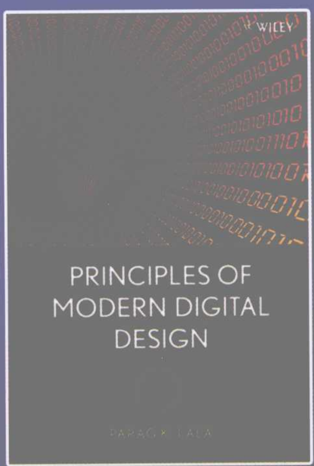
国外电子与通信教材系列

WILEY

现代数字设计与VHDL

Principles of Modern Digital Design



[美] Parag K. Lala 著
乔庐峰 尹廷辉 董时华 等译

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

国外电子与通信教材系列

现代数字设计与 VHDL

Principles of Modern Digital Design

[美] Parag K. Lala 著

乔庐峰 尹廷辉 董时华 等译

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书涵盖了现代数字设计课程的所有主要主题，其特色在于先介绍数字设计的基本知识，再介绍 VHDL 语言，从而使学生更好地理论联系实际，学好数字设计课程。本书的另一个特色是，介绍了计算机辅助化简、多级逻辑设计和状态赋值等 CAD 工具中使用的技术。全书共分为 10 章，主要介绍数制、数字逻辑的基本概念、组合逻辑电路、同步时序电路原理与设计、组合逻辑电路原理与设计、计数器设计、各种逻辑电路的 VHDL 设计等。

本书可作为电气/计算机工程和计算机科学专业本科生的教材，也可作为电气工程师的自学教材。

Parag K. Lala: Principles of Modern Digital Design.

ISBN: 978-0-470-07296-7

版权贸易合同登记号　图字：01-2009-3381

图书在版编目(CIP)数据

现代数字设计与 VHDL/(美)拉拉(Lala, P. K.)著；乔庐峰等译. —北京：电子工业出版社，2010.7

(国外电子与通信教材系列)

书名原文：Principles of Modern Digital Design

ISBN 978-7-121-11179-2

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①拉… ②乔… Ⅲ. ①数字电路－电路设计－高等学校－教材②硬件描述语言，VHDL－程序设计－高等学校－教材 Ⅳ. ①TN79②TP312

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 117284 号

策划编辑：马　岚

责任编辑：史　平　　特约编辑：王　崧

印　　刷：北京丰源印刷厂

装　　订：涿州市桃园装订有限公司

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036

开　　本：787×1092　1/16　印张：19.5　字数：499 千字

印　　次：2010 年 7 月第 1 次印刷

定　　价：38.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

序

2001年7月间，电子工业出版社的领导同志邀请各高校十几位通信领域方面的老师，商量引进国外教材问题。与会同志对出版社提出的计划十分赞同，大家认为，这对我国通信事业、特别是对高等院校通信学科的教学工作会很有好处。

教材建设是高校教学建设的主要内容之一。编写、出版一本好的教材，意味着开设了一门好的课程，甚至可能预示着一个崭新学科的诞生。20世纪40年代MIT林肯实验室出版的一套28本雷达丛书，对近代电子学科、特别是对雷达技术的推动作用，就是一个很好的例子。

我国领导部门对教材建设一直非常重视。20世纪80年代，在原教委教材编审委员会的领导下，汇集了高等院校几百位富有教学经验的专家，编写、出版了一大批教材；很多院校还根据学校的特点和需要，陆续编写了大量的讲义和参考书。这些教材对高校的教学工作发挥了极好的作用。近年来，随着教学改革不断深入和科学技术的飞速进步，有的教材内容已比较陈旧、落后，难以适应教学的要求，特别是在电子学和通信技术发展神速、可以讲是日新月异的今天，如何适应这种情况，更是一个必须认真考虑的问题。解决这个问题，除了依靠高校的老师和专家撰写新的符合要求的教科书外，引进和出版一些国外优秀电子与通信教材，尤其是有选择地引进一批英文原版教材，是会有好处的。

一年多来，电子工业出版社为此做了很多工作。他们成立了一个“国外电子与通信教材系列”项目组，选派了富有经验的业务骨干负责有关工作，收集了230余种通信教材和参考书的详细资料，调来了100余种原版教材样书，依靠由20余位专家组成的出版委员会，从中精选了40多种，内容丰富，覆盖了电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等方面，既可作为通信专业本科生和研究生的教学用书，也可作为有关专业人员的参考材料。此外，这批教材，有的翻译为中文，还有部分教材直接影印出版，以供教师用英语直接授课。希望这些教材的引进和出版对高校通信教学和教材改革能起一定作用。

在这里，我还要感谢参加工作的各位教授、专家、老师与参加翻译、编辑和出版的同志们。各位专家认真负责、严谨细致、不辞辛劳、不怕琐碎和精益求精的态度，充分体现了中国教育工作者和出版工作者的良好美德。

随着我国经济建设的发展和科学技术的不断进步，对高校教学工作会不断提出新的要求和希望。我想，无论如何，要做好引进国外教材的工作，一定要联系我国的实际。教材和学术专著不同，既要注意科学性、学术性，也要重视可读性，要深入浅出，便于读者自学；引进的教材要适应高校教学改革的需要，针对目前一些教材内容较为陈旧的问题，有目的地引进一些先进的和正在发展中的交叉学科的参考书；要与国内出版的教材相配套，安排好出版英文原版教材和翻译教材的比例。我们努力使这套教材能尽量满足上述要求，希望它们能放在学生们的课桌上，发挥一定的作用。

最后，预祝“国外电子与通信教材系列”项目取得成功，为我国电子与通信教学和通信产业的发展培土施肥。也恳切希望读者能对这些书籍的不足之处、特别是翻译中存在的问题，提出意见和建议，以便再版时更正。

吴佑寿

中国工程院院士、清华大学教授

“国外电子与通信教材系列”出版委员会主任

出 版 说 明

进入21世纪以来，我国信息产业在生产和科研方面都大大加快了发展速度，并已成为国民经济发展的支柱产业之一。但是，与世界上其他信息产业发达的国家相比，我国在技术开发、教育培训等方面都还存在着较大的差距。特别是在加入WTO后的今天，我国信息产业面临着国外竞争对手的严峻挑战。

作为我国信息产业的专业科技出版社，我们始终关注着全球电子信息技术的发展方向，始终把引进国外优秀电子与通信信息技术教材和专业书籍放在我们工作的重要位置上。在2000年至2001年间，我社先后从世界著名出版公司引进出版了40余种教材，形成了一套“国外计算机科学教材系列”，在全国高校以及科研部门中受到了欢迎和好评，得到了计算机领域的广大教师与科研工作者的充分肯定。

引进和出版一些国外优秀电子与通信教材，尤其是有选择地引进一批英文原版教材，将有助于我国信息产业培养具有国际竞争能力的技术人才，也将有助于我国国内在电子与通信教学工作中掌握和跟踪国际发展水平。根据国内信息产业的现状、教育部《关于“十五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》的指示精神以及高等院校老师们反映的各种意见，我们决定引进“国外电子与通信教材系列”，并随后开展了大量准备工作。此次引进的国外电子与通信教材均来自国际著名出版商，其中影印教材约占一半。教材内容涉及的学科方向包括电路理论与应用、信号与系统、数字信号处理、微电子、通信系统、电磁场与微波等，其中既有本科专业课程教材，也有研究生课程教材，以适应不同院系、不同专业、不同层次的师生对教材的需求，广大师生可自由选择和自由组合使用。我们还将与国外出版商一起，陆续推出一些教材的教学支持资料，为授课教师提供帮助。

此外，“国外电子与通信教材系列”的引进和出版工作得到了教育部高等教育司的大力支持和帮助，其中的部分引进教材已通过“教育部高等学校电子信息科学与工程类专业教学指导委员会”的审核，并得到教育部高等教育司的批准，纳入了“教育部高等教育司推荐——国外优秀信息科学与技术系列教学用书”。

为做好该系列教材的翻译工作，我们聘请了清华大学、北京大学、北京邮电大学、南京邮电大学、东南大学、西安交通大学、天津大学、西安电子科技大学、电子科技大学、中山大学、哈尔滨工业大学、西南交通大学等著名高校的教授和骨干教师参与教材的翻译和审校工作。许多教授在国内电子与通信专业领域享有较高的声望，具有丰富的教学经验，他们的渊博学识从根本上保证了教材的翻译质量和专业学术方面的严格与准确。我们在此对他们的辛勤工作与贡献表示衷心的感谢。此外，对于编辑的选择，我们达到了专业对口；对于从英文原书中发现的错误，我们通过与作者联络、从网上下载勘误表等方式，逐一进行了修订；同时，我们对审校、排版、印制质量进行了严格把关。

今后，我们将进一步加强同各高校教师的密切关系，努力引进更多的国外优秀教材和教学参考书，为我国电子与通信教材达到世界先进水平而努力。由于我们对国内外电子与通信教育的发展仍存在一些认识上的不足，在选题、翻译、出版等方面的工作中还有许多需要改进的地方，恳请广大师生和读者提出批评及建议。

电子工业出版社

教材出版委员会

译 者 序

本书是 Parag K. Lala 博士编写的一本介绍现代数字设计基本原理与 VHDL 基本语法知识的教材。受电子工业出版社委托，我们对该书进行了翻译，目的是为我国蓬勃发展的信息与电子技术专业人才培养提供可直接使用的教材。

与常见的相关教材相比，本书有明显的不同，主要表现在以下三个方面。

第一，本书的章节结构比较合理。目前的一些教材在学生很好地掌握数字设计基础知识之前就介绍了 VHDL，但本书作者认为 VHDL 是一种用于描述数字电路/系统功能的语言，只有在学生充分掌握了数字设计的基础知识后，再学习该语言才能更有效地发挥其作用。因此本书先介绍了数字逻辑设计的一些重要基础知识之后，才引入 VHDL。

第二，对当前本科生教材中很少涉及或根本没有涉及的计算机辅助设计(CAD)工具中所使用的技术，如计算机辅助化简、多级逻辑设计和状态分配等，进行了清晰的讲解，这有助于帮助读者为今后的设计实践打下坚实的理论基础和增强解决复杂问题的能力。

第三，注重实践。本书给出了大量的例题，一部分例题用于帮助读者理解较为抽象的原理知识；另有大量的例题与实际应用结合紧密，读者可以直接参考并应用到设计实践中。

在本书翻译过程中，解放军理工大学通信工程学院的董时华、王晓和牛燚坤分别对第 1 章至第 4 章、第 5 章至第 6 章和第 7 章至第 10 章进行了初步翻译，乔庐峰和尹廷辉对全部译文进行了整理校对，并参阅大量相关资料对重点和难点内容进行了反复修改完善。

鉴于译者水平有限，译文中难免有错误之处，敬请读者批评指正。

前　言

本书涵盖了现代数字设计课程的所有重要主题。尽管目前关于数字设计的教材有很多，且其中一些教材在学生很好地掌握数字设计基础之前就介绍了 VHDL，但作者认为 VHDL 是一种用于描述数字电路/系统功能的语言，只有在学生充分掌握了数字设计的基础知识后再学习该语言才能更有效地发挥其作用。因此，在本书中，我们对 VHDL 的介绍是在讲解了组合电路设计并探讨了时序电路的基本概念后才进行的。

现代数字系统的复杂性在于，必须使用计算机辅助设计（CAD）工具对其进行综合和化简。然而，很多 CAD 工具中所使用的技术，如计算机辅助化简、多级逻辑设计和状态分配等在当前的本科生教材中通常很少涉及或根本没有涉及。在本书中的相应章节中，对这些重要技术的基本概念进行了介绍。尽管这些概念较为抽象，使得一些理论性较强的讨论和分析不可避免，但本书仍然尽量以一种简明教程的风格对其加以组织。这样做的目的并不是试图回避抽象的理论知识，而是希望通过大量的示例使理论知识更加清晰和易于接受，以便于读者为设计实践打下坚实的基础。

全书共分为 10 章。

第 1 章介绍了数的表示及各种数制，还介绍了二进制数的运算，如加法、减法、乘法和除法。

第 2 章介绍离散数学的一些基本知识，以便为理解后续章节奠定基础。此外，还探讨了用于构建数字逻辑电路的各种逻辑门的运算关系和特点。

第 3 章深入探讨了组合逻辑电路的分析、化简和设计技术。介绍了布尔函数的立方图表示方法和重言式的概念。使用大量实例说明了启发式化简的原理、不同类型的无关项以及多级逻辑综合的原理。详细介绍了 BCD 加法/减法算法和进位保存加法算法。全面详细分析了包括 BCD 加/减算法、进位存储加法、乘法、除法在内的常用算术运算电路的原理与电路结构。此外还探讨了使用可编程逻辑器件（PLD）实现组合逻辑功能的问题。

第 4 章介绍时序电路的基本概念。分析了数字电路中存储元件的功能。介绍了使用状态图和状态表来描述时序电路功能的方法。此外，从概念上清晰说明了同步时序电路和异步时序电路的差异。

业界通常使用像 VHDL 这样的硬件描述语言来描述数字电路的功能。第 5 章详细介绍了 VHDL 语言，通过本章的学习，读者可以编写 VHDL 代码来描述数字电路的功能。本章给出了一些例题来介绍使用 VHDL 描述数字电路功能的方法。本章并不是 VHDL 的完整指南，近年来已出版了许多专门介绍 VHDL 的教材。

基于前面各章，第 6 章主要探讨了如何采用 VHDL 进行有效的组合逻辑电路设计。本章给出了多个完整设计的 VHDL 代码，这些代码均使用 Altera 公司的 Quartus II 软件包进行了编译和综合。

第 7 章介绍如何使用基本的电路单元（如锁存器和触发器）来设计时序电路，这里没有给出这些电路的严格数学表示。探讨了一些当前流行的计算机辅助状态分配技术中使用的算

法。详细探讨了分割代数在状态分配中的应用。本章还详细讨论了使用 PLD 来实现时序电路的方法。

第 8 章对计时器进行了重点介绍。在许多数字系统中,计时器都被广泛应用。本章给出了几个设计示例及其详细说明,以便清晰准确地给出不同类型计时器的设计方法和特点。

第 9 章给出了使用 VHDL 进行时序电路设计的方法。时序电路的代码风格不同于组合电路。组合电路通常使用并发 VHDL 语句,而时序电路主要使用顺序 VHDL 语句。本章给出了多个使用 VHDL 设计时序电路的代码实例,这些代码已使用 Quartus II 进行了编译和综合。

第 10 章介绍了传统的异步时序电路的设计原理。通过多个例题说明了竞争和冒险的概念,探讨了避免这些问题的状态分配技术。

目前,现代数字系统多使用 CMOS 工艺实现,因此附录中简要介绍了 CMOS 工艺下常用逻辑门的电路结构。

本书可作为电气/计算机工程和计算机科学专业本科生的教材,也可作为电气工程师的自学教材。学习本书并不要求学生预先掌握电子学的相关知识,仅要求学生具有基本的相关数学基础。

本书内容较为丰富,教师可以根据自己的教学需要来选择所讲授的内容。

感谢 Tufts 大学电气与计算机工程系的 Karen Panetta 博士,感谢他的建设性意见及允许我使用其 VHDL 实验课程中的习题。感谢过去几年来我教过的许多学生,在撰写本书时,我参考了他们的一些课程设计项目。

感谢我的妻子 Meena,在本书的编写过程中,我一直得到了她的支持。最后,感谢我的孩子 Nupur 和 Kunal,感谢他们的鼓励。

Parag K. Lala

目　　录

第1章　进制和二进制编码

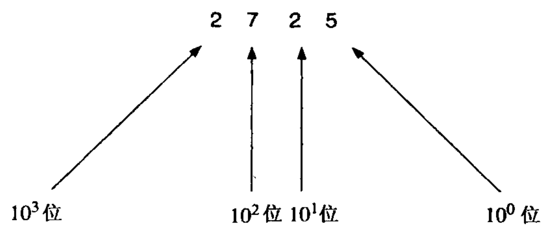
1.1　前言

通常，普通算术采用的进制使用0～9共10个数字。然而，计算机及其他数字系统的算术和逻辑电路只对0与1进行处理，要设计具有10种不同状态的逻辑电路是非常困难的。只有0和1两种符号的进制称为二进制(binary)。目前，尽管数字系统内部操作使用二进制，但人与机器交互时，还是希望使用我们熟悉的十进制。此时，采用0,1的二进制数和采用0～9的十进制数存在一一对应的编码关系。本章将介绍进制的一般概念，其中重点介绍二进制。另外，也会涉及八进制和十六进制，以及定点数与浮点数等。本章末尾将讨论十进制数的二进制编码问题。

1.2　十进制

十进制的发明对科学技术的发展曾经起到过至关重要的推动作用。十进制数使用位置计数表示法，每一个数字所代表的数值大小除与数字本身有关外，还与数字所处的位置有关。

基数(radix)是指一种进制所允许使用的符号个数。十进制使用10个符号:0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9。换句话说，它的基数是10，每个位置代表的数值大小是10的幂次。例如，下面是一个四位数2725：



注意，处于10^3位的2和处于10^1位的2所表示的数值不同。十进制的数值由每位数字乘以相应的权，再相加在一起得到。数值2725可以表示成

$$2\times1000+7\times100+2\times10+5\times1=2000+700+20+5$$

这里，5是最低有效位(Least Significant Digit, LSD)，最左边的2是最高有效位(Most Significant Digit, MSD)。

将这种表示方法加以推广:一般而言，在r进制中，基数为r，使用r个不同的符号($0\sim r-1$)，$n+1$位($a_na_{n-1}\cdots a_1a_0$)的数表示为

$$N=a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots+a_1r^1+a_0r^0 \tag{1.1}$$

其中,n的取值为0, 1, 2, 3,…; r表示进制的基数; a是0到$r-1$之间的任何一个数字。

因此，对于十进制数2725，有$a_3=2$, $a_2=7$, $a_1=2$和$a_0=5$。式(1.1)对所有整数有效。对于0到1之间的分数可表示成

$$N = a_{-1}r^{-1} + a_{-2}r^{-2} + \cdots + a_{-n+1}r^{-n+1} + a_{-n}r^{-n} \tag{1.2}$$

因此，十进制分数 0.8125 可表示为

$$\begin{aligned} N &= 0.8000 + 0.0100 + 0.0020 + 0.0005 \\ &= 8 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4} \\ &= a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + a_{-3} \times 10^{-3} + a_{-4} \times 10^{-4} \end{aligned}$$

其中，

$$a_{-1} = 8,\ a_{-2} = 1,\ a_{-3} = 2,\ a_{-1} = 5。$$

1.3 二进制

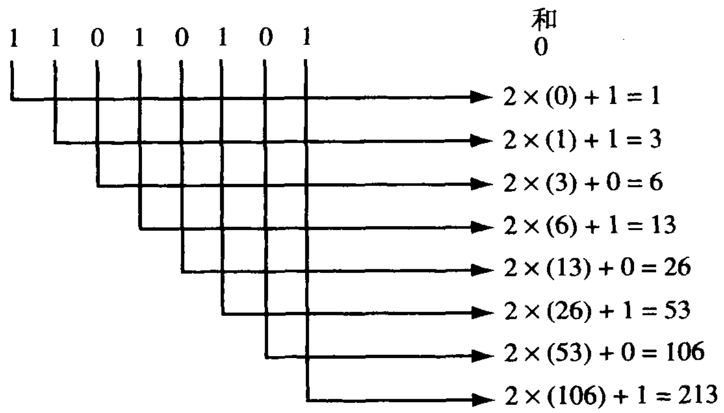
二进制的基数为 2，即 $r=2$，只采用两个数字 0 和 1。与十进制不同的是，二进制每位的权都是 2 的幂次，而十进制每位的权是 10 的幂次。二进制及后面介绍的其他进制，都与我们常常使用的十进制类似。然而，由于人们习惯于使用十进制，因此，必须实现十进制和二进制之间的转换。对应于二进制表示的十进制数值大小由每位数字乘以该位的权(2 的幂次)，并累加起来得到。

例 1.1 将二进制数 101010 转换为对应的十进制数。

$$\begin{aligned} N &= 101010 \\ &= 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \quad [\text{运用式}(1.1)] \\ &= 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 0 \\ &= 42 \end{aligned}$$

另一种将二进制数转换为十进制数的方法是从最高位(最左边一位)开始，逐位进行处理，直到最右边的位。计算时，将十进制初始值置为 0。然后每向低位扩展一位，都用现已求得的和乘以 2，再与它的低位相加。下面举例来说明。

例 1.2 将二进制数 11010101 转换为十进制数，步骤如下：



反过来，将十进制数转换为二进制数时，可以采取逐步分解的方法。首先，将十进制数转换为两个十进制数之和，一个等于 $2n$，它等于或小于并最接近初始的十进制数，另一个为剩余项。如果剩余项不为 0，那么针对剩余项进行类似的分解，直至剩余项为 0。根据分解的结果，就可以得到所需要的二进制数。下面是一个将十进制数转换为二进制数的例子。

例 1.3　将十进制数 426 转换为二进制数。

$$\begin{aligned}426 &= 256+170\\ &= 256+128+42\\ &= 256+128+32+10\\ &= \underset{2^8}{\underset{\uparrow}{256}}+\underset{2^7}{\underset{\uparrow}{128}}+\underset{2^5}{\underset{\uparrow}{32}}+\underset{2^3}{\underset{\uparrow}{8}}+\underset{2^1}{\underset{\uparrow}{2}}\end{aligned}$$

因此，$426_{10}=110101010_2$（下标表示基数）。

与二进制数向十进制数转换类似，十进制数向二进制数转换也还有一种方法。具体做法是：将原始的十进制数除 2 取余，直至相除的最终结果为 0，然后将余数以相反的顺序写出来（即第一个余数置于最右端，构成二进制数的最低有效位），即可得到转换后的二进制数。下面采用这种方法将十进制数 353_{10} 转换为二进制数。

$$\frac{353}{2}=176,\ 余1$$
$$\frac{176}{2}=88,\ 余0$$
$$\frac{88}{2}=44,\ 余0$$
$$\frac{44}{2}=22,\ 余0$$
$$\frac{22}{2}=11,\ 余0$$
$$\frac{11}{2}=5,\ 余1$$
$$\frac{5}{2}=2,\ 余1$$
$$\frac{2}{2}=1,\ 余0$$
$$\frac{1}{2}=0,\ 余1$$

因此，$353_{10}=101100001_2$。

到目前为止，我们仅考虑了整数间的转换，小数转换也可以采用类似的方法得到。

例 1.4　将二进制小数 0.101011 转换为十进制小数。

运用式(1.2)，可得

$$\begin{aligned}N &= 0.101011\\ &= 1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}+0\times2^{-4}+1\times2^{-5}+1\times2^{-6}\end{aligned}$$

其中，$a_{-1}=1$，$a_{-2}=0$，$a_{-3}=1$，$a_{-4}=0$，$a_{-5}=1$，$a_{-6}=1$。

因此，

$$\begin{aligned}N &= 0.101011\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=0.671875\end{aligned}$$

一个十进制小数转换为二进制小数采用的方法是乘 2 取整法。每次相乘产生的乘积的整数部分，无论是 0 还是 1，组合在一起就构成了二进制小数。

例 1.5 将十进制小数 0.203125 转换为二进制小数。

连续将小数部分与 2 相乘，结果为

$$
\begin{array}{rr}
 & 0.203125 \\
 & \underline{\qquad\quad 2} \\
a_{-1}=0 & 0.406250 \\
 & \underline{\qquad\quad 2} \\
a_{-2}=0 & 0.812500 \\
 & \underline{\qquad\quad 2} \\
a_{-3}=1 & 0.625000 \\
 & \underline{\qquad\quad 2} \\
a_{-4}=1 & 0.250000 \\
 & \underline{\qquad\quad 2} \\
a_{-5}=0 & 0.500000 \\
 & \underline{\qquad\quad 2} \\
a_{-6}=1 & 0.000000
\end{array}
$$

因此，十进制小数 0.203125_{10} 的等效二进制数是 0.001101_2。在转换过程中，与 2 相乘的操作要进行到小数部分为 0 为止，或者达到了需要的转换精度也可。如果转换步骤停止过早，可能会带来较大的转换误差。对于上面的转换过程，如果在第 4 步停止转换，得出的转换结果为 0.0011。实际上该值对应的十进制数近似为 0.1875，与原来的数值相比，误差达到 7.7%。

1.3.1 二进制的基本算术运算

二进制算术运算比十进制运算简单得多，只有加法和乘法。二进制加法的运算规则为

$$
\begin{aligned}
0+0&=0\\
0+1&=1\\
1+0&=1\\
1+1&=0 \ (\text{产生进位}1)
\end{aligned}
$$

与十进制加法类似，首先，将加数的最低位与被加数相加，和为运算结果，同时可能产生进位。然后，将高位以及进位相加，直到所有位都完成了加法运算为止。

例 1.6 将十进制数 27 和 28 用二进制形式相加。

十进制	二进制	
27	11011	加数
+28	+11100	被加数
55	110111	和
	11000	进位

为检验结果是否正确，下面将 110111 转换为十进制数：

$$
\begin{aligned}
&1\times 2^5+1\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0\\
&=32+16+0+4+2+1\\
&=55
\end{aligned}
$$

例 1.7 将 -11 和 -19 用二进制形式相加。因其加数与被加数均为负数，则和也为负数。

十进制	二进制	
19	10011	
11	01011	
30	11110	和
	00011	进位

在所有数字系统中，实现二进制加法操作的电路一次只对两个数进行加法运算，如果需要多个数相加，只需将前面两个数相加，结果再与第三个数相加即可。

二进制减法与十进制减法也相似。减数与被减数中的相应位相减，当被减数小于减数时，需要向相邻高位借位，然后进行减法操作。二进制减法满足下列规则：

$$0-0=0$$

$$0-1=1 \quad (\text{向高位借1})$$

$$1-0=1$$

$$1-1=0$$

例 1.8 用二进制形式实现 $27_{10}-21_{10}$。

十进制	二进制	
27	11011	被减数
−21	−10101	减数
6	00110	差
	00100	借位

很容易验证差 00110_2 对应十进制数 6。

例 1.9 计算 $17_{10}-22_{10}$。因被减数比减数小，所以计算结果应为负数。

十进制	二进制	
17	10001	
−22	−10110	
−5	−00101	差
	00001	借位

二进制乘法和十进制乘法相似。在进行乘法运算时，对应位相乘的结果如果大于基数（十进制的基数为 10，二进制的基数为 2），则需要向高位进位，并与高位运算结果相加。二进制只有 0 和 1，故所得结果要么是 0，要么是乘数本身。二进制乘法运算规律为

$$0\cdot 0=0$$

$$0\cdot 1=0$$

$$1\cdot 0=0$$

$$1\cdot 1=1$$

例 1.10 用二进制乘法计算 67×13。

十进制	二进制	
67	1000011	被乘数
×13	1101	乘数
871	1000011	第一个部分积
	0000000	第二个部分积
	1000011	第三个部分积
	1000011	第四个部分积
	1101100111	最终结果

例 1.11 计算 13.5 ×3.25。

```
十进制        二进制
  13.5      1101.10    被乘数
× 3.25        11.01    乘数
------      -------
43.875       110110    第一个部分积
            000000     第二个部分积
           110110      第三个部分积
          110110       第四个部分积
        -----------
        101011.1110    最终结果
```

将最终结果转换为等效的十进制数为 43 +0.50 +0.25 +0.125 =43.875，与十进制乘法结果相同。

二进制除法与十进制除法运算过程相似。但二进制除法要更简单一些，除数与被除数比较时，商只有 0 和 1 两种可能。

例 1.12 计算 101110(46_{10}) ÷111(7_{10})。

```
             0001    商
除数 111 ┌ 101110    被除数
           0111
          ------
            100
```

由于除数 111 比被除数前 3 位(101)大，则商的前 3 位为 0。同时，由于除数小于被除数的前 4 位，所以此时除法运算结果为 1(商的第 4 位为 1)。由于此次运算后的差比除数小，故需要向右扩展一位后重复此类运算：

```
        00011
111  ┌ 101110
        0111
       ------
         1001
          111
       ------
           10
```

1001 与 111 的差值为 10，向右扩展一位：

```
       000110
111  ┌ 101110
        0111
       ------
         1001
          111
       ------
          100    余数
```

扩展后的结果为 100，它小于除数，由于已经达到最低位，除法运算结束。运算后得到的商是 000110，余数是 100。进行十进制运算 4617 得到的商为 6，余数是 4。可以看出，与二进制运算结果是相同的。

通过以上分析和对比发现，二进制的加、减、乘、除运算方法与十进制相同。在数字系统中，实际使用的算术运算方法都需要以上述基本方法为基础进行修改。通过以后的学习大家会发现，这些数字系统通常以加法作为基本算术运算类型，其他的算术运算都是通过调用加法运算来实现的。例如，5 与 4 相乘可以等效为将 5 连续进行 4 次相加。

1.4 八进制

数字系统只能对二进制数执行运算。当数值较大时，需要的二进制数的位数过多，为便于表示，又引入了八进制和十六进制。八进制的基数是 8，使用的符号是 0 ~7。与二进制和十进