普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数及其应用

（第二版）

天津大学数学系代数教研组 编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

线性代数及其应用

（第二版）

天津大学数学系代数教研组　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是作者总结天津大学几十年来的线性代数公共课程的教学经验，并且广泛学习和吸收国内外同类教材优秀成果的基础上编写而成的. 本书起点低、观点高，既重视线性代数的基本理论与方法的论述，又不过分强调理论，易于教学. 主要内容有复习与推广、初等变换·线性方程组·行列式、矩阵及其运算、线性空间·线性方程组、特征值与特征向量·线性变换、实对称矩阵·欧几里得空间、二次型等.

第二版保持了第一版的基本框架和主要特色. 为了适应大众化教育的需要，更利于初学者学习，新版在诸多细节上作了较大的修改. 增加许多例子和图形来解释难理解的定义和定理，多处采用具有启发性的证明，以培养学习者的创造性思维能力. 每节增加“结语”，以辅导初学者学习.

本书可作为综合性大学、工科大学、师范院校、经济类院校以及高职院校等相关专业的教材或教学参考书，也可供科技人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/天津大学数学系代数教研组编著. —2 版. —北京：科学出版社，2010

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-03-028328-3

Ⅰ.线… Ⅱ.天… Ⅲ.线性代数-高等院校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 137676 号

责任编辑：王 静 房 阳 / 责任校对：陈玉凤

责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2010 年 8 月第 二 版 印张：17 1/4

2010 年 8 月第四次印刷 字数：340 000

印数：11001—15 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

本书初版问世以来，得到许多同行和同学的帮助和建议，借修订再版的机会，向他们表示衷心的感谢. 大家的热情关怀、天津大学数学系和科学出版社的鼎力支持，激励我们不断进取，力创精品. 经过几年的教学实践，我们积累了一些新的教学经验，同时又从国内外多位知名学者和老师的著作中学到了一些优秀的教学成果，又有一些新的理解和体会，深感本书还可以做得更好，还有努力的空间. 经过认真考虑，决定及时修订，争取尽早为读者奉献质量更高、更好的教材，以适应大众化背景下的精英教育发展的需要.

修订的原则是，在保持原教材框架及其基本特色的前提下，尽量多为初学者着想，多为普通大众着想，使新教材既好学、又好教；同时也积极为需要进一步提高线性代数知识水平的读者提供较充分的准备. 具体做法如下：

1. 为了有利于初学者的学习，修订时，我们在具体化、形象化、通俗化上再下工夫，对难理解的定义、定理，通过举实例，或给出图形，或打比方来帮助初学者理解，调动其学习积极性，提高其学习的信心，这对培养学习者的创造性思维能力也大有裨益.

2. 考虑到有些读者对详细的论述不感兴趣，也为了突出知识的要点，我们对教材内容进行了合理取舍，分出层次，将较长、较难的证明，或加星号，或移到该节的末尾供读者选学. 这样做也为教师灵活处理教材提供了便利，给教学留有余地；还保持了线性代数教材逻辑严谨的特点.

3. 为了节约篇幅、减少学习障碍，我们采用"旧瓶装新酒"的策略，有意将同一个例子(如例 2.4 和例 5.3)，反复使用；从旧例子引出新概念、新方法和新结论，做到"旧中有新，新中有根"，使学习者在学习时能迅速建立起新、旧知识的联系，能较快地理解好新概念和新命题.

4. 每节末尾增加了"结语". 结语无固定形式，或用它说明本节的意图，或强调知识的重点与难点，或指出内容的主次与先后，或给出学习建议，以辅导初学者学习.

5. 新版简化了一些命题和定理的证明，努力采用简明而又有启发性的证明. 着意用图形或实例因势利导，适当提供背景材料，自然地引入定义，或给出定理及其证明的思路，以培养学习者的创新思维能力.

6. 新版对部分内容作了增减. 将 6.3.2 小节末尾的"数值计算的注释"扩充为"6.3.4 线性方程组的最小二乘解". 删去了各章的"填空或选择填空题"，以及书后

的“习题参考答案与提示”，一并把它们纳入与之配套的《线性代数学习辅导》一书中. 另外，还对习题的编排作了调整.

虽然力创精品是我们一心追求的目标，但因能力有限，力不从心，新版中的缺点和不足之处在所难免，恳请同行与读者批评指正.

编　者

2010 年 3 月

第一版前言

线性代数是一门将理论、应用和计算融合起来的完美课程.随着计算机的普遍使用以及计算机功能的不断增加,线性代数在实际应用中的重要性也在不断提高,在现代社会中,线性代数是实际应用最广泛的大学基础数学课程.但是,受课程学时少的限制,要使线性代数真正成为完美课程还有较大的难度.尽管如此,许多数学工作者仍知难而进,一直十分关心并且致力于该课程的教学内容和教学方法的改革,取得了可喜的成绩.编者也坚持不懈,积极参加课程改革的实践,认真学习和借鉴国内外同仁的成功经验,努力使线性代数教材现代化,以适应现代社会发展的需要.本书就是编者在天津大学进行多年教学实践和改革探索的基础上编写的.本书有如下主要特点.

1. 线性代数的根源来自欧几里得几何、解析几何与线性方程组理论.本书开篇以复习与推广的形式简要地介绍其中的有关结果,然后顺势推广这些结果.这样做有以下几个目的:

(1) 使具有不同学习经历的学生有一个统一的基础,进而营造一种"温故而知新"的氛围,并且引导学生尽快适应由初等代数到较高等的线性代数的思维转变.

(2) 代数学的基础是数域及其运算律.代数学的基本思想就是设法有效地运用运算律去谋求各种类型的代数问题的通用解法,即以通性求通解.计算机技术的飞速发展,大幅度地扩展了代数学这一基本思想所能胜任的深度和广度.为此,在开篇就特别予以强调.

(3) 按照现行的国际标准,线性代数是通过公理化来表述的,为了让学生尽早接触公理化定义和方法,引导读者重新认识大家都熟悉的实数系的运算律,给出了数域的公理化定义,然后通俗地把 n 元向量空间看成一种广义的数系.这为以后学习一般的线性空间铺平了道路.

(4) 线性代数的许多基本概念和方法都有很强的几何背景,从几何角度来学习线性代数比较容易理解.因此,通过复习,把与线性代数有密切联系的解析几何结果写出来,为以后的学习作铺垫,并且在以后的教学中,利用一切机会和图形阐述线性代数的几何内容.

2. 考虑到人们认识一个新概念有一个过程,编者对书中一些较难懂但又非常重要的概念,如公理化方法、线性空间、线性变换等不回避或置后,而是尽早介绍、由简单到复杂、多次重复、分步理解、逐步提高,最后达到豁然贯通的目的.另外,提前引入 n 元向量空间及其线性运算以及线性变换等概念,为简洁地介绍矩阵的初

等变换、行列式的性质、用高斯消元法解线性方程组、矩阵乘法的现代观点等提供了便利，还为及时介绍线性代数的应用安装了接口.

3. 鉴于矩阵及其初等变换在线性代数中的重要作用，从第 2 章一开始就介绍矩阵及其初等变换的概念，并用矩阵及其初等变换研讨一般线性方程组的求解，另外，把行列式理解为方阵的一个数值特征，用初等变换描述行列式的性质，用初等变换简化行列式的计算.

4. 数学归纳法是数学中一个常用的重要方法. 本书用归纳法简便地定义 n 阶行列式，并用较简便的方法证明了行列式的主要性质. 这比用逆序法定义更容易掌握，并且节约了教学时数.

5. 在工科院校的基础数学教育中，线性代数是训练逻辑思维最好的基础数学课程之一，这种训练比开设一门形式逻辑课程更为有效. 也考虑到定理的证明对加深定理的理解有重要作用，因此除了个别例外，本书基本上对所有定理和命题都给出了证明. 但是也充分考虑到读者的不同学习水平和所学专业的实际需要，所以对一些较难或较长的证明加了“ * ”. 读者可以根据自己的实际情况淡化、缓读或不读加“ * ”的证明，这对以后的学习无甚影响.

6. 为提高读者解决实际问题的能力，除了第 1 章以外，各章都加强了实际应用，包括数学、物理学、化学、网络学、密码学、经济管理学和计算机图形学诸多方面. 这些应用便于读者自学或经教师稍加指点就能自学，容易融入到教学环节中.

7. 计算机对科学和工程中线性代数的发展和实践产生了重大影响. 线性代数数值计算方法在计算数学中占有重要的基础地位，这些方法是面向实际、面向计算机的. 这些方法一方面受线性代数一般理论的指导，而另一方面它又涉及在一定数值误差限制下的数值计算. 本书多处适当地做了一些“数值计算的注释”，让读者知道它们之间的异同，希望这能对读者的继续学习有所帮助.

8. 学好线性代数的关键是理解和掌握它的基本理论，并在理论指导下通过分析去完成习题或解决实际问题. 因此，本书各章末都配有适量的习题，其中一部分是近年来的考研题. 希望读者通过这些习题的练习，巩固和掌握所学的知识. 同时提醒读者，不要过分依赖书后的习题参考答案与提示，做题时不要轻易放过独立思考的机会.

9. 为了适应分层次教学的需要，也考虑到初学者的学习困难以及不同的教学时数，本书设法分散教学难点，对较抽象的内容分层次进行讲授，先讲大纲中的基本内容. 这样安排教学，既使初学者易于接受，又能确保初学者优先掌握好教材的基本内容. 本书将教学内容分成了不同层次，在书中使用“ * ”加以区别. 对 48 学时的班级，可讲授非星号的内容. 对 56 学时的班级，可讲授全书的内容.

10. 倘若使用本书时能与高等数学课程的教学相协调，例如，提前讲授空间解析几何中的部分内容，也可以把线性代数与高等数学一起作为大学数学的入门课

程在一年级同时开设.这样做可以使学生从大学一年级开始就逐步培养把代数与几何、微积分联系起来的能力.另外,提前开设线性代数课程,有利于高等数学的教学以及高等数学课程中诸多内容的更新.

11. 如果仔细阅读本书,会发现书中融入了编者关于线性代数的教法与学法,以及如何优化教学过程等教学研究内容.本书还介绍一些做学术研究的方法,如提出更复杂的运算问题,并找出减少复杂性的方法;从许多实际例子归纳出一般结论,然后用逻辑推理证明它的正确性等.

12. 本书将有配套的学习指导书.它不但指导学生如何学习线性代数,总结各章的重点内容、典型方法,深度分析例题、补充针对性题目,而且与课文内容同步介绍数学工具软件 Maple 10.0 的使用,应用 Maple 的演算、论证、作图、动画等功能,以强化教学效果,激发学生的学习热情.该书配套光盘内容包括 Maple 应用程序集,与“线性代数助学系统”课件等.

本书由杨奇主编,周泽华负责修订与整合.

书中不妥之处,恳请读者多提宝贵意见.

编　者

2007 年 2 月

符号说明

$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{P}$	数域(通常指 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$)
$\mathbf{R}^n$	实 n 维(列)向量空间
$\mathbf{C}^n$	复 n 维(列)向量空间
$\mathbf{P}^n$	(数域 $\mathbf{P}$ 上)分量取自 $\mathbf{P}$ 的 n 维(列)向量空间
$\mathbf{R}^{m\times n}$	实 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{C}^{m\times n}$	复 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{P}^{m\times n}$	元素取自 $\mathbf{P}$ 的 $m\times n$ 矩阵的集合
δ_{ij}	克罗内克符号:$i=j$ 时,$\delta_{ij}=1$;$i\neq j$ 时,$\delta_{ij}=0$
$\mathbf{0}$	零向量或线性空间的零元素
$\boldsymbol{O}$	零矩阵
$\boldsymbol{E}_n$ 或$[\delta_{ij}]_{n\times n}$	n 阶单位矩阵
$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$	$m\times n$ 矩阵
$(\boldsymbol{A})_{ij}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的(i,j)元
D_n	n 阶行列式
$\det \boldsymbol{A}$ 或 $\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
A_{ij}	方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式
$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ 或 $r(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 或$[a_{ij} \mid b_i]$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\overline{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 的各元素取复共轭的矩阵
$\boldsymbol{A}^*$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\operatorname{adj}\boldsymbol{A}$ 或复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵$(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}$
$\boldsymbol{E}_{ij}$	第 i 行 j 列元素为 1,其余元素为 0 的矩阵
$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$	以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为主对角元的对角矩阵
$\boldsymbol{r}_i$	一个矩阵的第 i 行
$\boldsymbol{c}_j$	一个矩阵的第 j 列
$\boldsymbol{\varepsilon}_i$	第 i 个单位坐标向量,即第 i 个分量为 1,其余分量为 0 的向量
$\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度

$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积
$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角
$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 或 $\lvert\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\rvert$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 之间的距离
$\mathbf{R}[x]_n$	次数不超过 n 的一元实系数多项式连同零多项式组成的集合
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$W\subset V$	W 是集合 V 的子集
$W<V$	W 是线性空间 V 的子空间
O	零变换
I	单位变换(或恒等变换)
$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$	由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间
$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$	向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩
col $\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间
row $\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行空间
$\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的(化)零空间(或 $\boldsymbol{A}$ 的核)
$\mathscr{L}(V)$	线性空间 V 上所有线性变换的集合
$W_{\lambda_0}(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征子空间
$V_{\lambda_0}(\sigma)$	线性变换 σ 的属于 λ_0 的特征子空间
$V\cong V'$	线性空间或欧氏空间 V 与 V' 同构
$[\boldsymbol{\gamma}]_{\{\boldsymbol{\alpha}_i\}}$	向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 下的坐标
$[\sigma]_{\{\boldsymbol{\alpha}_i\}}$	线性变换 σ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 下的矩阵
$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵(或等价)
$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似
$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相合(或合同)
$A\Rightarrow B$	A 蕴涵 B;即若 A 成立,则 B 成立;即 A 是 B 的充分条件;也即,B 是 A 的必要条件
$A\Leftrightarrow B$	A 是 B 的充分必要条件;即 A 成立当且仅当 B 成立;也即,A 等价于 B(即命题 A 与命题 B 同为真或同为假)
$\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$	求导变换或微分运算
$\forall$	对所有的
$\cdots$	省略号,表示未写出或不便一一写出的类似元素
$\square$	表示一个命题的表述或证明或计算已完毕

目　录

第 1 章　复习与推广

首先,从代数的观点简要地介绍与本书有关的一些概念和结果.所介绍的内容大都以某种形式包括在中学数学课程中或高等数学课程的解析几何章节中,就不再予以证明.另外,还对某些内容作了推广,这对以后的学习是有益的.本章是全书的基础,包括数域、多元一次方程组、n 元向量空间.也概述了线性代数产生的根源,从一维数学到高维数学的转变,以及从初等代数到(高等)线性代数的转变.

1.1　实数域及其运算律

数是数学的一个最基本的概念,一切计算最后都归结为数的代数运算.数的概念经历了一个长期的发展过程.从逻辑上讲,数的扩充是从自然数集 $\mathbf{N}$ 到整数集 $\mathbf{Z}$,然后是有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$,即

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

数的扩充与数的运算有关,其中加、减、乘、除四种运算(或称四则运算)是最基本的代数运算,它们有许多好用的运算律.概括地说,代数学的基本思想就是设法有效地运用运算律去谋求各种类型代数问题的通用解法,即**以通性求通解**.这些通性正是有理数、实数的全体所共有的.具有这些通性的集合对于以后一些问题的讨论是必要的.感谢哲人想出用字母表示数(即数字符号化),使我们可以把实数集 $\mathbf{R}$ 中一些好用的基本运算律简明地罗列如下:$\forall a,b,c\in\mathbf{R}$,

(1) $a+b\in\mathbf{R},ab\in\mathbf{R}$　(封闭性);

(2) $a+b=b+a$　(加法交换律);

(3) $(a+b)+c=a+(b+c)$　(加法结合律);

(4) $a+0=0+a=a$　(0 的特征);

(5) 有唯一的 $-a\in\mathbf{R}$,使得

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$　(加法的逆元素);

(6) $ab=ba$　(乘法交换律);

(7) $(ab)c=a(bc)$　(乘法结合律);

(8) $a\cdot 1=1\cdot a=a$　(1 的特征);

(9) 若 $a\neq 0$,则有唯一的 $a^{-1}\in\mathbf{R}$,使得

$$aa^{-1}=a^{-1}a=1$$　(乘法的逆元素);

(10) $a(b+c)=ab+ac$ 及 $(a+b)c=ac+bc$　(分配律).

运算律(1)、(5)、(9)说明,若 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $b-a\in\mathbf{R}$,且当 $a\neq 0$ 时有 $b/a\in\mathbf{R}$(即 $\mathbf{R}$ 对减法与除法封闭). 因此,这 10 条代数运算律,也就是通常所说的四则运算律.

定义 1.1 一般地,任何一个包含数 0 和 1 的数集或数系(比如 $\mathbf{R}$),如果其元素满足上述 10 条(四则)运算律,则称之为一个**数域**. 本书用 $\mathbf{P}$ 表示一般的数域.

容易验证,有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域. 但自然数集 $\mathbf{N}$ 和整数集 $\mathbf{Z}$ 不是数域.

从一组基本的公理或来自于经验的"自明"的事实,如上述命题(1)~(10)出发,就能够合乎逻辑地构建数域. 实际应用中需要建立复数域.

由于没有一个实数 x 满足多项式方程 $x^2+1=0$ 或相类似的方程,所以有必要引入复数集,记作 $\mathbf{C}$.

复数具有 $a+b\mathrm{i}$ 的形式,其中 a,b 是实数,分别称为这个数的实部和虚部,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$称为虚数单位. 两个复数 $a+b\mathrm{i}$ 和 $c+d\mathrm{i}$ 相等,当且仅当 $a=c,b=d$. 在复数 $a+b\mathrm{i}$ 中令 $b=0$ 就得到实数,因此把实数集看成是复数集的子集. 复数 $0+0\mathrm{i}$ 对应于实数 0.

$a+b\mathrm{i}$ 的绝对值(或模)定义为 $|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$. $a+b\mathrm{i}$ 的共轭复数定义为 $a-b\mathrm{i}$,复数 z 的共轭复数常用 $\bar{z}$ 表示.

复数集也满足上述 10 条(四则)运算律,因此复数集 $\mathbf{C}$ 构成一个数域. 在用复数进行运算时,其运算律与实数相同,只要在 i^2 出现时用 -1 代替即可.

我们知道,可以用一条直线上的点集表示实数集 $\mathbf{R}$. 类似地,可以用一个平面上的点集表示复数集 $\mathbf{C}$,也就是把一个复数看成是具有上述 10 条(四则)运算律的实数 a 和 b 的有序对 (a,b). 例如,规定 $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$,$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$,$m(a,b)=(ma,mb)$等. 显然 $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$,把这与 $a+b\mathrm{i}$ 联系起来,i 相当于记号 $(0,1)$.

下面举例说明复数的运算. 例如,

$$(3-2\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})=3(1+3\mathrm{i})-2\mathrm{i}(1+3\mathrm{i})=9+7\mathrm{i},$$

$$\frac{-5+5\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}=\frac{-5+5\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}\,\frac{4+3\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}=\frac{-35+5\mathrm{i}}{16+9}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}.$$

如果已熟悉复数集 $\mathbf{C}$ 的四则运算及其运算律,定义 1.1 可改述如下:

定义 1.1′ 设 $\mathbf{P}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个子集. 如果满足以下两个条件:

(1) $0,1\in\mathbf{P}$(或至少 $1\in\mathbf{P}$);

(2) 任意 $a,b\in\mathbf{P}$,都有 $a\pm b,ab\in\mathbf{P}$,并且当 $a\neq 0$ 时,有 $b/a\in\mathbf{P}$(即 $\mathbf{P}$ 对四则运算封闭),则称 $\mathbf{P}$ 为一个(子)**数域**.

利用运算律可以简化计算,而且以后所有代数系统(即带有代数运算的集合)的研究都是以数域的运算律为基础的. 本书常用的数域是实数域 $\mathbf{R}$.

结语 数的四则运算及其运算律是数域的本质特征. 以后在学习数域 $\mathbf{P}$ 上的代数系统时,需注意代数系统中的运算律与数的运算律的联系和区别;会利用运算

律去探究一些代数问题的解答.

1.2 多元一次方程组

初等代数的一个重要内容是解多元一次(线性)方程组,其中未知量的个数等于方程个数的方程组是最重要的,也是最简单的.线性方程组的求解公式自然导出行列式的概念.例如,二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,用加减消元法求得方程组(1-1)的唯一解是

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

公式(1-2)中的分子、分母都是四个数分成两对数相乘再相减而得.其中分母是由方程组(1-1)的四个系数确定的.为了使求解公式(1-2)好记,引入所谓的 2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1-3}$$

它是方程组(1-1)的**系数行列式**,含有两行两列.横写的称为**行**,竖写的称为**列**.数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 是位于第 i 行第 j 列处的**元素**.于是解公式(1-2)可以形象地表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1-4}$$

上述求解法则称为**克拉默**(Cramer)**法则**. 2 阶行列式(1-3)可以看成两项的代数和,每一项是第 1 行的元素与不在该元素所在的行和列的另一个元素的乘积.

试着推广上述求解法则,设有 9 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成 3 行 3 列的数表,称为 **3 阶行列式**.仿照 2 阶行列式,把 3 阶行列式定义为以下三项的代数和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \tag{1-5}$$

其中每一项是原行列式的第 1 行的一个元素与不在该元素所在的行和列的一个 2 阶行列式的乘积(为使推广成立,第 2 项须取负号).进一步展开式(1-5)的右端的 2 阶行列式,它又可以化为 3!(=6)项不同行不同列的 3 个元素的乘积的代数和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$