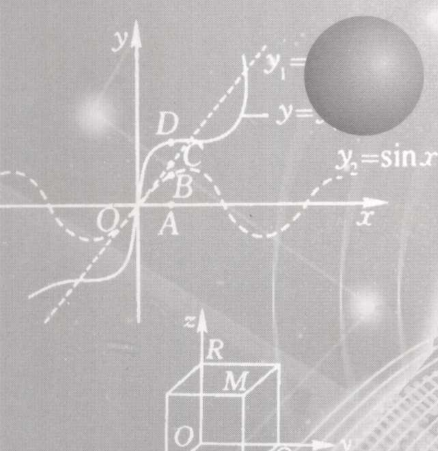
21世纪高等职业教育规划教材 · 数学系列

高等数学全程辅导与提高

GAODENG SHUXUE QUANCHENG FUDAO YU TIGAO

■ 郑玉美　主审

■ 赵国石　主编



教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

21世纪高等职业教育规划教材·数学系列

高等数学全程辅导与提高

主　审　郑玉美
主　编　赵国石
副主编　黄宇林　张清平

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程辅导与提高/赵国石主编. —武汉:华中师范大学出版社,2005.9

(21 世纪高等职业教育规划教材·数学系列)

ISBN 7-5622-3225-3/O·143

Ⅰ.高... Ⅱ.赵... Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教学参考资料

Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 058052 号

高等数学全程辅导与提高

主　　审: 郑玉美

主　　编: 赵国石

副 主 编: 黄宇林　张清平

责任编辑: 张小新　　**责任校对:** 张　钟　　**封面设计:** 罗明波

选题策划: 第二编辑室　　**电话:** (027)67867362

出版发行: 华中师范大学出版社©

社　　址: 武汉市武昌珞瑜路 152 号

电　　话:027—67867076(发行部)　027—67861321(邮购)

传　　真:027—67863291

网　　址:http://www.ccnup.com.cn　电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

经　　销: 各地新华书店

印 刷 者: 石首市印刷厂　　**督　　印:** 姜勇华

字　　数: 260 千字

开　　本: 787 mm×960 mm　1/16　　**印　　张:** 13.75

版　　次: 2005 年 8 月第 1 版　2005 年 9 月第 2 次印刷

印　　数: 10001—13000

定　　价: 22.00 元

欢迎上网查询、购书

---

21 世纪高等职业教育规划教材·数学系列

本册编委会

主　　审　郑玉美

主　　编　赵国石（武汉商贸职业学院）

副 主 编　黄宇林（鄂州大学）

　　　　　张清平（武汉生物工程学院）

编　　委　（以姓氏笔画为序）

　　　　　方次军（湖北工业大学）

　　　　　尤正书（湖北大学知行学院）

　　　　　叶子祥（湖北财经高等专科学校）

　　　　　许　虹（武汉商贸职业学院）

　　　　　李　琦（武汉生物工程学院）

　　　　　李长伟（武汉生物工程学院）

　　　　　吴则刚（武汉生物工程学院）

　　　　　吴　芳（中国地质大学江城学院）

　　　　　陈　芸（武汉生物工程学院）

　　　　　宋　翌（武汉生物工程学院）

　　　　　杨海彬（武汉生物工程学院）

　　　　　周松林（武汉生物工程学院）

　　　　　赵丽君（武汉商贸职业学院）

　　　　　奚小平（湖北生物科技职业学院）

　　　　　龚伏廷（湖北生物科技职业学院）

序 言

从上个世纪末到本世纪初的短短几年里，我国高等教育的规模迅速扩大，其中高等职业技术学校占有相当大的比重，据权威部门统计，截至 2004 年，我国独立设置的高等职业技术学校有一千多所，占全国高校总数的 68%，在校生 781 万，占全国高校在校生的 53.4%。高等职业技术学校的培养目标是：培养生产、服务、管理第一线具有综合职业能力和全面素质的技术应用型人才。这样的人才是全面建设小康社会的人才大军中不可或缺的重要组成部分。如何不断提高教育质量，源源不断地向社会输送符合培养目标的合格毕业生，是摆在高等职业技术学校面前十分重要的任务。当然，本科层次以上的高等教育，随着规模的迅速扩大，也面临同样的课题，但相对而言，我国在本科生、研究生培养方面，可资借鉴的经验更多一些。对于高等职业技术学校，面临新的形势和新的要求，可供效法的经验则较少，因此可以说，在巩固和提高教育质量方面，高等职业技术学校面临的形势更为严峻。

提高教育质量的关键在于教学内容和教学方法的改革与创新，而教材建设是其中十分重要的方面。数学课程作为高等职业技术学校绝大多数专业学生的一门必修的基础课，其重要性不言而喻。目前已经出版了一些供高等职业技术学校选用的数学教材，但进一步研究和改进的空间仍然很大。为此，郑玉美教授发起组织了十二所高职高专学校多位经验丰富的老师，对高职高专数学课程的结构与内容的改革作了认真的探讨，并在此基础上编写了现在这一套适合高职高专学校使用的试用教材。编写者力求使所编教材充分体现高职高专学校培养应用型人才这一总的目标，在数学内容的安排取舍、数学概念的实际背景及应用数学方法分析和解决实际问题的能力的训练等方面，都作了实实在在的富有成效的努力。这套教材的出版，是高职高专学校数学课程教学改革的一次很有意义的实践。

教材建设是一项长期的、艰巨的工作，它需要广大教师的共同参

与。既需要教材的编写者不断探索、精益求精，更需要使用教材的师生及时反馈使用过程中发现的问题和不足之处。通过这样一种编者与使用者的互动与交流，集思广益，长期积累，不懈追求，才能逐步形成一套比较完善的教材。

2005 年 7 月

前 言

进入21世纪，中国的高等教育从过去的精英教育迈入了大众化的轨道。高等本科与高等职业教育异军突起，其规模与人数已超过正规军，正在成为高等教育的一支重要力量。以往的传统数学课程，从体系结构与内容、深度与广度等方面都已不适应正在成长、变化的高职高专教育形势。各种版本的高职高专数学教材已经陆续登场，这是不可抗拒的时代潮流。这些教材各具特色，推动了当前高职高专数学课程结构与内容的革新，但仍然不足以适应高职高专教育发展的意向与迅猛形势。在武汉生物工程学院党委书记余毅、院长邓宗琦的支持下，郑玉美教授主持了《高职高专数学课程的结构与内容改革实施方案》的研究项目，并于2005年初组织武汉职业技术学院等十二所院校中，长期工作在高职高专数学课程教学第一线的、经验丰富的教育专家进行专题研讨。我们汲取了以往出版的各类高职高专数学教材的优点，结合各校各专业数学教学改革的经验，注意国外同类学校的改革动向，特别是数学思想与数学现代化手段应用的趋势，兼顾我国的国情，决定编写一套具有以下特点的21世纪规范教材：

1. 以"三用"为原则

(1) 够用　删去传统教材中难而繁的内容，保留理工农医管各专业必须作为基础的内容，达到满足其需要的最大限度，够用即可。

(2) 管用　增添必需的以往传统教材中没有的知识内容，使教材适合各专业的需要，达到管用的效果。

(3) 会用　淡化传统教材偏重理论的思想，删去理论性较强的内容，强调数学知识的应用，力求学以致用，学后会用，增强学生学习数学的信心与兴趣。

2. 以"三凸现"为特色

(1) 凸现数学与文化的联系　对重要的数学概念与理论，着重讲解它们的历史背景、产生的过程及影响，同时有机地结合一些有趣的数学故事及有影响力的数学家的轶事进行讲解，达到让学生全面了解数学，提高他们的综合素质的目的。

(2) 凸现数学现代化教学手段的应用　将数学软件的使用有机地融合进教材中，不盲目追求运算技巧，着重于培养学生解决实际问题的能力。

(3) 凸现数学的应用性　如把有重要应用的"微元法"贯穿在整个高等数学教材中，又如一元函数的积分学一章，改变传统的讲解顺序，从定积分切入，以

有实际应用的定积分为主线，降低不定积分的地位。注意基本概念的实际背景和理论知识的应用，每一章还特地安排一二节专题应用介绍。

为了使本套教材有更宽广的适用性，在保证科学性和逻辑性的前提下，更注重培养学生的科学的良好的思维习惯，提高学生的学习素质。因此，力求全套教材语言准确、生动，条理清晰简洁。标有 * 号的内容，可由主讲者根据专业及学生状况自由取舍或另外安排课时（计划课时之外）讲授。

本套教材第一批共五种：《高等数学》（上）、《高等数学》（下）、《高等数学全程辅导与提高》、《线性代数》、《离散数学》。

参加本套教材编写的主编有：叶子祥、赵国石、刘昌喜、姚志扬、万武、潘玉恒。

全套教材的框架结构、统稿定稿由郑玉美及以上主编负责，齐民友、任德麟、邓宗琦教授认真审阅了全部教材的原稿，提出了许多有建设性的意见，在此对三位资深教授表示衷心的感谢。华中师范大学出版社杨发明教授对本套教材的编写、审查做了大量的工作，在此一并表示深深的感谢。

参加《高等数学全程辅导与提高》编写的有：赵国石、赵丽君（第一章），黄宇林（第二章），许虹（第三章），叶子祥（第四章），宋翌、李琦、李长伟、吴则刚（第五章），龚伏廷、吴芳、奚小平（第六章），杨海彬、陈芸（第七章），张清平（第八章），周松林（第九章），尤正书（第十章）。全书由赵国石统稿、定稿。

虽然各位编者十分努力，但由于我们的水平有限，成书时间又很仓促，本套教材可能还有不少缺点与错误，还望广大师生、读者批评指正。

编委会

2005 年 5 月

目　录

第一章 函 数

一、本章要点

(一) 实数

1. 有理数的稠密性　任意两个不同有理数 a 与 b 之间(不妨设 $a<b$)存在一有理数 c：$a<c<b$.

2. 实数的连续性　实数充满实数数轴上的所有点,与实数轴上的点一一对应.

3. 实数的集合　开区间、闭区间、半开半闭区间等.

(二) 函数

1. 函数是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射,映射的实质是"对应",即"一对一"或"多对一",不允许"一对多".

2. 函数的定义域及自然定义域的求法

3. 函数的特性

① 有界性　$|f(x)|\leqslant M, x\in D_1\subseteq D, M>0$.($D_1$ 为定义域 D 的子集)

② 单调性　单调增加、单调减少.

③ 奇偶性　偶函数：$f(-x)=f(x)$,图像关于 y 轴对称.

奇函数：$f(-x)=-f(x)$,图像关于原点中心对称.

④ 周期性(最小正周期)　$f(x+T)=f(x)$,T 为周期.

4. 函数的复合　第一函数 $D_1\xrightarrow{f}\mathbf{R}$ 的值域 $f(D_1)$ 包含于第二函数 $D_2\xrightarrow{g}\mathbf{R}$ 的定义域 D_2 内：$f(D_1)\subseteq D_2$, $gf(x)=g[f(x)]$.

注意　准确掌握复合函数的复合过程是正确求其导数的前提条件.

5. 基本初等函数　共有 6 大类：①常函数；②幂函数；③指数函数；④对数函数；⑤三角函数；⑥反三角函数.

特别提醒　在高等数学的学习过程中,经常用到基本初等函数的图像,需要读者做到能够熟练描绘这些图像并分类掌握它们的特点.

6. 初等函数　基本初等函数经过有限次加减乘除及复合得到的函数.

二、本章难点

函数表示法中的分段函数及函数的复合,复合函数定义域的求法.

三、典型例题选解 A

【例 1】 用区间表示下列集合:

(1) $D_1=\{x|3\leqslant x\leqslant 7\}$;

(2) $D_2=\{x|x\geqslant 1\}$;

(3) $D_3=\{x|x^2\leqslant 16\}$;

(4) $D_4=\{x||x-4|\leqslant 3\}$;

(5) $D_5=\{x|2<|x-2|<3\}$.

【分析】 (1),(2)直接利用区间的意义.(3),(4),(5)利用绝对值的意义,然后化成区间表示.

【解】 (1) $D_1=[3,7]$;

(2) $D_2=[1,+\infty)$;

(3) $|x|\leqslant 4 \Longrightarrow -4\leqslant x\leqslant 4 \Longrightarrow D_3=[-4,4]$;

(4) $|x-4|\leqslant 3 \Longrightarrow -3\leqslant x-4\leqslant 3 \Longrightarrow 1\leqslant x\leqslant 7\Rightarrow D_4=[1,7]$;

(5) $2<|x-2|<3 \Longrightarrow \begin{cases}-3<x-2<3,\\ x-2>2 \text{ 或 } x-2<-2,\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}-1<x<5,\\ x>4 \text{ 或 } x<0\end{cases} \Longrightarrow$ $4<x<5$ 或 $-1<x<0$,

则有 $D_5=(-1,0)\cup(4,5)$.

【例 2】 下列各组函数是否为同一函数?

(1) $f_1(x)=|x|+|x-1|$, $f_2(x)=2x-1$;

(2) $\varphi_1(x)=x$, $\varphi_2(x)=\sqrt[3]{x^3}$;

(3) $g_1(x)=2\ln x$, $g_2(x)=\ln x^2$;

(4) $y_1=1$, $y_2=\sin^2 x+\cos^2 x$.

【分析】 两函数的定义域和对应关系都相同时,两函数相同,否则为不同的函数.

【解】 (1) $f_1(x)=\begin{cases}1-2x & -\infty<x<0,\\ 1 & 0\leqslant x<1,\\ 2x-1 & x\geqslant 1.\end{cases}$

比较两函数的对应关系可知,在$(-\infty,1)$上,$f_1(x)$与$f_2(x)$对应关系不同,

故在$(-\infty,+\infty)$上，$f_1(x)\neq f_2(x)$.（但是在$[1,+\infty)$上，$f_1(x)=f_2(x)$.）

(2) $\varphi_1(x)=x$，$x\in\mathbf{R}$；$\varphi_2(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$，$x\in\mathbf{R}$，

$\therefore$ $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$.

(3) $g_1(x)=2\ln x$，$x>0$；$g_2(x)=\ln x^2$，$x\neq 0$，$g_1(x)$与$g_2(x)$的定义域不同，

$\therefore$ $g_1(x)\neq g_2(x)$.

(4) $y_1=1$，$x\in\mathbf{R}$；$y_2=\sin^2x+\cos^2x=1$，$x\in\mathbf{R}$，

$\therefore$ $y_1=y_2$.

【例 3】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{\log_{0.5}(x-2)}$；

(2) $y=\lg(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$；

(4) $y=\arccos\sqrt{2x}$.

【解】 (1) $\log_{0.5}(x-2)\geqslant 0 \Longrightarrow 0<x-2\leqslant 1 \Longrightarrow 2<x\leqslant 3$，定义域为$(2,3]$.

(2) 由对数真数的要求有$\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}>0$，即$\sqrt{x-4}$与$\sqrt{6-x}$非负且不能同时为零；又由开偶次方被开方数的要求有 $x-4\geqslant 0$，$6-x\geqslant 0$. 所以 $x-4\geqslant 0$ 与 $6-x\geqslant 0$ 同时成立时能满足上述要求，即$\begin{cases}x-4\geqslant 0,\\6-x\geqslant 0,\end{cases}$即 $4\leqslant x\leqslant 6$，定义域为$[4,6]$.

(3) 要使函数有意义，必须 $\sin x-\cos x\neq 0$，即 $\sin x\neq\cos x$，$\tan x\neq 1$ 或 $\cos x=0$，从而 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，因此定义域为

$$\left(k\pi+\frac{\pi}{4},(k+1)\pi+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z}).$$

(4) 由 arccos 的要求，必须有$\sqrt{2x}\leqslant 1$，由开平方的要求必须有 $2x\geqslant 0$. 据此得如下不等式组：

$$\begin{cases}\sqrt{2x}\leqslant 1,\\2x\geqslant 0.\end{cases}$$

解这个不等式组得

$$\begin{cases}2x\leqslant 1,\\2x\geqslant 0.\end{cases}\quad 即\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 定义域为$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

【例 4】 指出下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$;

(3) $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$.

【分析】 由函数奇偶性定义：函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的且满足：

① 对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；

② 对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

【解】 (1) $f(x)$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 关于原点对称，且

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2}=\sqrt{x^2}=f(x)$$

∴ $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(x)$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 关于原点对称，且

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{-x}+e^{x}}=-f(x)$$

∴ $f(x)$ 为奇函数.

(3) $f(x)$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 关于原点对称，且

$$\begin{aligned}f(-x)&=|\sin(-x)|+|\cos(-x)|\\&=|\sin x|+|\cos x|=f(x)\end{aligned}$$

∴ $f(x)$ 为偶函数.

【例 5】 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\lg(1+\cos x)$;

(2) $y=2^{\cos x^2}$;

(3) $y=\arcsin[\ln(x^2+1)]$;

(4) $y=\ln\sqrt{\sin\left(\dfrac{x}{4}+\sqrt{x}\right)}$.

【分析】 若函数 $y=f(u)$ 的定义域包含函数 $u=\varphi(x)$ 的值域，则在函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y=f(\varphi(x))\ (x\in X)$，此函数称为由 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成的复合函数. u 称为中间变量. 复合函数的实质是引入一个或多个中间变量.

【解】 (1) $y=\lg u$，$u=1+\cos x$.

(2) $y=2^{u}$，$u=\cos v$，$v=x^2$.

(3) $y=\arcsin u$，$u=\ln v$，$v=x^2+1$.

(4) $y=\ln u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\sin w$，$w=\dfrac{x}{4}+\sqrt{x}$.

【例 6】 求下列复合函数.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求① $f[f(x)]$，② $f\{f[f(x)]\}$；

(2) 若 $f(x)=\ln x,\varphi(x)=\cos x^2+\sqrt{x}$，求 $f[\varphi(x)],\varphi[f(x)]$.

【解】 (1) 直接用代入法：

①用 $f(x)$ 替代 x 得

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{x+1}{x+2};$$

②直接用①结论，即用 $f[f(x)]=\frac{x+1}{x+2}$ 替代 x 得

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{1}{1+f[f(x)]}=\frac{1}{1+\frac{x+1}{x+2}}=\frac{x+2}{2x+3}.$$

(2) 用 $\varphi(x)$ 替代 $f(x)$ 中的 x，得到

$$f[\varphi(x)]=\ln(\cos x^2+\sqrt{x});$$

再用 $f(x)$ 替代 $\varphi(x)$ 中的 x，得

$$\varphi[f(x)]=\cos(\ln x)^2+\sqrt{\ln x}.$$

【例 7】 设 $f(x)=\begin{cases}2-x & x\in(-\infty,1],\\ 2+x & x\in(1,+\infty),\end{cases}$ $g(x)=x^2$.

求：① $f[g(-1)]$；② $f[g(a-1)]$.

【解】 ①当 $x=-1$ 时，$g(-1)=(-1)^2=1$，即 $f[g(-1)]=f(1)$.

又∵ $1\in(-\infty,1]$，∴ $f[g(-1)]=f(1)=2-1=1$.

② $g(a-1)=(a-1)^2\Longrightarrow f[g(a-1)]=f[(a-1)^2]$.

讨论：

1° $(a-1)^2\in(-\infty,1]\Longrightarrow a\in[0,2]$ 时，

$$f[(a-1)^2]=1-a^2+2a.$$

2° $(a-1)^2\in(1,+\infty)\Longrightarrow a>2$ 或 $a<0$ 时，

$$f[(a-1)^2]=2+(a-1)^2=a^2-2a+3.$$

$$\therefore\quad f[g(a-1)]=\begin{cases}1-a^2+2a & a\in[0,2],\\ a^2-2a+3 & a\in(2,+\infty),\text{或 } a\in(-\infty,0).\end{cases}$$

习 题 A

1. 用区间表示下列集合.

(1) $D_1=\{x\mid x^3\leqslant 8\}$；

(2) $D_2=\{x\mid |x+4|\leqslant 3\}$；

(3) $D_3=\{x\mid (x-1)^2\leqslant 2\}$；

(4) $D_4=\{x\mid 2\leqslant |x-3|<4\}$.