

2010



执业资格考试丛书

注册岩土工程师 基础考试复习教程

(第四版)
同济大学 编

中国建筑工业出版社

2010 执业资格考试丛书

注册岩土工程师基础考试
复 习 教 程

(第四版)

同济大学 编

中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

注册岩土工程师基础考试复习教程/同济大学编. —4 版.

北京: 中国建筑工业出版社, 2010

(2010 执业资格考试丛书)

ISBN 978-7-112-12083-3

I. 注… II. 同… III. 岩土工程-工程技术人

员-资格考核-自学参考资料 IV. TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 083104 号

本书在前版基础上根据最新发布的注册岩土工程师基础考试大纲修改而成。特别是其中的法律法规、工程经济、电气与信息等章进行了全面的增加与删改, 其他章节也都进行了程度不同的修编。本书编写过程中充分考虑了教学和自学复习的特点, 既注意突出重点, 又遵守循序渐进的规律, 尽量简明扼要, 说理清晰, 并附有例题习题。全书共 16 章。

本书除供岩土工程师参加注册考试复习参考外, 还可供一般土木工程师学习和参考使用。

* * *

责任编辑: 王 梅

责任设计: 董建平

责任校对: 刘 钰 关 健

2010 执业资格考试丛书 注册岩土工程师基础考试复习教程 (第四版)

同济大学 编

*

中国建筑工业出版社出版、发行 (北京西郊百万庄)

各地新华书店、建筑书店经销

北京红光制版公司制版

北京富生印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 90 字数: 2190 千字

2010 年 6 月第四版 2010 年 6 月第五次印刷

定价: 198.00 元

ISBN 978-7-112-12083-3

(19219)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

第四版前言

全国注册土木工程师（岩土）考试每年9月份进行，本教程的第一版（2002年）、第二版（2003年）、第三版（2008年）自发行以来，受到广泛的欢迎。根据中国建筑工业出版社的要求，教程编写单位以新的考试大纲为依据，对原教程进行了全面的修订工作，特别是公共基础部分做了详细的修改。本次修订过程历时5个月时间，对前版的纰漏、错误也进行了全面细致的修改和更正，并在对几年的考核情况进行了深入分析基础上，充分考虑了考生自学复习的特点，突出考核重点，注重学习规律，尽量简明扼要，思路清晰，对部分章节进行了删减合并，并增加了例题习题，使本书内容更加符合考试大纲的要求，也能够更方便的帮助考生进行复习备考。

参与本教程编写的成员涉及同济大学土木工程学院、理学院、航空与力学学院、材料科学与工程学院、经济与管理学院、电子信息与工程学院、文法学院等单位，在第三版编者的基础上，增加了一些一线教师，编写组成员均为相关专业的骨干授课教师，具有较高的学术造诣、丰富的教学经验，并参与了多年的考前培训辅导授课工作，这在一定程度上保证了本教程的质量。

本教程由同济大学黄茂松、石振明、赵春风等负责组稿、校核、审定，全书由黄茂松统一一定稿。由于教程涉及内容广泛，在编写过程中，难免还存在差错之处，敬请读者谅解。

本教程由同济大学黄茂松任主编，石振明、赵春风任副主编。全书各章负责编写人员如下：

- | | | | | | |
|------|----------------|-----|-----|-----|-----|
| 第一章 | 高等数学 | 蒋凤璁 | 徐建平 | | |
| 第二章 | 普通物理 | 王少杰 | 于明章 | | |
| 第三章 | 化学 | 邓子峰 | 陆国弟 | | |
| 第四章 | 理论力学 | 胡龙根 | 费文兴 | | |
| 第五章 | 材料力学 | 袁斯涛 | | | |
| 第六章 | 流体力学 | 方平 | | | |
| 第七章 | 电气与信息 | 石人珠 | 李晓军 | | |
| 第八章 | 法律法规 | 杨心明 | | | |
| 第九章 | 工程经济 | 徐春芳 | 王玉萍 | 谢亚玲 | 张维然 |
| 第十章 | 工程地质 | 石振明 | 叶为民 | 唐世栋 | |
| 第十一章 | 土力学与地基基础 | 李镜培 | 赵春风 | 叶观宝 | |
| 第十二章 | 弹性力学、结构力学与结构设计 | 袁勇 | 汤永净 | 冯虹 | 蔡永昌 |
| 第十三章 | 工程测量 | 鲍峰 | 程效军 | | |
| 第十四章 | 土木工程材料 | 杨正宏 | 高峰 | | |
| 第十五章 | 土木工程施工与管理 | 徐伟 | 马锦明 | | |
| 第十六章 | 职业法规 | 杨心明 | | | |

第三版前言

全国注册土木工程师（岩土）考试每年9月份进行，本教程的第一版（2002年）、第二版（2003年）自发行以来，受到广泛的欢迎。根据中国建筑工业出版社的要求，教程编写单位以新的考试大纲为依据，对原教程进行了全面的修订工作。本次修订过程历时6个月时间，对前版的纰漏、错误进行了全面细致的修改和更正，并在对几年的考核情况进行了深入分析基础上，充分考虑了考生自学复习的特点，突出考核重点，注重学习规律，尽量简明扼要，思路清晰，对部分章节进行了删减合并，并增加了例题习题，使本书内容更加符合考试大纲的要求。

参与本教程编写的成员涉及同济大学土木工程学院、理学院、航空与力学学院、材料科学与工程学院、经济与管理学院、电子信息与工程学院、文法学院等单位，基本是第二版的原班人马，均为相关专业的骨干授课教师，具有较高的学术造诣、丰富的教学经验，并参与了多年的考前培训辅导授课工作，这在一定程度上保证了本教程的质量。另外，感谢本教程第一版、第二版的组稿人及主编、副主编，没有他们的辛勤付出，就没有第三版的顺利出版。

本教程由同济大学黄茂松、石振明、赵春风负责组稿、校核、审定，全书由黄茂松统一定稿。由于教程涉及内容广泛，在编写过程中，难免还存在差错之处，敬请读者谅解。

本教程由同济大学黄茂松任主编，石振明、赵春风任副主编。全书各章负责撰写人员如下：

- | | | | |
|------|----------------|-----|------------|
| 第一章 | 高等数学 | 蒋凤瑛 | 徐建平 |
| 第二章 | 普通物理 | 王少杰 | 于明章 |
| 第三章 | 普通化学 | 邓子峰 | 陆国弟 |
| 第四章 | 理论力学 | 胡龙根 | 费文兴 |
| 第五章 | 材料力学 | 袁斯涛 | |
| 第六章 | 流体力学 | 方平 | |
| 第七章 | 土木工程材料 | 杨正宏 | |
| 第八章 | 电工电子技术 | 石人珠 | |
| 第九章 | 工程经济 | 王玉萍 | 徐春芳 张维然 |
| 第十章 | 工程地质 | 石振明 | 叶为民 唐世栋 |
| 第十一章 | 土力学与地基基础 | 李镜培 | 赵春风 叶观宝 |
| 第十二章 | 弹性力学、结构力学与结构设计 | 袁勇 | 汤永净 冯虹 蔡永昌 |
| 第十三章 | 工程测量 | 鲍峰 | 程效军 |
| 第十四章 | 计算机与数值方法 | 李晓军 | |
| 第十五章 | 土木工程施工与管理 | 徐伟 | 马锦明 |
| 第十六章 | 职业法规 | 杨心明 | |

目 录

第一章 高等数学	1
第一节 空间解析几何	1
第二节 微分学	9
第三节 积分学	27
第四节 无穷级数	44
第五节 微分方程	52
第六节 线性代数	57
第七节 概率与数理统计	75
第二章 普通物理	95
第一节 气体分子动理论	95
第二节 热力学基础	107
第三节 机械波	120
第四节 波动光学	132
附：模拟试题及答案	151
第三章 化学	156
第一节 物质的结构与物质的状态	156
第二节 溶液	165
第三节 化学反应方程式、化学反应速率与化学平衡	172
第四节 氧化还原和电化学	177
第五节 有机化学	182
附：模拟试题及答案	191
第四章 理论力学	208
第一节 静力学	208
第二节 运动学	241
第三节 动力学	271
附：模拟试题及答案	305
第五章 材料力学	338
第一节 绪论	338
第二节 轴向拉伸与压缩	341
第三节 剪切	353
第四节 扭转	359
第五节 截面的几何性质	369
第六节 弯曲内力	376

第七节	弯曲应力	390
第八节	弯曲变形	402
第九节	应力状态与强度理论	415
第十节	组合变形	430
第十一节	压杆稳定	442
	附：模拟试题及答案	453
	附：2005—2008 年材料力学考题及答案	484
第六章	流体力学	495
第一节	流体的主要物性与流体静力学	495
第二节	流体动力学基础	504
第三节	流动阻力和能量损失	518
第四节	孔口、管嘴出流、有压管道恒定流	529
第五节	明渠恒定流	537
第六节	渗流	547
第七节	相似原理和量纲分析	551
	附：模拟试题及答案	559
第七章	电气与信息	566
第一节	电磁学概念	566
第二节	电路知识	570
第三节	变压器与电动机	595
第四节	信息与信号	604
第五节	模拟电子技术	617
第六节	数字电子技术	642
第七节	计算机系统	656
第八节	信息表示	675
第九节	常用操作系统	691
第十节	计算机网络	718
第八章	法律法规	729
第一节	中华人民共和国建筑法	729
第二节	中华人民共和国安全生产法	735
第三节	中华人民共和国招标投标法	740
第四节	中华人民共和国合同法	745
第五节	中华人民共和国行政许可法	752
第六节	中华人民共和国节约能源法	757
第七节	中华人民共和国环境保护法	762
第八节	建设工程勘察设计管理条例	766
第九节	建设工程质量管理条例	768
第十节	建设工程安全生产管理条例	771

第九章 工程经济	776
第一节 货币的时间价值	776
第二节 财务效益与费用估算	780
第三节 资金来源与融资方案	792
第四节 财务分析	803
第五节 经济费用与效益分析	816
第六节 不确定性分析	822
第七节 方案经济比选	832
第八节 改扩建项目经济评价特点	840
第九节 价值工程	844
第十章 工程地质	853
第一节 岩石的成因和分类	853
第二节 地质构造和地史概念	860
第三节 地貌和第四纪地质	872
第四节 岩体结构和稳定性分析	882
第五节 动力地质	895
第六节 地下水	918
第十一章 土力学与地基基础	936
第一节 土的组成和物理性质	936
第二节 土中应力分布及计算	945
第三节 土的压缩性与地基沉降	951
第四节 土的抗剪强度	957
第五节 特殊性土	963
第六节 土压力	971
第七节 边坡稳定分析	976
第八节 地基承载力	979
第九节 浅基础	984
第十节 深基础	998
第十一节 地基处理	1006
附：模拟试题及答案	1036
第十二章 弹性力学、结构力学与结构设计	1042
第一节 弹性力学	1042
第二节 结构力学	1052
第三节 结构设计	1095
第十三章 工程测量	1169
第一节 测量基本概念	1169
第二节 水准测量	1174
第三节 角度测量	1182
第四节 距离测量和三角高程测量	1192

第五节	测量误差基本知识	1198
第六节	控制测量	1203
第七节	地形图测绘	1212
第八节	地形图应用	1220
第九节	建筑工程测量	1224
	附：模拟试题及答案	1234
第十四章	土木工程材料	1238
第一节	概述	1238
第二节	材料的基本性质	1244
第三节	无机气硬性胶凝材料	1247
第四节	水泥	1257
第五节	混凝土	1267
第六节	外加剂	1291
第七节	混凝土掺合料	1294
第八节	沥青及改性沥青	1298
第九节	建筑用钢材	1303
第十节	木材	1313
第十一节	石材	1322
第十二节	黏土	1326
	附：模拟试题及答案	1333
第十五章	土木工程施工与管理	1354
第一节	土石方工程与桩基础工程	1354
第二节	钢筋混凝土工程、预应力混凝土工程与砌体工程	1365
第三节	防水工程	1383
第四节	施工组织设计	1385
第五节	施工管理	1390
	附：模拟试题及答案	1392
第十六章	职业法规	1394
第一节	职业法规概述	1394
第二节	职业法规分论	1397
第三节	技术标准规范体系	1421
第四节	工程设计人员职业道德	1425

第一章 高等数学

第一节 空间解析几何

一、向量代数

既有大小,又有方向的量称为向量,在数学上经常用有向线段来表示向量。向量一般记作 \vec{a} , $\overrightarrow{M_1M_2}$ 等。以坐标原点 O 为起点,向空间一点 M 引向量 \overrightarrow{OM} 叫做点 M 关于点 O 的向径,可记作 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ 。向量的大小叫做向量的模,记作 $|\vec{a}|$ 等,模等于1的向量叫做单位向量,模等于零的向量叫做零向量,记作 $\vec{0}$,它的方向可以看作是任意的。

(一)向量的坐标与向量的线性运算

在空间直角坐标系中,以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别表示沿 x, y, z 轴正向的单位向量,并称它们为这一坐标系的基本单位向量,向量 \vec{a} 按基本单位向量的分解式为 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$,其中 a_x, a_y, a_z 为向量 \vec{a} 在三个坐标轴上的投影,叫做向量 \vec{a} 的坐标,并记 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 为向量 \vec{a} 的坐标表达式。

利用向量的坐标,可得向量的模,方向余弦等:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

向量 \vec{a} 的单位向量 $\vec{e}_a=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,并有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$,终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的向量记为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

特别,点 $M(x, y, z)$ 的向径记为 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=(x, y, z)$ 。

利用向量的坐标还可得向量的加减法、数乘等线性运算。

设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$,则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z),$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z), \text{其中}\lambda\text{为数.}$$

(二)数量积,向量积,混合积

设 $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z), \vec{b}=(b_x, b_y, b_z), \vec{c}=(c_x, c_y, c_z)$ 。

(1)数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, 其中 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 表示向量 \vec{a} 与 \vec{b} 之间的夹角, $(0 < \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle < \pi)$ 。

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2。$$

若 $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ 。

(2)向量积 $\vec{a} \times \vec{b}$, 其大小 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, 其方向垂直于 \vec{a} 和 \vec{b} 且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ 成右手系。

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

注意: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ 。

若 $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$, 则 $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}$ 。

(3)混合积 $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

三向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 0$ 。

【例 1-1-1】 选择题: 设已知点 $A(1, 0, \sqrt{2})$ 和 $B(4, 2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, 则方向和 \overrightarrow{AB} 一致的单位向量是_____。

(A) $(3, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

(B) $(-3, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

(C) $(\frac{3}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, -\frac{2\sqrt{2}}{5})$

(D) $(-\frac{3}{5}, -\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{5})$

【解】 $\overrightarrow{AB} = (4-1, 2\sqrt{2}-0, -\sqrt{2}-\sqrt{2}) = (3, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{25} = 5,$$

故 $\vec{e}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = (\frac{3}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, -\frac{2\sqrt{2}}{5})$, 应选(C)。

【例 1-1-2】 选择题: 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均为向量, 下列等式中正确的是_____。

(A) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

(B) $\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}|^2 \vec{b}$

(C) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$

(D) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b}$

【解】 由 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ 知应选(A)、(B)、(C)、(D)均是错误的。

【例 1-1-3】 已知 $\vec{a} = (3, 5, -2), \vec{b} = (2, 1, 4)$, 问选取怎样的 λ 和 μ 能使 $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ 与

$\vec{c}=(0,0,1)$ 垂直。

【解】 $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = (3\lambda + 2\mu, 5\lambda + \mu, -2\lambda + 4\mu),$
 $(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \cdot \vec{c} = -2\lambda + 4\mu = 0,$

因而选取的 λ 和 μ 应该有关系 $\lambda = 2\mu$ 。

【例 1-1-4】 设质量为 100kg 的物体从点 $M_1(2,0,7)$ 沿直线移动到点 $M_2(0,3,1)$, 计算重力所作的功(长度单位为 m, 重力方向为 z 轴负方向)。

【解】 $\vec{M_1M_2} = (0-2, 3-0, 1-7) = (-2, 3, -6),$

$\vec{F} = (0, 0, -100g) = (0, 0, -980),$

这样 $W = \vec{F} \cdot \vec{M_1M_2} = (-2, 3, -6) \cdot (0, 0, -980) = 5880(\text{J}).$

二、平面

(一) 平面方程

1. 点法式方程: 如果一非零向量垂直于一平面, 这向量就叫做该平面的法(线)向量, 设平面过点 (x_0, y_0, z_0) 且以 $\vec{n}=(A, B, C)$ 为法向量, 则其点法式方程为

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

2. 一般方程: $Ax + By + Cz + D = 0,$

其中 $\vec{n}=(A, B, C)$ 为平面的法向量且 $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$

3. 截距式方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$

其中 a, b, c 依次为平面在 x, y, z 轴上的截距。

(二) 两平面的夹角, 点到平面的距离

1. 两平面的夹角

两平面的法向量的夹角称为两平面的夹角, 通常两平面的夹角为锐角。

设平面 π_1 和 π_2 方程分别为 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 及 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, 其

中 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, 平面 π_1 和 π_2 的夹角 θ 可由 $\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} =$

$$\frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$
 来确定。

并由此推得下列结论

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}.$$

【例 1-1-5】 求过点 $A(1, 1, -1), B(-2, -2, 2)$ 和 $C(1, -1, 2)$ 三点的平面方程。

【解】 取 $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$
 $= 3(-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}),$

这样由平面的点法式方程得

$$-1 \times (x-1) + 3 \times (y-1) + 2 \times (z+1) = 0,$$

即 $x-3y-2z=0$ 。

【例 1-1-6】 选择题:过 z 轴和点 $(1, 2, -1)$ 的平面方程是_____。

(A) $x+2y-z-6=0$

(B) $2x-y=0$

(C) $y+2z=0$

(D) $x+z=0$

【解】 过 z 轴的平面方程可设为 $Ax+By=0$, 平面过点 $(1, 2, -1)$

故 $A=-2B$, 即平面方程为 $2x-y=0$, 应选(B)。

2. 点到平面的距离公式

平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到该平面的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

【例 1-1-7】 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离。

【解】 由点到平面的距离公式知

$$d = \frac{|1 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 2 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-3|}{3} = 1.$$

三、直线

(一) 直线方程

1. 空间直线的一般方程

空间直线 l 可看作是两相交平面的交线, 设两平面方程分别为

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

则 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 表示 π_1 与 π_2 的交线 l , 方程组 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 也叫做空

间直线的一般方程。

2. 空间直线的对称式方程与参数方程

如果一个非零向量 $\vec{s} = (m, n, p)$ 平行于一条已知直线 l , 这个向量 \vec{s} 就叫做该直线的方向向量。

假设直线过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且与方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$ 平行, 则

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

就叫做直线 l 的对称式方程或点向式方程。

如果令 $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t$, 就得到空间直线的参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ 。

【例 1-1-8】 设直线过空间点 $M_1(1, 2, 3)$ 及点 $M_2(4, 6, 8)$, 写出该直线的对称式方程及参数方程。

【解】 由 $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (4-1, 6-2, 8-3) = (3, 4, 5)$ 知该直线对称式方程为

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5},$$

$$\text{其参数方程为} \begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \\ z=3+5t \end{cases}.$$

(二) 两直线的交角

两直线的方向向量的夹角叫做两直线的夹角, 通常该夹角为锐角, 设直线 l_1 和 l_2 的方向向量为 $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$, 则 l_1 和 l_2 的夹角 $\langle l_1, l_2 \rangle$ 可由

$$\cos \langle l_1, l_2 \rangle = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

给出, 并由此推出下列结论

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$$

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

【例 1-1-9】 求直线 $l_1: \begin{cases} x=2+3t \\ y=1-3t \\ z=7t \end{cases}$ 和直线 $l_2: \begin{cases} 2x-y+4z+1=0 \\ x+y+z+2=0 \end{cases}$ 的夹角。

【解】 由 $\vec{s}_1 = (3, -3, 7)$, $\vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5, 2, 3)$ 知

$$\cos \langle l_1, l_2 \rangle = \frac{|3 \times (-5) + (-3) \times 2 + 7 \times 3|}{\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 7^2} \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 3^2}} = 0,$$

故 $\langle l_1, l_2 \rangle = \frac{\pi}{2}$, 即 l_1 与 l_2 垂直。

(三) 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时, 直线和它在平面上的投影直线的夹角 $\langle l, \pi \rangle$ 称为直线与平面的夹角, 通常该夹角取锐角, 当直线与平面垂直时, 规定其夹角 $\langle l, \pi \rangle = \frac{\pi}{2}$ 。

设直线 l 的方向向量为 $\vec{s} = (m, n, p)$, 平面 π 的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$, 则直线 l 与平面 π 的夹角可由

$$\sin \langle l, \pi \rangle = |\cos \langle \vec{s}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

给出,并由此推出下列结论:

$$l \perp \pi \Leftrightarrow \vec{s} \times \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p},$$

$$l // \pi \Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0.$$

【例 1-1-10】 选择题:过点 $M(3, -2, 1)$ 且与直线 $L \begin{cases} x-y-z+1=0 \\ 2x+y-3z+4=0 \end{cases}$ 平行的直线方程为_____。

(A) $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$

(B) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-3}$

(C) $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$

(D) $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$

【解】 直线 L 的方向向量 $\vec{s} = (1, -1, -1) \times (2, 1, -3) = (4, 1, 3)$, 故应选(D)。

(四)点到直线的距离公式

直线 $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 外一点, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 到该直线的距离

$$d = \frac{|\vec{M}_0\vec{M}_1 \times \vec{s}|}{|\vec{s}|},$$

其中 $M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{s} = (m, n, p)$ 。

【例 1-1-11】 求点 $M_1(3, -1, 2)$ 到直线 $\begin{cases} x=1 \\ y-z+2=0 \end{cases}$ 的距离

【解】 将直线方程写成对称式: $\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-0}{1}$, 即可以看出直线过点 $M_0(1, -2, 0)$, 方向向量为 $\vec{s} = (0, 1, 1)$

$$|\vec{s}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \vec{M}_0\vec{M}_1 = (2, 1, 2)$$

$$\vec{M}_0\vec{M}_1 \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 2), |\vec{M}_0\vec{M}_1 \times \vec{s}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$$

$$\text{故 } d = \frac{|\vec{M}_0\vec{M}_1 \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

四、曲面(旋转曲面,柱面,二次曲面)

如果曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下列关系:曲面 S 上任一点的坐标都满足方程,不在曲面 S 上的点都不满足方程,则方程 $F(x, y, z) = 0$ 叫做曲面 S 的方程,而曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形。

(一) 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面,这条定直线叫做旋转曲面的轴。

设 yOz 坐标面上有一已知曲线 C , 其方程为 $f(y, z) = 0$, 把这曲线绕 z 轴旋转一周就得到一个以 z 轴为旋转轴的旋转曲面, 其方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$ 。同样, 曲线 C 绕 y 轴旋转成的旋转曲面的方程为 $f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0$ 。

【例 1-1-12】 选择题: 将椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程是_____。

(A) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

(B) $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

(C) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$

(D) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

【解】 椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程为 $\frac{x^2}{9} +$

$\frac{(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2}{4} = 1$, 即 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$, 应选(C)。

(二) 柱面

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面, 其中定曲线 C 叫做柱面的准线, 动直线 L 叫做柱面的母线。

例如, 方程 $F(x, y) = 0$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面, 其准线是 xOy 面上的曲线 $C: F(x, y) = 0$ 。

【例 1-1-13】 指出下列方程在空间解析几何中分别表示什么图形:

(1) $x^2 + y^2 = 4$; (2) $z = y + 1$; (3) $x^2 - z^2 = 1$ 。

【解】 (1) $x^2 + y^2 = 4$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴, 其准线是 xOy 面上圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的圆柱面。

(2) $z = y + 1$ 在空间直角坐标中表示母线平行于 x 轴, 其准线是 yOz 面上直线 $z = y + 1$ 的柱面, 它是平面。

(3) $x^2 - z^2 = 1$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 y 轴, 其准线是 xOz 面上双曲线 $x^2 - z^2 = 1$ 的双曲柱面。

(三) 二次曲面

用三元二次方程表示的曲面叫做二次曲面, 常见的二次曲面有

球面: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$;

椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

椭圆抛物面 $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ (p, q 同号);

双曲抛物面(马鞍面) $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ (p, q 异号);

单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$;

二次锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ 。

【例 1-1-14】 选择题: 下列曲面的结论中, 错误的是_____。

- (A) $2x^2 - 3y^2 - z^2 = 1$ 表示双叶双曲面 (B) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 1$ 表示单叶双曲面
(C) $2x^2 + 3y^2 - z = 1$ 表示椭圆抛物面 (D) $2(x^2 + y^2) - z^2 = 1$ 表示锥面

【解】 $2(x^2 + y^2) - z^2 = 1$ 表示旋转单叶双曲面, 故应选(D)。

五、空间曲线及其空间曲线方程, 空间曲线在坐标面上的投影曲线方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线, 设两个相交曲面方程分别为 $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$, 则 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 表示它们的交线 C , 也把 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 叫做空间曲线 C 的一般方程。

例如, $x + y + z = 1$ 及 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 分别表示空间的平面及球面, 它们的交线 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ 则表示空间的一个圆。

空间曲线的 C 的方程也可以用参数形式表示, 若将 C 上的动点的坐标 x, y, z 表示成参数 t 的函数, 则

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \text{ 叫做空间曲线的参数方程。}$$

例如, 参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$ (a, b, c 均为常数) 表示的空间曲线为螺旋线。

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 联列两方程消去变量 z 后所得的方程

$H(x, y) = 0$, 则 $\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 为曲线 C 在坐标面 xOy 上的投影曲线方程。

【例 1-1-15】 求空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程

【解】 联列题设两方程得到 $x^2 + 2y^2 - 2y = 0$, 故 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 为该空间曲线在 xOy 面上的投影曲线方程。