛书自去年问世以来,深得广大考研学子的喜爱。今年在此基础上,作了认真的修订,增加了新的内容(如增加了考题路线图),使得它更适合广大考研朋友复习时使用。

由于成书时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者和同仁指正。

编者

2010 年 3 月

# 近 10 年考题路线图

(2001—2010 年)

注:一(1),2003 表示 2003 年第一大题第 1 小题,其中一( )、二( )为客观题,其他为解答题。

## 第一部分 高等数学

(10 年考题总数:188 题,总分值:1097 分。占两部分题量之比重:79%;占两部分分值之比重:79%)

### 第一章 函数、极限、连续

(10 年考题总数:43 题,总分值:225 分。占第一部分题量之比重:24%;占第一部分分值之比重:21%)

题型 1 求复合函数的表达式(二(1),2001)

题型 2 求  $1^\infty$  型极限(四(1),2001)

题型 3 求  $0/0$  型极限(一(1),2001;二(3),2002;三(18(II)),2004;三(15),2005;二(11),2007;三(15),2008;三(15),2009)

题型 4 求  $0 \cdot \infty$  型极限(三(15),2004)

题型 5 函数性质(奇偶性,周期性,单调性,有界性)的判断或证明(三(17(I)),2004)

题型 6 无穷小的比较或确定无穷小的阶或根据无穷小的阶反求参数(二(2),2001;十,2002;一(1),2003;二(7),2004;一(5),2005;三(15),2006;一(1),2007;一(2),2009)

题型 7 数列敛散性的判定或数列极限的求解或证明(八,2002;二(1),2003;二(2),2003;三(18),2006;一(6),2007;一(5),2008)

题型 8 求  $n$  项和的数列的极限(一(4),2001;二(9),2004;一(6),2010)

题型 9 函数间断点的求解或判定(四(2),2001;一(1),2004;二(12),2005;一(2),2007;一(4),2008;一(1),2009;一(1),2010)

题型 10 已知函数的连续性,反求函数中的参数(一(1),2002;一(2),2006)

题型 11 已知极限值,求常数或其他(二(9),2008)

题型 12 讨论函数的连续性(三,2003;二(8),2006)

题型 13 求函数的表达式(五,2002;三(16(I)),2004)

题型 14 求函数的值域(三(17(II)),2004)

### 第二章 一元函数微分学

(10 年考题总数:59 题,总分值:321 分。占第一部分题量之比重:31%;占第一部分分值之比重:28%)

重:29%)

- 题型 1 与函数导数和微分的概念和性质相关的命题(二(7),2006;一(4),2007)
- 题型 2 函数(含分段函数)在一点可导的判定或求解(二(1),2002;三(16(Ⅱ)),2004;二(7),2005)
- 题型 3 求复合函数的导数或微分(一(1),2005;二(9),2006;二(13),2010)
- 题型 4 求隐函数的导数或微分(一(5),2006;二(12),2009)
- 题型 5 求参数方程的导数(五,2001;四,2003;一(2),2004;三(16),2008;三(17),2010)
- 题型 6 求函数在一点的高阶导数或泰勒展开式或麦克劳林展开式(十(1),2001;一(3),2003;二(13),2007;二(11),2010)
- 题型 7 函数极值、最值、拐点或凹凸区间判定或求解(二(3),2001;八(2),2001;二(4),2003;二(8),2004;三(21(Ⅰ)),2006;三(18(Ⅱ)),2007;二(11),2008;二(13),2009)
- 题型 8 函数与其导函数的关系或图形的判定(二(5),2001;二(4),2002;二(8),2005)
- 题型 9 不等式的证明或判定(二(4),2001;九,2002;十(1),2003;三(19),2004;三(19),2006)
- 题型 10 在某一区间至少存在一点或两点使某个式子成立的证明(十(2),2001;十(2)(3),2003;三(19),2005;三(21),2007;三(20),2008;三(21),2009;三(21),2010)
- 题型 11 函数单调性的判断或增减区间的求解(二(10),2004;三(15),2010)
- 题型 12 方程根的判定或唯一性证明(七,2003;一(1),2008)
- 题型 13 与函数在一点的切线方程或法线方程相关的命题(一(2),2001;三,2002;一(2),2003;三(21(Ⅱ)),2006;二(12),2007;二(11),2008;二(9),2009;一(3),2010)
- 题型 14 求曲线的渐近线方程(一(2),2005;一(1),2006;一(5),2007;二(10),2010)

### 第三章 一元函数积分学

(10年考题总数:39题,总分值:234分。占第一部分题量之比重:21%;占第一部分分值之比重:22%)

- 题型 1 求不定积分或原函数(三,2001;五,2003;三(16),2006;三(16),2009)
- 题型 2 函数与其原函数性质的判定或证明(二(2),2002;一(6),2009)
- 题型 3 求一元函数(含分段函数)的定积分(一(3),2001;四,2002;一(3),2005;三(17);2005;三(17),2008;二(11),2009)
- 题型 4 定积分的比较(二(5),2003;一(3),2007;二(16),2010)
- 题型 5 求解含有定积分或变上限积分的方程(六,2001;三(16),2005;三(17),2007)
- 题型 6 求解含抽象函数的积分(七,2001)
- 题型 7 反常积分的计算或收敛性的判定(一(3),2004;一(3),2006;二(10),2009;一(4),2010)
- 题型 8 求曲线的弧长或与曲率或曲率半径相关的问题(五,2001;八(2),2003;一(5),2009;二(12),2010)
- 题型 9 求平面图形的面积(八(2),2001;一(2),2002;一(4),2003;三(21(Ⅲ)),2006;一(2),2008)
- 题型 10 求旋转体的体积或侧面积或立体的体积(六,2002;三(18(Ⅰ)),2004;三(18(Ⅰ)),2007;三(19),2008;三(18),2009)

题型 11 求变力做功或压力等定积分在几何上或物理上的应用(七,2002;九,2003;三(19),2010)

#### 第四章 多元函数微积分学

(10 年考题总数:25 题,总分值:186 分。占第一部分题量之比重:13%;占第一部分分值之比重:15%)

题型 1 求多元复合函数的偏导数或全微分(一(4),2004;三(21),2004;二(11),2005;三(20(I)),2006;二(15),2007;三(20),2007;一(6),2008;二(13),2008;三(17),2009;一(5),2010;三(19),2010)

题型 2 二元函数在一点可微的判定(一(7),2007)

题型 3 多元函数极值或最值的判定或求解(三(20),2005;二(12),2006;三(21),2008;一(3),2009)

题型 4 计算二重积分(二(10),2005;三(21),2005;三(17),2006;三(22),2007;三(18),2008;三(19),2009;三(20),2010)

题型 5 二重积分的累次积分的表示或更换次序(二(12),2004;二(11),2006;一(8),2007;一(4),2009)

#### 第五章 常微分方程

(10 年考题总数:22 题,总分值:131 分。占第一部分题量之比重:12%;占第一部分分值之比重:12%)

题型 1 求一阶线性微分方程的通解或特解(一(4),2001;一(5),2004;一(4),2005;一(4),2006;三(20(II)),2006;二(10),2008)

题型 2 求二阶或二阶以上齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解(二(11),2004;二(14),2007;三(20),2009;二(9),2010)

题型 3 求可降阶的微分方程的通解或特解(一(3),2002;三(19),2007)

题型 4 已知二阶齐次线性微分方程的解,反求微分方程(二(10),2006;一(3),2008)

题型 5 考查齐次或非齐次微分方程解的性质或结构(一(2),2010)

题型 6 利用代换化简微分方程并求通解(六,2003;三(18);2005)

题型 7 通过解微分方程求函数表达式(二(3),2003;八(1),2003)

题型 8 微分方程的几何或物理应用题(八(1),2001;九,2001;三(20),2004)

## 第二部分 线性代数

(10 年考题总数:51 题,总分值:299 分。占两部分题量之比重:21%;占两部分分值之比重:21%)

### 第一章 行列式

(10 年考题总数:5 题,总分值:20 分。占第二部分题量之比重:10%;占第二部分分值之比重:7%)

题型 1 行列式的计算(一(6),2005)

题型 2 求矩阵的行列式(一(6),2003;一(6),2004;一(6),2006;二(14),2010)

## 第二章 矩阵

(10 年考题总数:13 题,总分值:56 分。占第二部分题量之比重:25%;占第二部分分值之比重:19%)

题型 1 判断矩阵是否可逆或求逆矩阵(十一(1),2002;一(7),2008)

题型 2 求矩阵的秩(二(16),2007)

题型 3 解矩阵方程或求矩阵表达式(十一,2001;十一(2),2002;一(5),2003;三(23(II)),2008)

题型 4 矩阵的伴随矩阵的求解或判定(二(14),2005;一(7),2009)

题型 5 矩阵的初等变换与初等矩阵的关系(二(13),2004;二(14),2006;一(8),2009)

题型 6 两个矩阵关系(等价、相似或合同等)的判定(一(10),2007)

## 第三章 向量

(10 年考题总数:9 题,总分值:43 分。占第二部分题量之比重:18%;占第二部分分值之比重:14%)

题型 1 向量组线性相关性的判断或证明(二(5),2002;二(6),2003;二(14),2004;二(13),2005;二(13),2006;一(9),2007;三(23(I)),2008;三(22(II)),2009;一(7),2010)

题型 2 向量的线性表出或讨论含参变量的向量的线性表出(三(22),2005)

## 第四章 线性方程组

(10 年考题总数:11 题,总分值:90 分。占第二部分题量之比重:22%;占第二部分分值之比重:30%)

题型 1 齐次线性方程组的基础解系的求解或判定(十二,2001)

题型 2 已知线性方程组的解或解的情况,求线性方程组或线性方程组中的参数(一(5),2001;三(22),2006;三(22),2010)

题型 3 求线性方程组的通解(十二,2002;三(23),2007;三(22(I)),2009)

题型 4 讨论含参数的线性方程组的解(三(22),2004;三(23),2005;三(22),2008)

题型 5 直线方程所组成的方程组的解和直线的位置关系的判定(十二,2003)

## 第五章 矩阵的特征值和特征向量

(10 年考题总数:11 题,总分值:71 分。占第二部分题量之比重:22%;占第二部分分值之比重:24%)

题型 1 求矩阵的特征值或特征向量(一(5),2002;三(23(I)),2006;三(24),2007;二(14),2008;三(23(I)),2009)

题型 2 判定矩阵是否可对角化或求解逆问题(十一,2003;三(23),2004;三(23(II)),2006)

题型 3 相似矩阵的判定或逆问题(二(14),2009;一(8),2010)

题型 4 实对称矩阵的对角化问题(三(23),2010)

## 第六章 二次型

(10 年考题总数:2 题,总分值:9 分。占第二部分题量之比重:4%;占第二部分分值之比重:3%)

题型 1 矩阵合同的判定或求解(一(8),2008)

题型 2 与矩阵的规范型相关的命题(三(23(Ⅱ)),2009)

# 目 录

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| 近 10 年考题路线图(2001—2010 年) ..... | I |
|--------------------------------|---|

## 近 10 年真题集

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| 2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 ..... | 1  |
| 2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 ..... | 4  |
| 2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 ..... | 8  |
| 2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 ..... | 11 |
| 2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 ..... | 14 |
| 2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 ..... | 17 |
| 2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 ..... | 20 |
| 2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 ..... | 23 |
| 2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 ..... | 26 |
| 2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题 ..... | 29 |

## 近 10 年真题分析、详解及评注

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| 2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注 ..... | 32  |
| 2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注 ..... | 43  |
| 2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注 ..... | 57  |
| 2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注 ..... | 68  |
| 2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注 ..... | 81  |
| 2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注 ..... | 96  |
| 2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注 ..... | 108 |
| 2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注 ..... | 120 |
| 2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注 ..... | 132 |
| 2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题分析、详解及评注 ..... | 143 |
| 附 录 研究生入学考试中常见问题解析 .....               | 154 |

# 2010 年研究生入学统一考试

## 数学二试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 函数  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$  的无穷间断点的个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 】

(2) 设  $y_1, y_2$  为一阶线性非齐次微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的两个特解,若  $\lambda, \mu$  使  $\lambda y_1 + \mu y_2$  为该方程的解,  $\lambda y_1 - \mu y_2$  为该方程对应齐次方程的解,则

- (A)  $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ . (B)  $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$ .  
(C)  $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$ . (D)  $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$ . 【 】

(3) 曲线  $y = x^2$  与  $y = a \ln x (a \neq 0)$  相切,则  $a =$

- (A)  $4e$ . (B)  $3e$ . (C)  $2e$ . (D)  $e$ . 【 】

(4) 设  $m, n$  均是正整数,则反常积分  $\int_0^1 \frac{\sqrt{\ln^2(1-x)}}{\sqrt{x}} dx$  的收敛性

- (A) 仅与  $m$  的取值有关. (B) 仅与  $n$  的取值有关.  
(C) 与  $m, n$  的取值都有关. (D) 与  $m, n$  的取值都无关. 【 】

(5) 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$  确定,其中  $F$  为可微函数,且  $F_2' \neq 0$ ,则  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$

- (A)  $x$ . (B)  $z$ . (C)  $-x$ . (D)  $-z$ . 【 】

(6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$

- (A)  $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$ . (B)  $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$ .  
(C)  $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$ . (D)  $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$ . 【 】

(7) 设向量组 (I)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  可由向量组 (II)  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表示,则

- (A) 若向量组 (I) 线性无关,则  $r \leq s$ . (B) 若向量组 (I) 线性相关,则  $r > s$ .  
(C) 若向量组 (II) 线性无关,则  $r \leq s$ . (D) 若向量组 (II) 线性相关,则  $r > s$ . 【 】

(8) 设  $A$  为 4 阶实对称矩阵,且  $A^2 + A = O$ ,若  $A$  的秩为 3,则  $A$  相似于

- (A)  $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ . (B)  $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ .

1

$$(C) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(D) \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

【 】

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(9) 3 阶常系数线性齐次微分方程  $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$  的通解为 \_\_\_\_\_.

(10) 曲线  $y = \frac{2x^3}{x^2+1}$  的渐近线方程为 \_\_\_\_\_.

(11) 函数  $y = \ln(1-2x)$  在  $x=0$  处的  $n$  阶导数  $y^{(n)}(0) =$  \_\_\_\_\_.

(12) 当  $0 \leq \theta \leq \pi$  时, 对数螺线  $r = e^\theta$  的弧长为 \_\_\_\_\_.

(13) 已知一个长方形的长  $l$  以 2 cm/s 的速率增加, 宽  $w$  以 3 cm/s 的速率增加, 则当  $l = 12$  cm,  $w = 5$  cm 时, 它的对角线增加的速率为 \_\_\_\_\_.

(14) 设  $A, B$  为三阶矩阵, 且  $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$ , 则  $|A + B^{-1}| =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求函数  $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$  的单调区间与极值.

(16) (本题满分 10 分)

(I) 比较  $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  与  $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 的大小, 说明理由.

(II) 记  $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

(17) (本题满分 11 分)

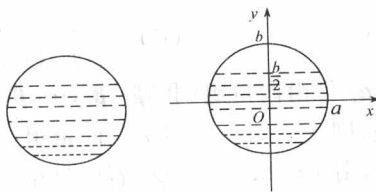
设函数  $y = f(x)$  由  $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \phi(t) \end{cases}$  ( $t > -1$ ) 所确定, 其中  $\phi(t)$  具有 2 阶导数,

且  $\phi(1) = \frac{5}{2}, \phi'(1) = 6, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$ , 求函数  $\phi(t)$ .

(18) (本题满分 10 分)

一个高为  $l$  的柱形贮油罐, 底面为长轴为  $2a$ , 短轴为  $2b$  的椭圆, 现将贮油罐平放, 当油罐中油面高度为  $\frac{3}{2}b$  时 (如图), 计算油罐中油的质量.

(长度单位为 m; 质量为 kg, 油的密度为  $\rho \text{ kg/m}^3$ )



(19) (本题满分 11 分)

设函数  $\mu = f(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 且  $4 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = 0$ , 确定  $a, b$ , 使等式在

变换  $\xi = x + ay, \eta = x + by$  下化简为  $\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ .

(20) (本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1-r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$ ,其中  $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$ .

(21) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 在开区间  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, \frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$ , 使得  $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$ .

(22) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

已知线性方程组  $Ax = b$  有两个不同的解,(I) 求  $\lambda, a$ ; (II) 求方程  $Ax = b$  的通解.

(23) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}, \text{ 存在正交矩阵 } Q, \text{ 使得 } Q^T A Q \text{ 为对角阵, 若 } Q \text{ 的第一列为 } \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T,$$

求  $a, Q$ .

# 2009 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 函数  $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$  的可去间断点的个数为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

【    】

(2) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) = x - \sin ax$  与  $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$  为等价无穷小,则

- (A)  $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ . (B)  $a = 1, b = \frac{1}{6}$ .  
(C)  $a = -1, b = -\frac{1}{6}$ . (D)  $a = -1, b = \frac{1}{6}$ .

【    】

(3) 设函数  $z = f(x, y)$  的全微分为  $dz = xdx + ydy$ , 则点  $(0, 0)$

- (A) 不是  $f(x, y)$  的连续点. (B) 不是  $f(x, y)$  的极值点.  
(C) 是  $f(x, y)$  的极大值点. (D) 是  $f(x, y)$  的极小值点.

【    】

(4) 设函数  $f(x, y)$  连续, 则  $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx =$

- (A)  $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy$ . (B)  $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy$ .  
(C)  $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx$ . (D)  $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx$ .

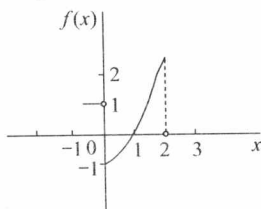
【    】

(5) 若  $f''(x)$  不变号, 且曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, 1)$  处的曲率圆为  $x^2 + y^2 = 2$ , 则函数  $f(x)$  在区间  $(1, 2)$  内

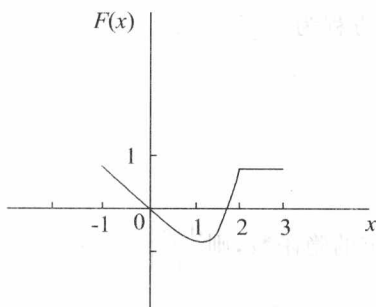
- (A) 有极值点, 无零点. (B) 无极值点, 有零点.  
(C) 有极值点, 有零点. (D) 无极值点, 无零点.

【    】

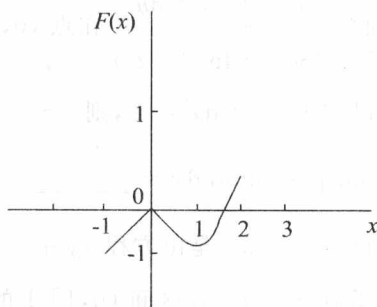
(6) 设函数  $y = f(x)$  在区间  $[-1, 3]$  上的图形为



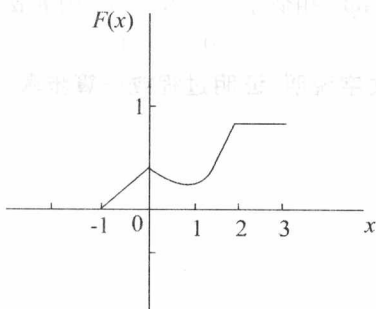
则  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  的图形为



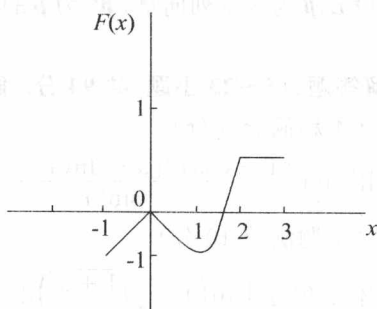
(A)



(B)



(C)



(D)

【 】

(7) 设  $A, B$  均为二阶矩阵,  $A^*, B^*$  分别为  $A, B$  的伴随矩阵, 若  $|A| = 2, |B| = 3$ , 则分块矩阵  $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$  的伴随矩阵为

(A)  $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$ .

(B)  $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$ .

(C)  $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$ .

(D)  $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$ .

【 】

(8) 设  $A, P$  均为三阶矩阵,  $P^T$  为  $P$  的转置矩阵, 且  $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ . 若  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ , 则  $Q^T A Q$  为

(A)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

(B)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

(C)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

(D)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

【 】

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(9) 曲线  $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$  在点  $(0,0)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

(10) 已知  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

(11)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx =$ \_\_\_\_\_.

(12) 设  $y = y(x)$  是由方程  $xy + e^y = x + 1$  确定的隐函数, 则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} =$ \_\_\_\_\_.

(13) 函数  $y = x^{2x}$  在区间  $(0,1]$  上的最小值为\_\_\_\_\_.

(14) 设  $\alpha, \beta$  为 3 维列向量,  $\beta^T$  为  $\beta$  的转置. 若矩阵  $\alpha\beta^T$  相似于  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $\beta^T \alpha =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$ .

(16) (本题满分 10 分)

计算不定积分  $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx \ (x > 0)$ .

(17) (本题满分 10 分)

设  $z = f(x+y, x-y, xy)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $dz$  与  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

(18) (本题满分 10 分)

设非负函数  $y = y(x) (x \geq 0)$  满足微分方程  $xy'' - y' + 2 = 0$ . 当曲线  $y = y(x)$  过原点时, 其与直线  $x = 1$  及  $y = 0$  围成的平面区域  $D$  的面积为 2, 求  $D$  绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积.

(19) (本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D (x-y) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$ .

(20) (本题满分 12 分)

设  $y = y(x)$  是区间  $(-\pi, \pi)$  内过点  $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$  的光滑曲线. 当  $-\pi < x < 0$  时, 曲线上任一点处的法线都过原点; 当  $0 \leq x < \pi$  时, 函数  $y(x)$  满足  $y'' + y + x = 0$ , 求函数  $y(x)$  的表达式.

(21) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ ;

(II) 证明: 若函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 在  $(0, \delta) (\delta > 0)$  内可导, 且

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$ , 则  $f'_+(0)$  存在, 且  $f'_+(0) = A$ .

(22) (本题满分 11 分)

设  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $\xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,