算學小叢書

# 代數學——對數及利息算

山根新次郎著
駱師曾譯

商務印書館發行

算學小叢書

# 代數學

對數及[illegible]



山根[illegible]次郎著
駱師曾譯

館發行

中華　十七年四月初版
中華　一年三月國難後第一版
二年十二月國難後第二版

（52578）

算學小叢書　代數學——對數及利息算　一冊

每冊定價大洋伍角　本書[illegible]去[illegible]價二分
外埠酌加運費匯費

原著者　山根新次郎
譯述者　駱師曾
發行兼印刷者　商務印書館　上海河南路
發行所　商務印書館　上海及各埠

B六三八二

# 原 序

本編記關於初等數學之對數及其應用之事項，較普通中等學校教科書所載者稍詳。

對數之目的，在考一切之數等於某特殊之數之某乘冪，利用其指數(即對數)之性質，依加減法可將繁雜難解之演算變爲平易簡捷。故在中等教育上占極重要之位置，但多數教科書所說者，皆過於簡略，學者一知半解，卒不得其要領，此著者常引爲遺憾者也。著者本多年之經驗，自信依最正確妥當之系統與進路，以及於本叢書之程度爲限，詳密解說，期於理論與運用，兩無間然。

對數之理論應由指數之法則誘導而明其關係，本編先由冪，冪根說起，漸次擴張至冪指數爲分數，負數，無理數等，關於指數法則之原理及運用之徹底，頗爲致力，而後取以爲入對數論之進路。然關於冪，冪根及指數等非本編之主要目的，因其詳細說明，可就本叢書第12編考察也。

常用對數爲對數應用之骨子，故務求其演算之正確，簡捷，致力最多，特不厭辭費，反覆詳述。

利息算占日常計算中之重要位置，所賴於對數者甚大，故特於其應用之編注意，且多設例題及練習問題以期運用純熟。

從最近數學教授之新傾向，以指數函數之圖式描寫，說明指數法則及對數計算之運用，以圖一般抽象的說述之連絡融合，由此一面可以養成學者之函數思想，一面可以喚起數學的興趣。

任何數之「訥白爾」對數及常用對數，依計算而說明其求法及比例部分法則之原理，皆以不失論理之嚴正爲限，故說述頗簡單。但初就本書學對數者，不妨暫置在後，蓋恐失全編理路之統一故也。

初學者易於誤解之事項或易陷於弊害者，無論事之大小皆隨處指出，以促讀者之注意.

總問題之答，皆附於編末，其稍難解者，則示其全解或略解，爲讀者學習之南針.然期望讀者愼勿賴此以成，宜用心自習，以積鍛鍊之効.

最近十數年間日本各學校之入學試驗問題，適宜配列，讀者可以自己之力試之，併可爲受入學試驗者之參考.

大正八年十一月

山根新次郎識

# 目　次

# 代數學—對數及利息算

## 第一章

## 羃及羃根

### 1. 羃.

$m$ 箇同數 $a$ 連乘所得之積，稱爲 $a$ 之 $m$ **乘羃**或 $m$ **羃**(或 $m$ **乘**)，其 $a$ 曰**基數**，$m$ 爲其**羃指數**或單稱**指數**.

表 $a$ 之 $m$ 乘羃以 $a^m$ 記之.

卽 $aaaa\cdots\cdots(m$ 箇之積$)=a^m$.

例如 $3\times3=3^2$ 卽 9 爲 3 之二乘羃.

$3\times3\times3=3^3$ 卽 27 爲 3 之三乘羃.

$(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)=(-2)^4$ 卽 16 爲 $-2$ 之四乘羃.

二乘羃特稱自乘或平方，三乘羃特稱立方.

注意 1. $a$ 亦可記爲 $a^1$，卽 $a$ 之一乘.

注意 2. 於本章中以後表羃指數之數皆爲正整數.

注意 3. 整數之羃爲整數.

注意 4. 正數之羃爲正數.

注意 5. 負數之羃，其指數爲偶數者卽爲正數，指數爲奇數者則爲負數.

例如 $(-2)^1=-2.$

$(-2)^2=(-2)(-2)=+4.$

$(-2)^3=(-2)^2(-2)=-8.$

$(-2)^4=(-2)^3(-2)=+16.$

$(-2)^5=(-2)^4(-2)=-32.$

注意 6. $(-a)^m$ 與 $-a^m$，其意義不同.

因 $(-a)^m=(-a)(-a)(-a)\ldots\ldots$

而 $-a^m=-aaa\ldots\ldots$

## 2. 羃之乘法.

$a^3\times a^2=aaa\times aa=a^5=a^{3+2}.$

$a^2\times a^4\times a^3=aa\times aaaa\times aaa=a^9=a^{2+4+3}.$

依此類推 $a^m\times a^n\times a^p\times\ldots\ldots=a^{m+n+p+\ldots}$ 〔I〕

〔法則〕 求同數種種乘羃之積，卽以各指數之和爲指數而作其數之乘羃.

注意 1. $a^m\times a=a^m\times a^1=a^{m+1}.$

注意 2. $a^m$可分解爲數個 $a$ 之乘羃之積，但各指數之和須等於 $m$.

例如　$a^7$ 可分解爲 $a^2\times a^5$, $a^3\times a^4$, $a^6\times a$, $a^3\times a^2\times a^2$ 等等.

注意 3.　$a^m+a^m$ 等於 $2a^m$ 不等於 $a^{2m}$.

又 $a^m+b^m$ 不等於 $(a+b)^m$.

例 1.　$3a^2b^3\times 2a^3b^4y^2=3\times 2\times a^2\times a^3\times b^3\times b^4\times y^2$

$$=6a^5b^7y^2.$$

例 2.　$5x^{2n-3}y^{3m+2}\times 3x^{n+3}y^{m-2}$

$$=5\times 3\times x^{2n-3}\times x^{n+3}\times y^{3m+2}\times y^{m-2}$$

$$=15x^{(2n-3)+(n+3)}\times y^{(3m+2)+(m-2)}$$

$$=15x^{3n}y^{4m}.$$

## 例　題　I.

下列各式, 試化爲最簡.

1. $10^{3m}\times 10^{2n}\times 10^{p}$.
2. $3a^2b^3(x+y)^2\times 5a^3b^2(x+y)^4$.
3. $7a^5b^4c^2\times 3bc^3\times 2a^2c\times 5a^2b^2$.
4. $10a^{x-3}\times 5a^{x+2}\times 2a^{x+1}$.

### 3.　冪之除法.

$$\frac{a^5}{a^3}=\frac{aaaaa}{aaa}=a^2=a^{5-3}.$$

依此類推, 若 $m>n$ 則

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}. \qquad \text{〔II〕}$$

〔法則〕 某數之某乘冪，以同數之乘冪而指數較小者除之，其商卽爲以其指數之差爲指數而作同數之乘冪.

√ 注意 1. $\frac{a^3}{a^5}=\frac{aaa}{aaaaa}=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^{-(3-5)}}.$

依此推之，若 $m<n$

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{-(m-n)}}. \qquad \text{〔II'〕}$$

注意 2. $a^m$ 可化爲二個 $a$ 之乘冪之商，但指數之差須等於 $m$.

例如 $a^3$ 可化爲 $\frac{a^5}{a^2}$, $\frac{a^4}{a}$, $\frac{a^7}{a^4}$ 等.

例 試化 $\frac{84a^6b^3x^2y^7}{14a^4b^5x^3y^2}$ 爲最簡.

解 $$\frac{84a^6b^3x^2y^7}{14a^4b^5x^3y^2}=\frac{6a^{6-4}y^{7-2}}{b^{5-3}x^{3-2}}$$

$$=\frac{6a^2y^5}{b^2x}.$$

## 題　　例 II.

下列各式，試化爲最簡.

1. $\frac{27x^5y^4z^3}{12x^2y^6z^4}$

2. $\frac{-18a^2b^3c^5x^4}{6a^5c^4y^2}\times 2a^4b^2y^4.$

3. $\dfrac{5a^{10}b^2(x+y)^5}{4a^2b^3(x+y)^2}\div 15a^4b^2(x+y)^2.$

4. $104ab^3x^9\div(91a^5b^6x^7\div 7a^4b^4x).$

---

## 4. 冪之冪法.

$(a^m)^3=a^m\times a^m\times a^m=a^{m+m+m}=a^{3m}.$

依此推之　$(a^m)^n=a^{mn}.$　〔III〕

〔法則〕 求某數某乘冪之 $n$ 乘冪,祇須以 $n$ 乘其指數卽得.

系　$(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m.$

$\therefore\ (a^m)^n=(a^n)^m.$　〔III′〕

由是某數 $m$ 冪之 $n$ 冪,等於其數 $n$ 冪之 $m$ 冪.

注意 1. 初學者每誤解 $a^m\times a^n$ 等於 $a^{mn}$ 實則 $a^m\times a^n$ 等於 $a^{m+n}$, 不等於 $a^{mn}$.

注意 2. $a^m$ 可取 $m$ 之因數爲指數, 作二重或三重之乘冪以表之.

例如　$a^{12}$ 可以 $(a^3)^4$, $(a^2)^6$, $\{(a^2)^3\}^2$ 等表之.

例　試化 $10^x\times 100^y\times 1000^z$ 爲最簡.

解
$$\begin{aligned}10^x\times 100^y\times 1000^z&=10^x\times(10^2)^y\times(10^3)^z\\&=10^x\times 10^{2y}\times 20^{3z}\\&=10^{x+2y+3z}\end{aligned}$$

## 5. 積之羃.

$(ab)^3=(ab)(ab)(ab)=a^3b^3$.

依同理推之

$$(abc\ldots)^m=a^mb^mc^m\ldots \qquad \text{〔IV〕}$$

〔法則〕 諸因數之積之某乘羃，卽爲各因數之同乘羃之積.

系　$(a^mb^n)^p=(a^m)^p(b^n)^p=a^{mp}b^{np}$.　〔IV′〕

由是有諸因數之種種乘羃之積，而求其 $p$ 羃，祇須以 $p$ 乘各因數之指數卽得.

例 1.　$(-3a^2b^3)^4=(-3)^4a^{2\times4}b^{3\times4}=81a^8b^{12}$.

例 2.　試以 $a=10^x$,　$b=10^y$ 代入次式而簡單之.

$$\begin{aligned}(a^5b^7)^3\times\frac{a^4}{b^2}&=\{(10^x)^5(10^y)^7\}^3\times\frac{(10^x)^4}{(10^y)^2}\\&=(10^{5x}\times10^{7y})^3\times\frac{10^{4x}}{10^{2y}}\\&=(10^{5x+7y})^3\times10^{4x-2y}\\&=10^{15x+21y}\times10^{4x-2y}\\&=10^{15x+21y+4x-2y}\\&=10^{19x+19y}\\&=(15^{x+y})^{19}\end{aligned}$$

本題以如下解之較便.

$$(a^5b^7)^3\times\frac{a^4}{b^2}=a^{15}b^{21}\times\frac{a^4}{b^2}$$
$$=a^{19}b^{19}$$
$$=(ab)^{19}$$
$$=(10^x\times10^y)^{19}$$
$$=(10^{x+y})^{19}.$$

注意 1. $a^m, b^n, c^p$ 可取 $m, n, p$ 之公約數為指數作乘冪以表之.

例如 $a^6b^4c^{10}=(a^3b^2c^5)^2$.

注意 2. $a$ 之質因數與 $a^m$ 之質因數相同, 何則. 例如 $a$ 之質因數為 $a_1, a_2$ 而 $a=a_1{}^2a_2$ 則

$$a^m=(a_1{}^2a_2)^m$$
$$=a_1{}^{2m}a_2{}^m$$
$$=a_1a_1a_1a_1\ldots(2m\text{ 個})\times a_2a_2a_2\ldots(m\text{ 個})$$

故 $a$ 乘至 $m$ 乘, 決不導入 $a_1, a_2$ 以外之質因數.

## 例　題　III.

下列各式, 試簡之.

1. $(10^{12}\times10^8\times10^4)^3.$

2. $(2a^3x^4)^3\times\left(\dfrac{3a^4x^8}{a^3x^6}\right)^2.$

3. $(2a^3b^2)^3\div(4a^2b^3)^2.$

4. $(3x^{n-1}y^{n-2}z^{n-3})^3$.

5. 試以 $a=10^p$, $b=10^q$, $c=10^r$ 代入次式而簡單之.

$$\frac{a^7b^6}{c^5}\div\left(\frac{a^2b^3}{c^4}\right)^2.$$

---

## 6. 分數之羃.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{a^3}{b^3}.$$

依此推之 $$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.\qquad〔V〕$$

〔法則〕 求分數之某乘羃，各取其分子，分母之同乘羃作爲分數卽得.

注意 1. 既約分數之某乘羃，亦必爲既約分數，決不能爲整數.

注意 2. $\frac{a^m}{b^n}$ 可取 $m, n$ 之公約數爲指數作分數之羃以表之.

例如 $\frac{a^{12}}{b^8}=\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$.

注意 3. $\frac{a}{b}=\frac{na}{nb}$, 然 $\frac{a^n}{b^n}$ 不等於 $\frac{a}{b}$.

例 1. $\left(\frac{9a^4b^6x}{18a^2b^3x^2}\right)^3=\left(\frac{a^2b^3}{2x}\right)^3=\frac{a^6b^9}{8x^3}$.

例 2. $\frac{(7a^2b^5c^4)^5}{(14ab^3c^4)^5}=\left(\frac{7a^2b^5c^4}{14ab^3c^4}\right)^5=\left(\frac{ab^2}{2}\right)^5=\frac{a^5b^{10}}{32}$.