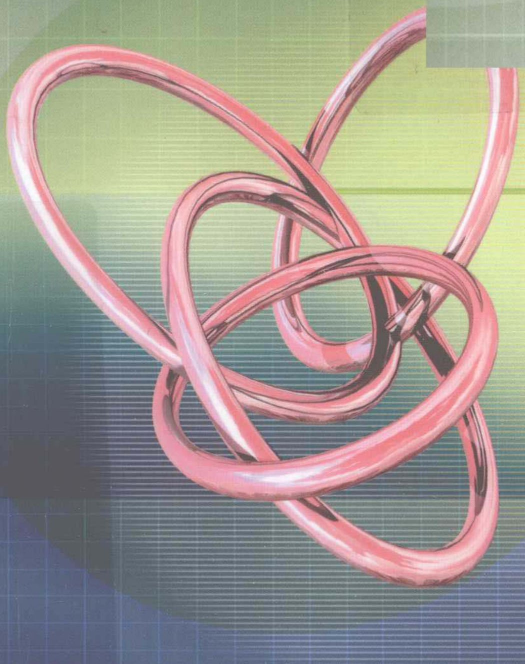
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学
——随机数学习题课教程

（第二版）



吉林大学数学学院
孙　毅　张旭利　高彦伟　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学
——随机数学习题课教程

Daxue Shuxue

——Suiji Shuxue Xitike Jiaocheng

（第二版）

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是与《大学数学——随机数学》（第二版）相对应的习题课教材。本书密切配合主教材，共分十讲，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及样本函数的分布、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析与正交试验设计；书末附综合练习题及其参考答案。全书各讲首先概括主要内容，然后按教学要求精选精讲大量例题，解答疑难问题，分析常见错误类型，最后配练习题及其参考答案。

本书可供高等学校非数学类理工科各专业学生使用，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学：随机数学习题课教程／孙毅，张旭利，高彦伟主编．—2版．—北京：高等教育出版社，2010.8

ISBN 978-7-04-030082-6

Ⅰ．①大…　Ⅱ．①孙…　②张…　③高…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　②随机过程-高等学校-教材　Ⅳ．①O13　②O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 124256 号

策划编辑	兰莹莹	**责任编辑**	董达英	**封面设计**	于　涛
责任绘图	郝　林	**版式设计**	王艳红	**责任校对**	王效珍
责任印制	毛斯璐				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	2006 年 5 月第 1 版 2010 年 8 月第 2 版
开　　本	787×960　1/16		
印　　张	13.75	**印　　次**	2010 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	250 000	**定　　价**	18.50 元

物料号　30082-00

《大学数学》系列教材编委会

第二版前言

《大学数学》系列教材面世已经 5 年了。在此期间，有不少高校同行在使用本系列教材的过程中提出了许多宝贵意见，结合过去 5 年我们使用本系列教材的教学实践经验和近几年大学数学课程改革的一些新动态，编委会决定对本系列教材进行修订、完善。

这次习题课教程修订的指导思想是：1. 与主教材紧密配合，通过习题课的讲解和练习，使读者进一步加深对课程内容的理解；2. 基本按习题课的学时安排编写每一讲，教师也可根据教学情况进行调整；3. 习题的难易搭配适中。

本书密切配合《大学数学 —— 随机数学》(第二版)，共分十讲，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及样本函数的分布、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析与正交试验设计；书末附综合练习题及其参考答案。全书内容充实，题型全面，各讲首先概括主要内容，继而进行例题选讲，最后配有练习题及参考答案。本书总结学习规律，解决疑难问题，提示注意事项，特别注重提高学生分析问题、解决问题的能力。

本书第一、二、九、十讲由孙毅编写，第三、六、八讲及综合练习题由张旭利编写，第四、五、七讲由高彦伟编写，最后由孙毅统审、定稿。

在本书的修订过程中，得到了吉林大学数学学院和高等教育出版社数学分社的大力支持和帮助，吴晓俐女士承担了本系列教材的编务工作，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中会有错误和不当之处，敬请读者批评指正。

《大学数学》系列教材编委会

2010 年 3 月

第一版前言

大学数学习题课教程系列教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学》的配套教材。本套教材分两册:《微积分习题课教程》和《线性代数与随机数学习题课教程》,每册分上、下两篇。《微积分习题课教程》的上篇为一元微积分,下篇为多元微积分。《线性代数与随机数学习题课教程》的上篇为线性代数,下篇为随机数学。

大学数学习题课教程系列教材借鉴了国内外同类教材的精华,汲取了当前教学改革和教学研究的最新成果,是针对非数学类专业理工科大学生的基础数学基本要求编写的。本教材密切配合大学数学系列教材,注意时代的特征和学生的特点,本着“加强基础、强化应用、整体优化、注重后效”的原则,力争做到科学性、系统性与可行性的统一。其特点是:体现了现代数学思想与方法,解决疑难问题,总结学习规律,提示注意事项,特别注重培养学生分析问题、解决问题的能力。本教材可作为高等学校非数学类理工科各专业学生学习数学的辅助教材或参考书。本教材内容充实,每章配有综合练习及参考答案与提示。参考答案与提示只是作为一种参考提供给读者。

《线性代数与随机数学习题课教程》上篇共九章,第一、二、三章由赵玉娟编写,第四、五章由李宾编写,第六、七章由谢敬然编写,第八、九章由黄万风编写;上篇由黄万风统审、定稿。下篇共九章,第十、十一章由孙毅编写,第十二、十五章由李忠范编写,第十三、十四章由高彦伟编写,第十六、十七、十八章由郑文瑞编写;下篇由李忠范统审、定稿。在《大学数学习题课教程》的编写过程中,得到了吉林大学教务处和数学学院的大力支持,青年教师孙鹏、任长宇及研究生王军林、姜政毅、徐忠海、高懿、陈明杰、杨旭辉、朱复康完成了本套教材的排版制图工作,在此一并致谢。编者要特别感谢高等教育出版社数学分社的领导和编辑们,他们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持。

由于我们水平有限,书中会有错误和不妥之处,恳请广大读者批评指正。

编　者

2006 年 5 月

目　　录

第一讲　随机事件及其概率

内 容 提 要

1.　随机事件, 事件间的关系与运算

1.1　随机试验　在一定条件下可能出现也可能不出现的现象称为随机现象. 对随机现象的观测称为试验. 如果试验满足下列条件:

(1) 可重复性　试验可以在相同条件下重复进行多次, 甚至进行无限多次;

(2) 可观测性　每次试验的所有可能结果都是明确的、可以观测的, 并且试验的可能结果有两个或两个以上;

(3) 随机性　每次试验出现的结果是不确定的, 在试验之前无法预先确定究竟会出现哪一个结果,

则称之为随机试验, 简称为试验, 用字母 E 表示.

1.2　样本空间与样本点　试验所有可能结果构成的集合称为样本空间, 常用 Ω 表示. 样本空间的元素, 即试验的每个可能结果称为样本点, 常用 ω 表示. 即 $\Omega=\{\omega\}$.

1.3　随机事件　试验 E 的样本空间的子集称为试验 E 的随机事件, 简称为事件, 常用字母 A、B、C 表示. 当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时, 称事件 A 发生. 由一个样本点构成的事件称为基本事件.

1.4　事件的关系及运算

(1) 包含　若事件 A 发生, 一定导致事件 B 发生, 则称事件 B 包含事件 A, 记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

(2) 相等　若两事件 A 与 B 相互包含, 则称事件 A 与 B 相等, 记作 $A=B$.

(3) 和事件　"事件 A 与事件 B 中至少有一个发生" 这一事件称为 A 与 B 的和事件, 记作 $A\cup B$; "n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一事件发生" 这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和, 记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ (简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$).

(4) 积事件　"事件 A 与 B 同时发生" 这一事件称为 A 与 B 的积事件, 记作 $A\cap B$ (或 AB); "n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生" 这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$

的积事件, 记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ (简记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$).

(5) 互不相容 若事件 A 与 B 不能同时发生, 即 $AB=\varnothing$, 则称事件 A 与 B 互不相容 (或互斥).

(6) 对立事件 若事件 A 与 B 互不相容, 且它们中必有一事件发生, 即 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$, 称 A 与 B 是对立的. 事件 A 的对立事件记作 $\overline{A}$.

(7) 差事件 "事件 A 发生且事件 B 不发生", 称这一事件为事件 A 与 B 的差事件, 记作 $A\backslash B$.

(8) 事件间的运算规律

交换律 $A\cup B=B\cup A,\ AB=BA.$

结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\ (AB)C=A(BC).$

分配律 $A(B\cup C)=(AB)\cup(AC), A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C).$

对偶律 (德摩根律) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}.$

2. 概率的定义与性质

2.1 概率的定义 设随机试验 E 的样本空间为 Ω, 如果对于 E 的每一个事件 A, 有唯一的实数 $P(A)$ 和它对应, 并且这个事件的函数 $P(A)$ 满足以下条件:

(1) 非负性 对于任一事件 A, 有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性 对于必然事件 Ω, 有 $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性 对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots$(即当 $i\neq j$ 时, 有 $A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\cdots$), 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

2.2 概率的性质

(1) 不可能事件的概率为零, 即 $P(\varnothing)=0$.

(2) 对于任意事件 $A, 0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(3) 有限可加性 设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(4) 对于任意事件 A, 有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(5) 减法公式 若 $A\subset B$, 则有 $P(A)\leqslant P(B)$, 且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$. 对于任意两个事件 A, B 有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB).$$

(6) 加法公式　对于任意两个事件 A, B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

一般地, 对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

2.3　古典概型　如果随机试验具有以下两个特点:

(1) 试验的样本空间只包含有限个样本点;

(2) 在试验中每个基本事件发生的可能性相同, 则称这种试验为古典概型或等可能概型.

在古典概型中, 事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所含样本点的总数}} = \frac{n_A}{n}.$$

2.4　几何概率　若试验是将一个点随机投到某一个区域 Ω 内, 而这个点落到 Ω 内任意两个度量相等的子区域内的可能性相同, 则这样的试验属于几何概型.

在几何概型中, 事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}}.$$

2.5　条件概率　设 A, B 为试验 E 的任意两个事件, $P(A) \neq 0$, 则称 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率, 记为 $P(B|A)$.

3.　常用计算概率的公式

3.1　乘法公式　对于事件 A 和 B, 如果 $P(A) \neq 0$, 则有 $P(AB) = P(A)P(B|A)$. 如果 $P(B) \neq 0$, 则有 $P(AB) = P(B)P(A|B)$.

一般地, 当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$ 时, 有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

3.2　全概率公式　如果事件组 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 Ω 的完备事件组, 且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则对于任一事件 A, 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i).$$

3.3 贝叶斯 (Bayes) 公式 在全概率公式的条件下, 如果 $P(A)>0$, 则有

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)},j=1,2,\cdots,n,$$

此式称为贝叶斯公式.

4. 事件的独立性与伯努利概型

4.1 事件的独立性 如果两个事件 A 和 B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$, 则称事件 A 和事件 B 是相互独立的. 如果 $P(A)>0$, 则事件 A 和事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$.

(1) 若事件 A 与事件 B 相互独立, 则事件 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都相互独立.

(2) 对于 $n(n>2)$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 如果任意两个事件 A_i 和 $A_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$ 都相互独立, 则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立, 如果 n 个事件中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件的积事件的概率等于这 k 个事件概率的积, 则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

4.2 独立重复试验 在多次试验中, 如果各次试验的事件相互独立, 且同一事件在各次试验中发生的概率相同, 则称这些试验是相互独立的.

4.3 伯努利概型 设试验 E 只有两个结果 A 和 $\overline{A}$, 且 $P(A)=p\ (0<p<1)$. 将试验 E 独立地重复进行 n 次, 称其为 n 重伯努利 (Bernoulli) 试验, 这种数学模型称为伯努利概型. 在 n 重伯努利试验中, 事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n,$$

此公式称为二项概率公式.

例 题 解 析

【例 1】 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 将一枚硬币掷三次, 观察其正面与反面出现的情况;

(2) 同时掷三颗骰子, 观察三颗骰子的点数之和;

(3) 生产产品直到有 10 件正品为止, 观察生产产品的总件数;

(4) 从一批灯泡中抽取一个灯泡, 测试它的寿命, 设 t 为它的使用寿命;

(5) 对某工厂出厂的产品进行检验, 合格的记上 “正品”, 不合格的记上 “次品”, 如果连续查出两个次品则停止检查, 或者检查了四个产品就停止检查, 观察检查的结果.

【解】 (1) $\Omega=\{\omega_{000},\omega_{001},\omega_{010},\omega_{011},\omega_{100},\omega_{101},\omega_{110},\omega_{111}\}$, 其中 w_{000} 表示三次均出现正面; ω_{101} 表示第一次出现反面, 第二次出现正面, 第三次出现反面, 其余以此类推.

(2) $\Omega=\{3,4,5,\cdots,18\}$.

(3) $\Omega=\{10,11,12,\cdots\}$.

(4) $\Omega=\{t|t\geqslant 0\}$.

(5) $\Omega=\{00,100,0100,0101,0110,1100,1010,1011,0111,1101,1110,1111\}$. 其中 0 表示取出的产品是次品,1 表示取出的产品是正品.

【例 2】 对某目标进行三次射击, 以 A_i 表示事件“第 i 次击中目标” ($i=1,2,3$), 试用 A_i 的运算表示下列事件:

(1) 只有第一次击中目标;

(2) 至少有一次击中目标;

(3) 只有两次击中目标;

(4) 至少有两次击中目标;

(5) 最多有两次击中目标;

(6) 三次全部击中目标;

(7) 三次都没有击中目标.

【解】 (1) $A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$ 也可写成 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

(2) 由事件的和的定义可知, “至少有一次击中目标” 可表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$, 或者由于 “至少有一次击中目标” 是 “三次都没有击中目标的逆事件”. 从而又可写成 $\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3}$.

(3) $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

(4) $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

(5) “最多有两次击中目标” 也可叙述成 “至少有一次没有击中目标” 可表示为 $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$, 或者该事件的对立事件是 “三次都击中目标”, 故又可表示为 $\overline{A_1A_2A_3}$.

(6) $A_1A_2A_3$.

(7) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或者 $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$.

【例 3】 设 A,B 是任意两个随机事件, 则 $P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=$ ________.

【分析】 应先利用事件的运算规律化简所讨论的复杂事件. 由

$$(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})=\left[(\overline{A}A)\cup B\right]\left[\overline{A}A\cup\overline{B}\right]$$
$$=(\varnothing\cup B)(\varnothing\cup\overline{B})=B\overline{B}=\varnothing,$$

所以, 所求概率为 0.

【答】 填 0.

【例 4】 已知 $A \subset B, AC = \varnothing, P(A) = 0.2, P(B) = 0.4, P(C) = 0.3, P(BC) = 0.1$, 计算:

(1) $P(A - B)$; (2) $P(B - A)$; (3) $P(B \cup C)$;

(4) $P(A \cup C)$; (5) $P(B - C - A)$; (6) $P[\overline{A}(C - B)]$.

【解】 (1) $P(A - B) = P(\varnothing) = 0$.

(2) $P(B - A) = P(B) - P(A) = 0.4 - 0.2 = 0.2$.

(3) $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC) = 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.6$.

(4) $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(AC) = 0.2 + 0.3 - 0 = 0.5$.

(5) $P(B - C - A) = P(B) - P(BC) - P(A) = 0.4 - 0.1 - 0.2 = 0.1$.

这里要注意到由 $AC = \varnothing, A \subset \overline{C}$, 而 $A \subset B$, 所以 $A \subset B\overline{C} = B - C$, 即有 $P(B - C - A) = P(B - C) - P(A)$.

(6) 由于 $AC = \varnothing, \overline{A} \supset C \supset C - B$, 有 $\overline{A}(C - B) = C - B$, 所以

$$P[\overline{A}(C - B)] = P(C - B) = P(C) - P(BC) = 0.3 - 0.1 = 0.2.$$

【例 5】 设 A, B, C 是三个随机事件, 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = 0.3$, $P(AB) = 0.2, P(BC) = P(CA) = 0$, 试求:

(1) A, B, C 同时发生的概率;

(2) A, B, C 至少有一个发生的概率;

(3) A, B, C 全不发生的概率.

【解】 (1) 由 $P(BC) = 0, ABC \subset BC, P(ABC) \leqslant P(BC)$, 所以, $P(ABC) = 0$.

(2)
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC) \\ &= 0.3 + 0.3 + 0.3 - 0.2 \\ &= 0.7. \end{aligned}$$

(3) $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0.7 = 0.3$.

【例 6】 设事件 A, B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别是 0.4, 0.3 和 0.6. 则 $P(A\overline{B}) =$ ______.

【分析】 利用加法公式先求 $P(AB)$. 由于

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.4 + 0.3 - 0.6 = 0.1,$$

所以

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3.$$

【答】 应填 0.3.

【例 7】 设 $P(A)=a, P(B)=0.3, P(\overline{A}\bigcup B)=0.7$, 试问:

(1) 若事件 A 与 B 不相容, a 应取何值?

(2) 若事件 A 与 B 相互独立, a 应取何值?

【解】 由于

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cup B)&=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)\\&=P(\overline{A})+P(B)-(P(B)-P(AB))\\&=1-P(A)+P(AB).\end{aligned}$$

再由已知, 有 $0.7=1-a+P(AB)$.

(1) 若 A 与 B 互不相容, 则 $AB=\varnothing, P(AB)=0$, 即 $0.7=1-a+0$, 得 $a=0.3$.

(2) 若 A 与 B 相互独立, 则 $P(AB)=P(A)P(B)=0.3a$. 即, $0.7=1-a+0.3a$, 得 $a=\dfrac{3}{7}$.

【例 8】 一个寝室中有 6 名学生, 问:

(1) 6 人的生日都在星期天的概率是多少?

(2) 6 人的生日都不在星期天的概率是多少?

(3) 6 人的生日不都在星期天的概率是多少?

【解】 设 "6 人的生日都在星期天" 为事件 A, 则 "6 人的生日不都在星期天为 $\overline{A}$, 又设 "6 人的生日都不在星期天" 为事件 B. 因为每一人的生日可在一个星期的 7 天中的任何一天, 且是等可能的, 于是基本事件总数为 7^6.

(1) $P(A)=\dfrac{1}{7^6}$(A 包含的基本事件数为 1).

(2) 6 个人的生日都不在星期天, 每个人的生日就只能在星期一到星期六之间的任一天, 因此 B 包含的基本事件个数为 6^6, 故 $P(B)=\dfrac{6^6}{7^6}=\left(\dfrac{6}{7}\right)^6$.

(3) $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\left(\dfrac{1}{7}\right)^6$.

【例 9】 将 3 个球随机地放入 4 只杯中, 求杯子中球的最多个数分别为 1, 2, 3, 4 的概率.

【解】 依题意知, 样本空间包含样本点的总数为 4^3 个.

以 A_i $(i=1,2,3,4)$ 表示事件 "杯子中球的最多个数为 i", 则 A_1 表示每只杯中最多放一个球, 共 P_4^3 种放法, 故

$$P(A_1)=\frac{\mathrm{P}_4^3}{4^3}=\frac{6}{16}.$$

A_2 表示从 3 个球中任取 2 个放入 4 只杯中的任意一只, 剩下的一个球放入其余的 3 只杯中的任一只, 总放法为 $\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}_4^1\cdot\mathrm{C}_3^1$ 种, 故

$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}_4^1\cdot\mathrm{C}_3^1}{4^3}=\frac{9}{16}.$$

A_3 表示 3 个球放在同一只杯中, 共有 C_4^1 种放法, 故

$$P(A_3)=\frac{\mathrm{C}_4^1}{4^3}=\frac{1}{16}.$$

$$P(A_4)=P(\varnothing)=0.$$

【例 10】 把 n 个不同的球随机地投入 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中, 试求:

(1) 指定的 n 个盒子中各有一个球的概率;

(2) 任意 n 个盒子中各有一个球的概率.

【解】 把 n 个不同的球随机地投入到 N 个盒子中, 因为每个球有 N 个投法, 据乘法原理, 共有 N^n 种不同的投法. 且是等可能的.

(1) 设 A 表示事件 "指定的 n 个盒子中各有一球", 则 A 中包含的基本事件数即 n 个不同元素的全排列数, 共有 $n_A=\mathrm{P}_n^n=n!$ 个, 因此

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) 设 B 表示 "任意 n 个盒子中各有一球". 因为不指定哪 n 个盒子, 首先从 N 个盒子中任取 n 个盒子, 共有 C_N^n 种取法. 然后再求取出的这 n 个盒子中, 每个盒子里有一个球包含的基本事件数, 由 (1) 可知有 $n!$ 个, 据乘法原理知 $n_B=\mathrm{C}_N^n n!$, 因此

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_N^n n!}{N^n}=\frac{\mathrm{P}_N^n}{N^n}.$$

【例 11】 自 $1,2,3,\cdots,9$ 这 9 个数中随机地取出一个数, 取后放回, 连续取 n 次, 求取到的 n 个数之积能被 10 整除的概率.

【分析】 如果直接求解, 则很繁琐, 若能求出逆事件的概率, 再利用概率的性质计算就会容易得多, 其他问题也常采取这种方法.

【解】 试验的每个结果对应一个从 9 个元素中允许重复的取 n 个元素的排列, 因此基本事件总数为 9^n.

设 A 表示事件"取出的 n 个数之积能被 10 整除", 则 $\overline{A}$ 表示事件"取出的 n 个数之积不能被 10 整除". 由于 $10 = 2 \times 5$, 因此可把 $\overline{A}$ 分成两个事件的和.

设 B 表示事件"取出的 n 个数中不含 5"; C 表示"取出的 n 个数中必含 5, 但不含 2, 4, 6, 8 中任何一个", 则 B 与 C 是互不相容的, 且 $\overline{A} = B \cup C$.

B 包含的基本事件, 即由 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 这 8 个数中允许重复取 n 个的排列, 共有 8^n 个, 因此

$$P(B) = \frac{8^n}{9^n}.$$

C 包含的基本事件是由 1, 3, 5, 7, 9 这 5 个数中允许重复取 n 个数的排列, 共有 5^n 个, 再减去由 1, 3, 7, 9 这 4 个数中允许重复取 n 个的排列数 4^n 个, 得 $5^n - 4^n$ 个, 因此

$$P(C) = \frac{5^n - 4^n}{9^n},$$

故

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \\ &= 1 - P(B \cup C) \\ &= 1 - P(B) - P(C) \\ &= 1 - \frac{8^n}{9^n} - \frac{5^n - 4^n}{9^n} \\ &= 1 - \frac{8^n + 5^n - 4^n}{9^n}. \end{aligned}$$

【例 12】 从 5 双不同的手套中任取 4 只, 这 4 只手套中至少有 2 只手套配成一双的概率是多少?

【分析】 设 A 表示事件"取出的 4 只手套至少有 2 只手套配成一双", 则 $\overline{A}$ 表示"4 只手套中没有 2 只配成一双". 本题有多种解法.

【解法 1】 5 双手套中任取 4 只共有 $C_{10}^4 = 210$ 种取法, 且为等可能的. 先考虑 $\overline{A}$ 包含的基本事件数. 为使取出的 4 只手套中没有 2 只能配成一双的, 我们先从 5 双手套中任取 4 双, 然后从取出的 4 双手套中各取一只, 共有 $C_5^4 2^4 = 80$ 种取法, 于是

$$P(\overline{A}) = \frac{80}{210} = \frac{8}{21},$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{8}{21} = \frac{13}{21}.$$

【解法 2】 5 双手套中任取 4 只有 $C_{10}^4 = 210$ 种取法, 且是等可能的. 为使取出的 4 只中至少有 2 只能配成一双. 我们先从 5 双手套中取 1 双, 再从剩