全国高级技工学校公共课教材

QUANGUOGAOJIJIGONGXUEXIAOGONGGONGKEJIAOCA

数学

中国就业培训技术指导中心组织编写

UANGUOGAOJIJIGONGXUEXIAOGONGGONGKEJIAOCA

中国劳动社会保障出版社

全国高级技工学校公共课教材

数　学

中国就业培训技术指导中心组织编写

中国劳动社会保障出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学/中国就业培训技术指导中心组织编写. —北京：中国劳动社会保障出版社，2002
全国高级技工学校公共课教材
ISBN 7-5045-3580-X

Ⅰ. 数…
Ⅱ. 中…
Ⅲ. 数学-高等学校：技工学校-教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 024770 号

中国劳动社会保障出版社出版发行
（北京市惠新东街 1 号　邮政编码：100029）
出 版 人：张梦欣

*

北京外文印刷厂印刷装订　新华书店经销
787 毫米×960 毫米　16 开本　21.75 印张　543 千字
2002 年 8 月第 1 版　2005 年 7 月第 7 次印刷
印数:5000 册
定价:35.00 元
读者服务部电话:010-64929211
发行部电话:010-64911190
出版社网址:http://www.class.com.cn

前　言

为认真贯彻《中共中央、国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》的要求，提高技工学校教学质量，逐步构建高级职业培训与高等职业教育相沟通的课程体系，劳动和社会保障部培训就业司委托中国就业培训技术指导中心组织专家，在广泛调研的基础上，编写了高级技工学校公共课教材。

高级技工学校公共课全套教材共9本，包括政治、语文、数学、英语、体育、计算机应用基础、创业指导7门课程，内容充分体现了科学性、先进性和规范性的原则，并注意了与中等职业学校课程相衔接。这套教材由天津职业技术师范学院和北京无线电职业技术学院、北京机电高级技工学校、北京轻工高级技工学校、北京服务管理高级技工学校的专家、教授审定。参加这套教材编写、审定的教授、专家及有关工作人员，为教材的出版付出了艰辛的劳动，在此，谨向他们表示诚挚的谢意。

编　者

2002年3月

目　录

第一章　函数与极限

§1-1 函　数

一、集合　常量与变量

1. **集合**　集合是现代数学的一个重要概念，一般地，称集合为具有某种共同性质的一些事物的全体．例如，某工厂生产的所有产品构成一个集合；某个学校的全体学生构成一个集合；全体实数构成一个集合；方程 $x^2-5x+4=0$ 的一切实根也构成一个集合，等等．构成集合的每一个对象（或事物）称为该集合的元素．

习惯上，我们用大写的字母 $A,B,C,D,\cdots$ 等表示集合，而用小写字母 $a,b,c,d,\cdots$ 等表示集合的元素．若 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作"a 属于 A"；若 b 不是集合 A 的元素，则记作 $b\notin A$，读作"b 不属于 A"．

集合的表示方法通常有二种，一种为列举法．将一个集合的元素按任意顺序列出，然后用一个大括号 $\{\}$ 把这些元素括起来．例如，由 1,3,5,7,9 组成的集合可以表示为 $A=\{1,3,5,7,9\}$．这种只含有有限个元素的集合称为有限集．又如，全体自然数所组成的集合 N 也可用列举法表示为 $N=\{1,2,3,\cdots\}$．

集合的另一种表示方法为描述法．将集合中元素所具有的某个共同特性描述出来并写在大括号内．如，集合 A 中的元素具有共同的某种特征 k，用 $A=\{x\mid x$ 具有特征 $k\}$ 表示．例如，xOy 平面上坐标适合方程 $y=3x^2$ 的点 $P(x,y)$ 的全体所组成的集合用 $G=\{(x,y)\mid y=3x^2\}$ 表示．又如，全体有理数组成的集合 Q 用 $Q=\{x\mid x$ 为有理数$\}$ 表示．

特殊的，只含一个元素 a 的集合叫单元素集，记作 $\{a\}$．不含任何元素的集合叫空集，记作 $\varnothing$．例如，方程 $x^2=-1$ 的实数解集为空集．

$$\{x\mid x^2=-1, x\in \text{实数集 } R\}=\varnothing.$$

全体自然数的集合记作 N，全体整数的集合记作 Z，全体有理数的集合记作 Q，全体实数的集合记作 R．

区间是用得较多的一类数集．设 a、b 均为实数，且 $a<b$，实数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 与 b 称为开区间 (a,b) 的端点，很明显，$a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$．实数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 与 b 称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，显然 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$.

类似实数集

$$\{x\mid a\leqslant x<b\}=[a,b),$$
$$\{x\mid a<x\leqslant b\}=(a,b].$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 称为半开半闭区间.

上述的区间都称为有限区间，实数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 此外，还有无限区间

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\},$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}.$$

全体实数所组成的集合 R 可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间. 我们将无限区间与有限区间统称为区间.

设 a 与 δ 为两个实数，且 $\delta>0$，集合

$$\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$. 点 a 叫此邻域的中心，δ 叫此邻域的半径.

$$\begin{aligned}U(a,\delta)&=\{x\mid |x-a|<\delta\}\\&=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.\end{aligned}$$

$U(a,\delta)$ 也是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，点 a 为区间的中心，2δ 为区间的长度. 因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示：与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体（图 1－1）.

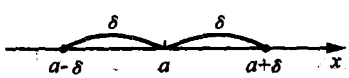

图 1－1

邻域是高等数学中常用的工具. 邻域 $U(a,\delta)$ 的表示方法有三种，(1)集合法，$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$. (2)区间法，$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$. (3)不等式法，$U(a,\delta)$：$a-\delta<x<a+\delta$.

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉，此邻域称为点 a 的空心的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\begin{aligned}\mathring{U}(0,\delta)&=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}\\&=\{x\mid a-\delta<x<a\}\cup\{x\mid a<x<a+\delta\},\end{aligned}$$

或
$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

例如，$U\left(2,\frac{1}{100}\right)$ 表示以 2 为中心，以 $\frac{1}{100}$ 为半径的开区间 $\left(2-\frac{1}{100},2+\frac{1}{100}\right)$，也可表示为 $|x-2|<\frac{1}{100}$ 或 $2-\frac{1}{100}<x<2+\frac{1}{100}$.

2. 常量与变量　在观察各种自然现象或技术过程中，会遇到各种不同的量. 这些量可以分为两种：一种量在某种过程中不起变化，保持一定的数值，这种量称为常量；另一种量在某种过程中是变化的，即可以取不同的数值，这种量称为变量.

例如，将一个密闭容器内的气体加热，气体的体积与气体的分子数量保持一定，它们是常量；气体的温度与压力则是变化的，它们是变量，其取得的数值越来越大.

又例，自由落体的下降时间、下降速度及与地面的距离是不断变化的，它们都是变量；而自由落体的质量和重力加速度在这一过程中保持不变，它们是常量.

一个量是常量还是变量不是绝对的，要根据具体情况作具体分析.例如，火车行驶时的速度，在开始阶段或刹车阶段是变化的，因此在该过程中是变量；在正常行驶阶段，变化很小，速度相对地可看作不变，因而是常量.又例如，重力加速度在地球的不同地点是不同的，在两极地区最大，而在赤道附近最小.但在一个小的范围内，重力加速度可以看成常量，而在全球范围内，重力加速度是变量.高等数学研究的对象是变量，在数学上，我们常常抽去变量或常量的具体意义去研究某一过程中这些量在数值上的关系.由于我们是在实数范围内研究问题，所以研究对象是实变量与实常量，简称它们为变量与常量.

通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 等表示常量，用字母 $x,y,t,\cdots$ 等表示变量.

任何一个变量，总是在一定范围内变化的.例如，某人从 A 地走到 B 地，所用的时间为 T_0，时间 t 是变量，变化范围是从 0 到 T_0，即 $t\in[0,T_0]$.

二、函数

在同一自然现象或技术过程中，常常同时有几个变量在变化着.这几个变量并非孤立地在变化，而是相互联系并依照某个特定的变化规律变化.我们首先研究两个变量的情况，两个以上变量的情况将在后面的多元微积分中再讲.下面先举几个例子：

例 1 圆锥的底面圆半径 R 与圆锥的高 H 有如下关系：$H=2R$.圆锥的体积 V 与它的底面圆半径 R 的相互关系如下：

$$V=\frac{2}{3}\pi R^3$$

当半径 R 在 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式可以确定圆锥体积 V 的相应数值.

例 2 自由落体运动中，物体下落的路程为 S，下落的时间为 t，二者均为变量.假设开始下落的时刻 $t=0,S=0$，物体着地的时刻为 $t=t_0$，由物理学知道，路程随时间 t 的变化规律是：

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

t 的变化范围是 $[0,t_0]$.当时间 t 在 $[0,t_0]$ 上任意取定一个数值时，由上式可以确定路程 S 的相应数值.

例 3 将弹簧一端固定，另一端挂重物，那么弹簧的长度 L 则随所挂重物的质量 m 的变化而变化.设弹簧的最大负载量为 8 千克，通过实验测得 L 与负载量 m 之间的关系如下面表格所示：

m(千克)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
L(厘米)	10	10.5	11	11.5	12	12.5	13	13.5	14

从表格中的数据可以看出，弹簧的长度 L 随负载量 m 的增加而增加.$m\in\{0,1,\cdots,7,$

8},在这个范围内对每一个取定的 m 值,都有一个 L 值与它对应.

例 4　客运出租汽车的价格为:10 公里以内为 10 元,超过 10 公里时,超过部分为 1.5 元/公里.价格 M 与里程 S 之间的关系为:

$$M=\begin{cases}10, & 0<S\leqslant 10\\ 10+1.5(S-10), & S>10\end{cases}$$

去掉上面几个例子所考虑的量的实际含义,它们都表达了两个量之间的相互依存关系.这种相互依存关系给出了一种特定的对应法则,由这一对应法则,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量将有确定的数值与之对应.函数概念正是从这样一些事实中抽象出来的.

定义　设在某个变化过程中,有两个变量 x 和 y,$D\subseteq R$ 是一给定的实数集,若对于任意一个数 $x\in D$,变量 y 按照一定的法则,总有确定的数值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记作 $y=f(x)$.其中 x 叫自变量,y 叫因变量,实数集 D 叫这个函数的定义域.

当 x 取定数值 $x_0\in D$ 时,按照对应法则,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处的函数值,记作 $f(x_0)$.当 x 取定义域 D 的所有数值时,对应的函数值的全体组成的集合叫函数的值域,记作

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

对函数概念的理解,以下几点值得注意:

(1)函数 $y=f(x)$ 中的字母 f 表示变量 y 与 x 之间的对应法则.当然也可以改用其他字母,如 φ、g、h 等等.在实际问题中,若同时出现几个不同的函数时,为避免混淆,应用不同字母表示不同的函数.

(2)函数是由定义域及对应法则确定的,它们是函数定义中的两个要素,一旦给定了定义域与对应法则,那么函数就确定了.

两个函数相同,是指它们的定义域和对应法则分别相同.仅有相同的对应法则,但定义域不同,这两个函数则不相同,例如,$f(x)=1,x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $g(x)=\dfrac{x}{x},x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是两个不同的函数,因为虽然它们的对应法则相同,但定义域却不同.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.如例 1 中,函数的定义域是 $D=(0,+\infty)$,因为半径 R 只能取正数.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用解析式表达的函数,这种函数有时不注明定义域,在没有注明定义域的情况下,一般理解它的定义域就是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数值.例如,$y=\sin x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.又如,函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1,1)$.

例 5　求函数 $y=\sqrt{5-x}+\ln(x-1)$ 的定义域.

解　将函数分为两部分考虑,第一部分是 $\sqrt{5-x}$,应有 $5-x\geqslant 0$,即 $x\leqslant 5$.第二部分是 $\ln(x-1)$,应有 $x-1>0$,即 $x>1$.很明显,函数的定义域为这两部分的公共部分,即 $(-\infty,$

$5]\cap(1,+\infty)=(1,5]$.

(3)若自变量 x 在定义域D 中任取一确定的数值，函数 y 只有唯一的一个数值与之对应，这种函数称做单值函数. 否则称做多值函数. 前面我们举的几个例子均为单值函数，下面我们举一个多值函数的例子.

例 6 在直角坐标系中，半径为 R，圆心在原点的圆的方程是：

$$x^2+y^2=R^2 \qquad x\in[-R,R]$$

当 x 在$(-R,R)$内任取一个数值时，对应的函数值是两个，故这个函数称为多值函数. 再如，反三角函数也是多值的(我们只在它的一个单值分支上去研究它). 以后所讨论的函数，在无特别声明的情况下，均为单值函数.

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样以 x 为横坐标，y 为纵坐标，就在 xOy 平面上确定一点(x,y). 当 x 遍取D 上每一个数值时，就得到点(x,y)的一个集合 C：

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

这个点集 C 称为函数$y=f(x)$的图形(图 1-2).

例 7 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $f(D)=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-3 所示. 这个函数称为绝对值函数.

例 8 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & 当\ x>0,\\ 0, & 当\ x=0,\\ -1, & 当\ x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $f(D)=\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1-4 所示.

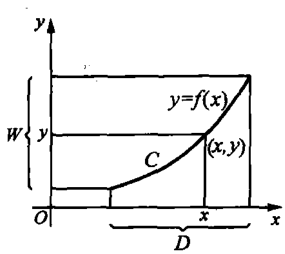

图 1-2

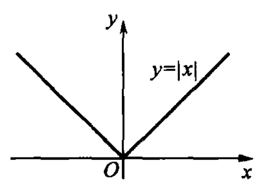

图 1-3

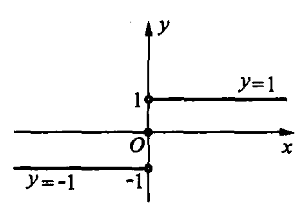

图 1-4

在例 4、例 7、例 8 中看到，有时一个函数要用几个式子表示. 这种自变量在不同范围中，对应法则用不同解析式来表示的函数，通常称为分段函数.

三、函数的几种特性

1. 有界性　设函数 $y=f(x)$在区间 D 上有定义，如果存在正数 M，使得对一切 $x\in D$ 所对应的函数值满足：$|f(x)|\leqslant M$. 则称函数 $f(x)$在 D 上有界. 如果对于任意给定的正数 M，都存在某个 $x_0\in D$，使得$|f(x_0)|>M$，那么就称函数 $f(x)$在 D 上无界.

例如，因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，恒有$|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界. 而 $y=x^2$ 在$(-\infty.+\infty)$内无界，因为对于任意给定的正数 M，取 $x_0=M+1\in(-\infty,+\infty)$，$|f(x_0)|=x_0^2=(M+1)^2>M$. 但 $f(x)=x^2$ 在任意有限区间(a,b)内是有界的，因为对于任意 $x\in(a,b)$，取 $M=\max\{a^2,b^2\}$，使得$|f(x)|=x^2\leqslant M$. 因此，函数是否有界，不仅与函数本身有关，而且还与定义区间有关.

2. 单调性　设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若对于 D 中任意两个数x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 D 上是单调增加的；若对于 D 中任意两个数x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 D 上是单调减少的.

若一个函数在其整个定义区间单调增加或单调减少，则称此函数为单调函数.

单调增加的函数图形是沿 x 轴正方向逐渐上升的(图 1－5). 单调减少的函数图形是沿 x 轴正方向逐渐下降的(图 1－6).

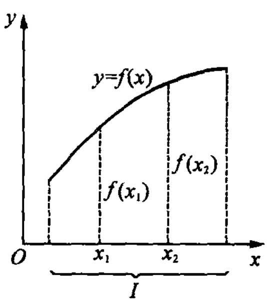

图 1－5

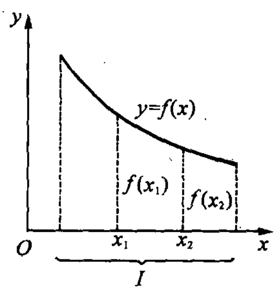

图 1－6

例如，函数 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的. 又如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的. 在$(-\infty,+\infty)$内，函数 $f(x)=x^2$ 不是单调函数.

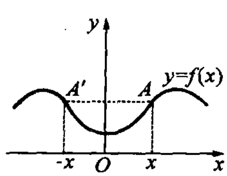

图 1－7

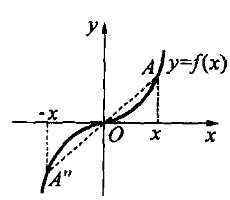

图 1－8

3. 奇偶性　设函数 $y=f(x)$，$x\in(-a,a)(a>0)$，若对于任何 $x\in(-a,a)$，有 $f(-x)=f(x)$成立，则称函数 $f(x)$为偶函数. 若对于任何 $x\in(-a,a)$，有 $f(-x)=$

$-f(x)$成立，则称函数 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1－7)，奇函数的图形关于坐标原点对称(图 1－8).

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 是奇函数，函数 $f(x)=\cos x$ 是偶函数. 又如函数 $f(x)=x^2$ 是偶函数，函数 $f(x)=x^3$ 为奇函数.

注意 并不是所有函数都具有奇偶性，例如，函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

4. 周期性 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在一个不为零的数 l，使得 $\forall x\in D$ $(x+l)\in D$，有 $f(x+l)=f(x)$成立，则称 $f(x)$为周期函数，l 为 $f(x)$的周期. 用归纳法可知，kl(k 为正负整数)均为 $f(x)$的周期，即 $f(x+kl)=f(x)$. 即若 l 为 $f(x)$的周期，则 kl 也为它的周期，因此，周期函数有无穷多个周期. 如果一个函数存在最小正周期，我们就把这个最小正周期叫函数的周期. 例如，$y=\sin x$ 的周期为 2π，就是它的最小正周期，事实上 $2k\pi$(k 为正负整数)均为它的周期. 又例，$\tan x$ 以 π 为周期.

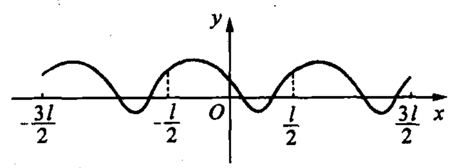

图 1－9

周期函数的图形特点是自变量每增加或减少一个周期后，图形重复出现(图 1－9).

四、复合函数与反函数

1. 复合函数 在同一自然现象或生产实践中，两个变量的联系有时不是直接的，而是通过另一个变量联系起来.

定义 **已知函数 $y=f(u)$的定义域为 D，函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 E，值域为 $\varphi(E)$，并且 $\varphi(E)\subseteq D$，即函数 $u=\varphi(x)$的值域全部在 $y=f(u)$的定义域 D 的范围内(或部分在 D 内). 那么对于 E 中的每一个数值 x，通过变量 u，相应地得到唯一的一个数值 y，于是 y 经过变量 u 而成为 x 的函数. 这个函数称为由函数 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数. 记作 $y=f[\varphi(x)]$，x 是自变量，u 称为中间变量.**

例如，$y=\sin^2x$，可以看作是由 $y=u^2$ 及 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数. 这个复合函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=\sin x$ 的定义域.

又如，$y=\sqrt{x^2-4}$，可以看作是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=x^2-4$ 复合而成的复合函数. 其定义域为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

注意 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如，$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=2+x^2$ 的值域为$[2,+\infty)$，完全落在函数 $y=\arcsin u$ 的定义域之外了.

复合函数的中间变量可以不只一个，可以由更多的函数复合而成. 反过来，一个结构复杂的函数可以引入适当的中间变量，将其分解为若干简单的函数，把它看作由这些简单函数复合而成，这是研究问题的一种重要手段.

例 9 函数 $f(x)=\left[\dfrac{1-(1-x^2)^2}{1+(1-x^2)^2}\right]^3$ 可以看作由 $y=u^3$，$u=\dfrac{1-v}{1+v}$，$v=w^2$，$w=1-$

x^2 四个函数复合而成的，u、v、w 是中间变量.

例 10 函数 $f(x)=\lg\sin\sqrt{x}$ 可以看作由 $y=\lg u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{x}$ 三个函数复合而成的，u，v 是中间变量.

2. 反函数 在研究客观事物的规律时，常常需要从正反两个方面来研究，不仅要研究变量 y 随变量 x 的变化而变化的情况，有时也要研究变量 x 随变量 y 的变化而变化的情况.

例如，在研究自由落体的路程 S 随时间 t 的变化规律时，取时间 t 为自变量，路程 S 为时间 t 的函数，$t=0$ 时，$S=0$，则 S 与 t 的关系式是

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

如果问题是研究由物体下落的距离来确定所需的时间，就可以取 S 作自变量，t 作因变量，t 与 S 的函数关系由公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 解得

$$t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$$

此时，称函数 $t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$ 为函数 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数.

定义 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，其值域为 $f(D)$，若对于 $f(D)$ 中每一个数 y，D 中都有唯一确定的一个数 x 与之对应，使得 $f(x)=y$. 以 y 为自变量，x 为因变量，便可在 $f(D)$ 上确定一个函数 $x=g(y)$，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$，而 $f(x)$ 叫直接函数. 函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 二者的图形是相同的.

由于习惯上总是用 x 表示自变量，用 $y=f(x)$ 表示函数，因此，往往将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示. 这时二者的图形关于直线 $y=x$ 对称（如图 1－10）.

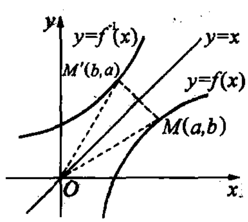

图 1－10

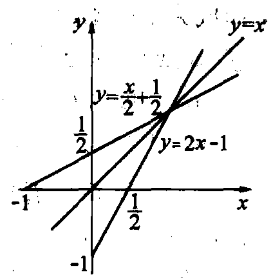

图 1－11

例 11 求函数 $y=2x-1$ 的反函数，并在同一直角坐标系中表示出它们的图形.

解 由 $y=2x-1$ 解出 x 得

$$x=\frac{y+1}{2}$$

函数 $y=2x-1$ 的反函数是 $x=\frac{y+1}{2}$，将其写成 $y=\frac{x+1}{2}$. 它们的定义域与值域均为

$(-\infty,+\infty)$，它们的图形(如图 1－11)关于 $y=x$ 对称.

例 12 $y=x^2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 值域为 $[0,+\infty)$. 在 $[0,+\infty)$ 上任取一数值 $y\neq0$，则适合关系 $x^2=y$ 的数值 x 有两个，一个是 $x=\sqrt{y}$，另一个是 $x=-\sqrt{y}$，所以 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内没有反函数. 但如果把 x 限制在 $[0,+\infty)$ 上，则 $y=x^2$ 有反函数 $x=\sqrt{y}$，在 $(-\infty,0]$ 上有反函数 $x=-\sqrt{y}$.

由上例可以看出，不是每个函数都有反函数，但有的函数对其定义区间作某种限制，就可以得到反函数.

五、初等函数

1. 基本初等函数及其图形　幂函数 $y=x^\alpha$(α 为任意实数)，其定义域与 α 的取值有关. 例如，当 $\alpha=3$ 时，$y=x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；当 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时，$y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$；当 $\alpha=-1$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；当 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 时，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 但是无论 α 取何值，幂函数 $y=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义.

以下是几种常见的幂函数图形(图 1－12).

指数函数　$y=a^x$($a>0$，且 $a\neq1$)，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，图形在 x 轴的上方，且通过 $(0,1)$ 点(图 1－13).

若 $a>1$，函数单调增加，若 $0<a<1$，函数单调减小. 以无理数 $\mathrm{e}=2.7182818284\cdots$ 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 是生产实践和工程技术中用得最多的指数函数. 关于"e"的意义将在§1－2进一步说明.

对数函数　$y=\log_a x$($a>0$，且 $a\neq1$)，其定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，图形总在 y 轴右方，且通过 $(1,0)$ 点. 对数函数与指数函数互为反函数，它们的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1－14).

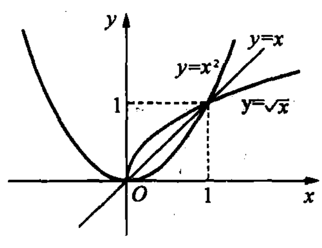

图 1－12

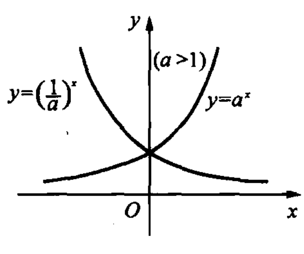

图 1－13

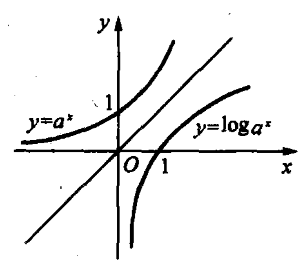

图 1－14

当 $a>1$ 时，函数单调增加，当 $0<a<1$ 时，函数单调减少. 工程技术上常用的对数函数以 10 和以 e 为底，前者称为常用对数，记作 $y=\lg x$；后者称为自然对数，记作 $y=\ln x$.

三角函数　正弦函数 $y=\sin x$(图 1－15)，余弦函数 $y=\cos x$(图 1－16)，定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，值域都是 $[-1,1]$. 它们都是以 2π 为周期的周期函数，正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数.