

浙江省重点建设教材

zhejiangsheng putong gaodeng xuexiao benke youxiu biye sheji lunwen

浙江省普通高等学校 本科优秀毕业设计 (论文)选编 (2004—2008届)

吴寅华 主编



浙江工商大学出版社
Zhejiang Gongshang University Press

浙江省普通高等学校
本科优秀毕业设计(论文)选编
(2004—2008 届)

吴寅华 主编

图书在版编目(CIP)数据

浙江省普通高等学校本科优秀毕业设计(论文)选编:
2004~2008 届 / 吴寅华主编. —杭州:浙江工商大学出版社, 2010. 4

ISBN 978-7-81140-133-2

I. 浙… II. 吴… III. ①高等学校—毕业设计—
汇编—浙江省—2004~2008②高等学校—毕业论文—汇
编—浙江省—2004~2008 IV. G642.477

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 066707 号

浙江省普通高等学校本科优秀毕业设计(论文)选编 (2004—2008 届)

吴寅华 主编

责任编辑 尤锡麟

责任校对 周敏燕

封面设计 汪俊

责任印制 汪俊

出版发行 浙江工商大学出版社

(杭州市教工路 198 号)

(E-mail: zjgsupress@163.com)

(网址: <http://www.zjgsupress.com>)

电话: 0571-88904980, 88831806(传真)

排版 杭州朝曦图文设计有限公司

印刷 杭州杭新印务有限公司

开本 787mm×1092mm 1/16

印张 13.5

字数 333 千字

版印次 2010 年 4 月第 1 版 2010 年 4 月第 1 次印刷

书号 ISBN 978-7-81140-133-2

定价 28.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江工商大学出版社营销部邮购电话 0571-88804227

浙江省普通高等学校
本科优秀毕业设计(论文)选编

编写人员

主 编 吴寅华

编写成员 陈锦阳 冯晓燕

蒋校治 吴寅华

吴云标 钟立人

目 录

CONTENT

仲玻色子两光子湮灭算符本征态的量子统计特征	浙江大学	沈 杰 / 1
B2C 在线购物系统的设计与实现	浙江理工大学	郑加峰 / 28
测地线和拟测地线的研究及其应用	绍兴文理学院	费建龙 / 47
从融资角度看我国民办高等教育的可持续发展	浙江财经学院	陈 艳 / 58
弘历公司营销风险分析与预警管理	杭州电子科技大学	梁燕宏 / 70
涉法信访的困境与突破		
——涉法信访的法治化探析	杭州师范大学	陶哲琼 / 100
D-GaN/LPS 诱导的枯否细胞和肝细胞共培养损伤模型的建立和机制研究	浙江大学城市学院	张宇宇 / 111
现代企业绩效评价体系构建研究		
——基于 ABC, EVA 和 BSC 的融合	浙江工商大学	林 铮 / 121
经济型饭店的市场推广研究		
——以宁波为例	浙江大学宁波理工学院	张胜男 / 140
八角莲内生菌产纤维素酶菌株的筛选及其酶学特性研究	浙江中医药大学	赵梦媛 / 156
陶冶教育的历史探寻与现代实践模式	湖州师范学院	钱秀妹 / 167
希区柯克电影中女性形象的双重性	浙江传媒学院	马姗姗 / 179

附 录

附录一 本科毕业设计(论文)的工作程序与基本要求
..... / 188

附录二 国外发达国家本科毕业论文制度安排及对我们的启示
..... / 201

后 记 / 209

仲玻色子两光子湮灭算符本征态的量子统计特性

浙江大学 沈 杰

摘 要: 本文回顾了量子光学中衡量非经典态性质的三个重要概念——压缩性、统计性和反聚束性,并对两个非经典态——仲玻色子相干态、两光子湮灭算符本征态作了介绍。文中我们引入了仲玻色子两光子湮灭算符本征态,用类似求两光子湮灭算符本征态的方法对其进行研究,最后我们发现仲玻色子两光子湮灭算符本征态在某些特定的情况下,会表现出与普通玻色子明显不同的非经典性质——亚泊松分布性和压缩性,这些性质是由于 h_0 的不同所引起的,当 $h_0=1/2$ 时,所有的态和性质又回到普通玻色子的情形。这些非经典性质,今后有可能在量子光学中有所应用。

关键词: 压缩性;聚束性;反聚束性;亚泊松分布;仲玻色子

Abstract: In this paper, we first look back into three concepts which measure the non-classical properties of quantum states, that is squeezing, statistics and antibunching. Then we review two non-classical states—para-bose coherent states and eigenstates of two-photon annihilation operator. Last we introduce eigenstates of two-photon of para-bose annihilation operator. And using the method analogous to the eigenstates of two-photon annihilation operator, we find that under some special condition, the eigenstates of two-photon of para-bose annihilation operator demonstrate their non-classical properties—the sub-poissonian distribution properties and squeezing properties which different from the ordinary bose's. These properties are induced by h_0 . when $h_0 = 1/2$, it returns to the ordinary bose. All these non-classical properties will be applied in the future.

Key words: Squeezing; Bunching; Antibunching; Sub-Poissonian distribution; Para-Bose

1. 引 言

光的量子理论应追溯到 Planck-Einstein 年代,但直到 1960 年激光器问世前,在光学研究上并没有更多的新现象、新概念出现。20 世纪 60 年代初发明了激光器完全改变了这个局面,迎来了量子光学蓬勃发展的新时代。1997 年度的诺贝尔(Nobel)奖授予激光冷却原子的发明者朱棣文等是这一情景的标志。今天,量子光学的研究已密切关系到量子力学本身许多基本问题,所以它的进展就更引人注目。

在过去的四十年里,量子光学研究重大进展之一,就是构造出许多非经典态,如光子数态, Glauber 相干态,多光子相干态,偶、奇相干态,压缩态,相位态,压缩数态和中间态等。这些“态”都有许多非经典性质,它们中有的虽已从实验上制备了出来,但总的仍偏于理论探讨。

Roy. J. Glauber 于 1963 年发表了 *The Quantum Theory of Optical Coherence* 一文, 它对光学中相干态的定义进行了扩充, 通常光学中所说的相干只有一级关联, 而各级关联的相干在量子理论和经典理论中都可以看到。此文对量子光学的发展起了重大的作用。

J. K. Sharma, C. L. Mehta 以及 E. C. GSudarshan 于 1978 年在 *Para-Bose Coherent States* 一文中对仲玻色子相干态进行了详细的讨论。他们用更广义的仲玻色谐振子的对易关系 $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}$ 来取代普通玻色子的对易关系 $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$, 其中 $\hat{H}$ 是哈密顿量, 它的值为 $(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a})/2$ 。因此可以获得数态以及各种算符在这些态下的表述。仲玻色子相干态是算符 $\hat{a}$ 的本征态, 此态具有一些特殊的性质, 不确定乘积 $\langle(\Delta\hat{q})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$ 可以变得不确定地小。

G. S. Agarwal 和 K. Tarazai 在 1990 年对相干激发态的非经典性质进行了讨论。他们引入了态 $|\alpha, m\rangle = \alpha^{+m}|\alpha\rangle$, 此处 $|\alpha\rangle$ 是相干态, m 是整数, 这些态具有压缩性和亚泊松分布等非经典的性质。

C. L. Mehta 和 Anil K. Roy 两人在 1992 年对两光子湮灭算符本征态进行了研究。他们通过算符在数态上作用的方法, 先引入谐振子湮灭和产生算符的逆算符, 然后说明 $\hat{a}^{+1}\hat{a}$, $\hat{a}\hat{a}^{+1}$ 和 $\hat{a}^2$ 这三个两光子湮灭算符, 它们具有的本征态类似于通常的相干态和压缩态。算符 $\hat{a}^{+1}\hat{a}$ 所具有的一系列本征态是通常的真空压缩态, 而 $\hat{a}\hat{a}^{+1}$ 所具有的一系列本征态是 $s(\sigma)|n=l\rangle$ 。我们发现了这些态的一些有趣的性质, 例如: 压缩性、聚束性和反聚束性。一种可供选择的方法是用这些态进行级数求和, 我们希望这些态能在量子光学和量子力学中得到应用。

本课题是量子光学和量子信息论的基础研究, 也是一些学科的交叉研究领域。由于非经典态的量子统计特性在光通讯、测量、量子信息论等方面具有潜在的应用前景, 成为目前研究的热点, 是国际物理研究的前沿领域之一。人们希望能够制备、操纵各种量子态。因此有必要研究如何产生这些态的理论、实验方案及其可能的应用。

2. 量子光学的基本理论

首先介绍描述量子态非经典特性的三个重要概念。

2.1 基本理论

2.1.1 压缩性

在量子力学中电磁辐射场的每个模式对应于一个谐振子, 所以单模式光的电场可用下面标量算符表示:

$$E(r, t) = \sqrt{(h\omega/2\epsilon_0 V)} a \exp[i(k \cdot r - \omega t)] + h. c. \quad (2.1)$$

这里 a 和 a^+ 分别是谐振子的湮灭和产生算符, 满足玻色子对易关系。 $h. c.$ 代表厄密共轭。由于物理上的需要, 常将电场算复符(2.1)分成正、负频率两部分。

$$E(r, t) = E(r, t)^{(+)} + E(r, t)^{(-)}. \quad (2.2)$$

其中, 正频部分 $E(r, t)^{(+)} = \sqrt{(h\omega/2\epsilon_0 V)} a \exp[i(k \cdot r - \omega t) + h. c.]$; 负频部分是它的厄密共轭。

下面定义两个分别与谐振子的位移 q 和动量 p 对应的算符:

$$X_1 = (a + a^+)/2, \quad X_2 = (a - a^+)/2i. \quad (2.3)$$

那么 $r=0$ 处的单模电场为:

$$E(t) = E_0 (X_1 \cos \omega t + X_2 \sin \omega t).$$

其中 $E_0 = \sqrt{2\hbar\omega/\epsilon_0 V}$ 。这意味着在相空间中电场有两个相互垂直的振动组成, 它们的振幅分别正比于 x_1 和 x_2 。

因为 $[x_1, x_2] = i/2$, 故按量子力学基本原理, 对任意态有

$$\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \geq \frac{1}{4}. \quad (2.4)$$

如果等号成立, 则称这个态为最小测不准态。而如果能找到一个态使

$$\Delta x_1 (\text{或 } \Delta x_2) < \frac{1}{2}, \quad (2.5)$$

并保持式(2.4)中的等号, 则称这个态有理想的振幅压缩效应。

2.1.2 统计性

定义 FanO 因子:

$$F = \frac{\langle \Delta N \rangle^2}{\langle N \rangle}. \quad (2.6)$$

其中 $\langle N \rangle$ 为平均值, $\langle \Delta N \rangle^2$ 为均方根偏差。

当 $F=1$ 时, 称这个态的光子数分布为泊松分布; 当 $F>1$ 时, 则光子数的分布比泊松分布要宽, 称它为超泊松分布; 而当必 $F<1$ 时, 则比泊松分布更窄, 称之为亚泊松分布。

2.1.3 反聚束性

在量子光学发展过程中, Hanbury-Brown 和 Twiss (HBT) 实验被公认是奠定量子光学基础的关键实验。图 1 是 HBT 实验的示意图。图中 M 是一半透明的分束镜, 它将射来的光束分成两半, 一半被光电探测器 P_1 接收, 另一半则被 P_2 接收; 两探测器输出的讯号又被馈送到一个相关器 C , 并且在其中一条光路上装时间延迟器, 使时间延迟了 τ 。HBT 实验, 从经典角度看是光的强度-强度关联: $\langle I(r, t) I(r, t+\tau) \rangle$ 是场的二级关联。这里 $\langle \dots \rangle$ 代表对某个响应时间 T 的平均, 并已假定两个光电探测器 P_1 和 P_2 距离很近, 故 $r_1 \approx r_2 \approx r_0$ 。

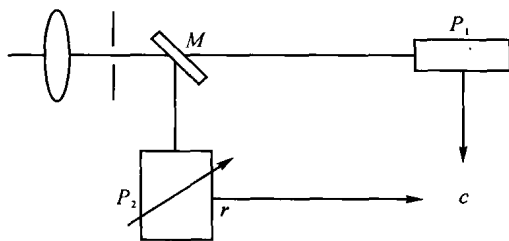


图 1 HBT 实验的示意图

通常用二级关联度 $g^{(2)}$ 代替 $\langle I(r, t) I(r, t+\tau) \rangle$ 描述光强的相关程度,

$$g^{(2)}(r, t, t+\tau) = \frac{\langle I(r, t) I(r, t+\tau) \rangle}{\langle I(r, t) \rangle \langle I(r, t+\tau) \rangle}. \quad (2.7)$$

用不等式 $\langle I^2(r, t) \rangle \geq (\langle I(r, t) \rangle)^2$, 立即可得

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle I^2(r, t) \rangle}{(\langle I(r, t) \rangle)^2} \geq 1. \quad (2.8)$$

再借助 Schwarz 不等式 $|\langle I(r, t) I(r, t+\tau) \rangle|^2 \leq \langle I^2(r, t) \rangle \langle I^2(r, t+\tau) \rangle$, 对稳定光场又可以证明:

$$g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0). \quad (2.9)$$

转到量子力学, 首先要问不等式(2.8)和(2.9)是否成立? 为回答这个问题, 让我们先看

个例子。假定 HBT 实验中只有一光子,当这个光子到达镜子 M 后,按量子力学基本假设它被反射或者透射两者必居其一,不会有半个反射半个透射,所以必有 $g^{(2)}(0)=0$,亦即不等式(2.8)被破坏,这完全是一种量子力学效应。所以在量子力学中,对某些光场的态不等式(2.8)和(2.9)有可能被破坏,对这类态通常称为非类经典态,否则称为类经典态。

在量子力学中 $g^{(2)}(\tau)$ 的定义,对稳定的单模光场可简化为:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a^+ a^+(\tau) a(\tau) a \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2} \quad (2.10)$$

当光场满足不等式(2.9)时,且 $\tau < \tau_c$, 光子呈现出超关联,称此为光子聚束效应, τ_c 称关联时间。而对某些光场如果有不等式

$$g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0), \quad (2.11)$$

则称它是反聚束。

总起来,一个光场如果它具有压缩性、亚泊松分布和反聚束效应等,则称它为非类经典光场,否则称类经典光场。当然,一个非类经典光场一般不会具有这些全部性质。

2.2 基本量子态

这里介绍几种基本的量子态。

2.2.1 光子数态

从电磁场的表式容易写出单模辐射场的哈密顿量为:

$$H = \hbar\omega(a^+ a + 1/2). \quad (2.12)$$

显然 H 的本征态也是光子数算符 $N = a^+ a$ 的本征态: $N|n\rangle = n|n\rangle$, 常称 $|n\rangle$ 为光子数态,本征值 n 则称光子数。因物理上不存在负的光子数,故 $a|0\rangle = 0$ 。而 $\hbar\omega/2$ 为光场的零点能量。光子数态 $|n\rangle$, 是量子光学中最基本和最重要的态。它构成一完备组: $\sum |n\rangle\langle n| = 1$, 任意光子态均可按此展开,展开是唯一的。

推广到多模式是简单和直接的,若令 S 模式光子的湮灭和产生算符分别为 a_s 和 a_s^+ , 则多模式光场的基矢可直接推广为:

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = |\{n_s\}\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle \dots \quad (2.13)$$

对单模光子数态容易求得:

$$\Delta X_1 = \sqrt{(2n+1)}/2, \quad \Delta X_2 = \sqrt{(2n+1)}/2. \quad (2.14)$$

所以光子数态不是最小测不准态,也不具有振幅压缩。又光子数态的 $F=0$ 和 $g_{(n)}^{(2)}(0) = 1 - \frac{1}{n}$, 所以光子数态呈亚泊松分布。

光子数态的一个重要性质是场算符的平均值为零($\langle n|E|n\rangle = 0$),但算符 E^2 的平均值不为零,所以 E 的均方偏差不为零,

$$(\Delta E)^2 = \langle n|E^2|n\rangle = (\hbar\omega/\epsilon V) \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (2.15)$$

特别是对真空态 $|0\rangle$ 的均方偏差不为零,称此为真空涨落。真空涨落和零点能的起源是相同的,均来自算符 a 和 a^+ 间的不对易。

2.2.2 相干态

Schrodinger 在 1926 年首先提出相干态的概念,到了 20 世纪 60 年代, Glauber 等人系统地建立起了谐振子相干态的理论,并用于研究激光的辐射场理论,后来又被广泛应用于

量子光学、泛函积分、统计物理和量子场论等理论中,并扩充了相干态的概念,相继建立了一般位势下的相干态、角动量相干态、荷电 Bose 子相干态等新的相干态形式。

一般,单模式相干态定义为:

$$|a\rangle = \exp(\sigma a^+ - \sigma^* a) |0\rangle, \quad (2.16)$$

或者也可写作:

$$|a\rangle = \exp(-|\sigma|^2/2) \exp(\sigma a^+) |0\rangle \quad (2.17)$$

$$= \exp(-|a|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} (a^n / \sqrt{n!}) |n\rangle. \quad (2.18)$$

这里 σ 是复数, $|0\rangle$ 光子真空态, 称 $|\sigma\rangle$ 为 Glauber 相干态。而将么正算符

$$D(\sigma) = \exp(\sigma a^+ - \sigma^* a) \quad (2.19)$$

称为位移算符。

容易算得 X_1 和 X_2 在 $|\sigma\rangle$ 中的均方根偏差:

$$\Delta X_1 = \Delta X_2 = 1/2, \quad \Delta X_1 \Delta X_2 = 1/4, \quad (2.20)$$

即相干态是最小测不准态,但没有振幅压缩。

也容易算出光子数在 $|a\rangle$ 的平均值和平方平均值,

$$\langle \sigma | N | \sigma \rangle = |\sigma|^2; \quad (2.21)$$

$$\langle \sigma | N^2 | \sigma \rangle = |\sigma|^4 + |\sigma|^2. \quad (2.22)$$

所以 Fan0 因子 $F=1, g^2(0)=1$ 。即相干态中的光子数分布是泊松分布。

通过研究还可以看到相干态是归一的但不正交,相干态是完备的,并能从理论上证明受迫谐振子可以由真空态变为相干态。

我们都知道相干态具有类似经典的性质,而 Fock 态 $|m\rangle$ 产生的场是严格的量子物理场,没有经典性质。但是如果通过将光子产生算符反复作用于相干态上,便能得到一个介于 Fock 态和相干态之间的态。这种态具有非零振幅和一些非经典性质,例如我们前面提到过的振幅压缩性以及亚泊松光子统计。

我们引入态 $|\alpha, m\rangle$, 定义其为:

$$|\alpha, m\rangle = \frac{a^{+m} |\alpha\rangle}{(\langle \alpha | a^m a^{+m} | \alpha \rangle)^{1/2}}. \quad (2.23)$$

其中, $|\alpha\rangle$ 是相干态, m 是一整数。当取极限 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 该 $|\alpha, m\rangle$ 态成为 Fock 态; 而当 $m \rightarrow 0$ 时, 该 $|\alpha, m\rangle$ 态将变成相干态。所以 $|\alpha, m\rangle$ 态是一种介于相干态和 Fock 态之间的态, 又称“增光子态”。

由 $a^m a^{+m}$ 的运算规则, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | a^m a^{+m} | \alpha \rangle &= \sum_{p=0}^m \frac{(m!)^2}{[(m-p)!]^2 p!} |\alpha|^{2(m-p)} \\ &= L_m(-|\alpha|^2) m! \end{aligned} \quad (2.24)$$

其中 $L_m(x)$ 是 m 阶拉盖尔多项式。

(1) 压缩性

我们考虑正交场量 x , 定义其为:

$$x = \frac{a \exp(i\varphi) + a^+ \exp(-i\varphi)}{2} \quad (2.25)$$

通过计算得在 $|\alpha, m\rangle$ 态下 x 的平均值为:

$$\langle x \rangle = |\alpha| \cos(\theta + \varphi) \frac{L_m^{(1)}(-|\alpha|^2)}{L_m(-|\alpha|^2)}. \quad (2.26)$$

其中,拉盖尔多项式 $L_m^{(k)}(x)$ 定义为:

$$L_m^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^m \frac{(m+k)!}{(m-n)!n!(k+n)!} (-x)^n. \quad (2.27)$$

$k > -1$

于是我们可以求得 x 的涨落:

$$\begin{aligned} (\Delta x)^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ &= \{L_m^{(2)}(-|\alpha|^2)L_m(-|\alpha|^2) - [L_m^{(1)}(-|\alpha|^2)]^2\} 2|\alpha|^2 \cos[2(\theta + \varphi)] \\ &\quad - 2[L_m^{(1)}(-|\alpha|^2)]^2 |\alpha|^2 - [L_m(-|\alpha|^2)]^2 + 2(m+1)L_{m+1}(-|\alpha|^2) \\ &\quad L_m(-|\alpha|^2) / 4[L_m(-|\alpha|^2)]^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

定义函数 $S_x = 4(\Delta x)^2$, 可以看出, 函数与 $|\alpha|$ 有关。我们选取相位 $\theta + \phi = \pi$, 作图得当 $m=0$, 即相干态, $S_x = 1$; 当 $m \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$ 时, S_x 的值小于 1, 即正交分量 x 被压缩。

(2) 亚泊松分布

考虑 $|a, m\rangle$ 态中的光子数分布, 我们可以得到 n 光子的几率分布:

$$\begin{aligned} p(n) &= |\langle n | a, m \rangle|^2 \\ &= \frac{|\langle n-m | a \rangle|^2 \frac{n!}{(n-m)!}}{L_m(-|\alpha|^2)m!} \\ \text{即 } p(n) &= \frac{n! |\alpha|^{2(n-m)} \exp(-|\alpha|^2)}{[(n-m)!]^2 L_m(-|\alpha|^2)m!}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

当 $n < m$ 时, $P(n)$ 为零, 此分布的不同在于它比泊松分布要窄。

为了分析这种不同, 我们定义:

$$Q(\alpha, m) = \frac{\langle (a^+ a)^2 \rangle - \langle a^+ a \rangle^2}{\langle a^+ a \rangle}. \quad (2.30)$$

给出光子平均数:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \langle a^+ a \rangle = \langle a^+ a \rangle - 1 \\ &= \frac{\langle \alpha | a^{m+1} a^{m+1} | \alpha \rangle}{L_m(-|\alpha|^2)m!} - 1, \\ \text{或 } \bar{n} &= \frac{(m+1)L_{m+1}(-|\alpha|^2)}{L_m(-|\alpha|^2)} - 1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

最后我们可推得:

$$Q(\alpha, m) = \frac{\{[(m+2)L_{m+2}(-|\alpha|^2) - L_{m+1}(-|\alpha|^2)](m+1)L_m(-|\alpha|^2) - [(m+1)L_{m+1}(-|\alpha|^2)]^2\}}{L_m(-|\alpha|^2)[(m+1)L_{m+1}(-|\alpha|^2) - L_m(-|\alpha|^2)]}. \quad (2.32)$$

由此我们可以作出对于不同整数 m , $Q(\alpha, m)$ 和 $|\alpha|^2$ 的关系图。我们可以得到当 $m=0$ 时, $Q(\alpha, 0)=1$, 对应于相干态情况; 当 $\alpha=0$ 时, $Q(0, m)=1$; 当 $\alpha \rightarrow 0, m \rightarrow 0$ 时, 存在显著的亚泊松分布。

2.2.3 压缩态

前已指出, 如果有一个态能使式(2.4)和式(2.5)同时满足, 则它有振幅压缩性质, 称这样的态为理想压缩态。按此定义, 相干态和数态均不是压缩态。那么压缩态究竟是什么样

的呢,压缩态有什么重要性?先回答后一问题。譬如考虑引力波的测量,超新星爆发产生对实验室仪器有一非常微弱的力使仪器有极其微小的振荡,其振幅一般远小于基态波函数的宽度,所以为要探测这微弱讯号,办法之一是压缩基态波函数,这就充分显示出了研究压缩波的重要性。

波包如何能压缩呢?若考虑一有附加势能的谐振子,它的哈密顿为:

$$H = P^2/2m + kq^2/2 - eE_0(Aq - Bq^2). \quad (2.33)$$

其中, Aq 使振子发生位移,而 Bq^2 则使波包压缩。这是因为上式可重新写作

$$H = P^2/2m + (k + 2eBE_0)q^2/2 - eAE_0q.$$

现在很清楚,劲度系数 k 增强了: $k \rightarrow k' = k + 2eBE_0$, 因而波包被压缩了,如图 2(压缩的谐振子波包)所示。而 Bq^2 与算符 aa 和 a^+a^+ 有关,故可期望压缩态应该也与这类算符有关。

现在定义单模压缩态:

$$|\xi(\eta)\rangle = \exp[(\eta^* aa - \eta a^+ a^+)/2] |0\rangle \quad (2.34)$$

$$= (1 - |\xi|^2)^{1/4} \exp[-\xi a^+ a^+ / 2] |0\rangle \quad (2.35)$$

其中, $\xi = \exp(i\varphi) \tanh(|\eta|)$, $\eta = |\eta| \exp(i\varphi)$ 算符 $aa/2$, $a^+a^+/2$ 和 $(a_1^+a_1 - a_2^+a_2)/4$ 生成 $SU(1,1)$ 代数,所以式(2.24)实际上是定义了 $SU(1,1)$ 相干态。通常称

$$S(\eta) = \exp[(\eta^* aa - a^+ a^+)/2] \quad (2.36)$$

为压缩算符,它是幺正的。

首先考察 $|\xi(\eta)\rangle$ 的压缩性。用式(2.3)并假定 η 是实的,则压缩算符可写成

$$S(\bar{\eta}) = \exp[i\bar{\eta}(X_1 X_2 + X_2 X_1)]. \quad (2.37)$$

因在坐标 (X_1) 表象中 $|0\rangle = |0\rangle_1 = (2/\pi)^{1/4} \exp(-X_1^2)$, 所以 $|\xi(\bar{\eta})\rangle$ 在坐标表象中的表示(即波函数)为:

$$\begin{aligned} \psi(X_1) &= \langle X_1 | \xi(\bar{\eta}) \rangle \\ &= (2/\pi)^{1/4} \exp(\bar{\eta}/2 + 2i\bar{\eta}X_1 X_2) \exp(-X_1^2) \\ &= (2/\pi\sigma^2)^{1/4} \exp(-X_1^2/\sigma^2). \end{aligned} \quad (2.38)$$

可视作压缩态的物理含义,如图 2 所示。类似地可求出 $|\xi(\eta)\rangle$ 在动量 (X_2) 表象中的波函数,结果是

$$\psi(X_2) = \langle X_2 | \xi(\eta) \rangle = (2/\pi\sigma^2)^{1/4} \exp(-X_2^2/\sigma^2). \quad (2.39)$$

对波函数 $\psi(X_1)$ 容易证明: X_1 的平均值为零, X_1 的平方平均为 $\sigma^2/4$ 。同样对 $\psi(X_2)$ 可证明: X_2 的平均值为零, X_2 的平方平均为 $\sigma'^2/4$ 。所以是压缩或膨胀由 $\bar{\eta}$ 决定的,若 $\bar{\eta} > 0$, 则 $\psi(X_1)$ 被压缩,否则 $\psi(X_2)$ 被压缩。

也不难算出:

$$\langle N \rangle = \langle \xi(\eta) | N | \xi(\eta) \rangle = |\nu|^2,$$

$$\langle N^2 \rangle = \langle \xi(\eta) | N^2 | \xi(\eta) \rangle = 2|\mu|^2 + |\nu|^4.$$

于是

$$F = 2|\mu|^2; \quad (2.40)$$

$$g^{(2)}(0) = 3 + 1/|\nu|^2. \quad (2.41)$$

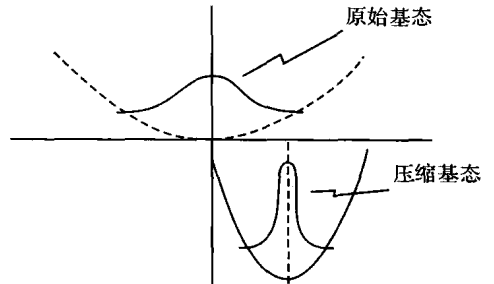


图 2 压缩的谐振子波包

所以,一般说来, $|\zeta(\eta)\rangle$ 是超泊松分布态。

2.3 非经典态

下面主要介绍两个非经典态——仲玻色子相干态和两光子湮灭算符本征态。

2.3.1 仲玻色子相干态

我们都知道对易关系:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1. \quad (2.42)$$

在这里我们定义更广义的对易关系:

$$[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}. \quad (2.43)$$

其中, $\hat{H}$ 是哈密顿量, 满足 $\hat{H} = (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+)/2$ 。我们把满足广义对易关系式(2.43)的湮灭算符的本征态定义为仲玻色子相干态。通过一系列推导, 可以得到仲玻色子相干态的如下表达式:

$$|\alpha\rangle_{h_0} = \{f(|\alpha|^2)\}^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(h_0)}{2^n \Gamma([n/2] + 1) \Gamma([(n+1)/2] + h_0)} \alpha^n |n\rangle_{h_0} \quad (2.44)$$

其中, $f(x)$ 定义为:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(h_0)}{\Gamma([n/2] + 1) \Gamma([(n+1)/2] + h_0)} \left(\frac{1}{2}x\right)^n. \quad (2.45)$$

或者等价为:

$$f(x) = \Gamma(h_0) \left(\frac{1}{2}x\right)^{1-h_0} \{I_{h_0-1}(x) + I_{h_0}(x)\}. \quad (2.46)$$

当我们取 $h_0 = 1/2$ 时, 就回到了普通谐振子情形。这时式(2.45)化为 $f(x) = \exp(x)$

$$|\alpha\rangle_{1/2} = \exp[-(1/2)|\alpha|^2] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_{1/2} \quad (2.47)$$

这就是普通的相干态。

通过研究我们还可以知道仲玻色子相干态构成超完备集, 仲玻色子相干态不是最小测不准态, 对于 $h_0 < 1/2$ 的仲玻色子算符, 可以找到它的基态(或 $\alpha = 0$ 的相干态)给出不确定乘积小于 $1/4$ 。

2.3.2 两光子湮灭算符本征态

玻色子湮灭和产生算符 $\hat{a}, \hat{a}^+$ 满足一般对易关系 $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$, 把它们作用于数态可得:

$$\hat{a}|n\rangle = n^{1/2}|n-1\rangle; \quad (2.48)$$

$$\hat{a}^+|n\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1\rangle. \quad (2.49)$$

此外, 我们定义两个算符 $\hat{a}^{-1}$ 和 $\hat{a}^{+1}$, 它们分别作用于数态可以得到:

$$\hat{a}^{-1}|n\rangle = (n+1)^{-(1/2)}|n+1\rangle; \quad (2.50)$$

$$\hat{a}^{+1}|n\rangle = \begin{cases} n^{-(1/2)}|n-1\rangle & \text{for } n \neq 0. \\ 0 & \text{for } n = 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

由此可以很容易地得出:

$$[\hat{a}, \hat{a}^{-1}] = [\hat{a}^{+1}, \hat{a}^+] = |0\rangle\langle 0|. \quad (2.52)$$

$|0\rangle\langle 0|$ 为真空中的投影算符。

用玻色子湮灭和产生算符以及它们的逆可以构建八个复合算符来表示两个光子的过程。但其中只有 $\hat{a}^{+1}\hat{a}, \hat{a}\hat{a}^{+1}, \hat{a}^2$ 具有归一化、正交的本征态和非零的本征值, 称此为两光

子湮灭算符。

由此我们定义：

$$\hat{a}^{+1}\hat{a}|\lambda,1\rangle=\lambda|\lambda,1\rangle; \quad (2.53)$$

$$\hat{a}\hat{a}^{+1}|\lambda,2\rangle=\lambda|\lambda,2\rangle; \quad (2.54)$$

$$\hat{a}^2|\lambda,3\rangle=\lambda|\lambda,3\rangle. \quad (2.55)$$

通过把以上三个态表示成数态的叠加,通过计算可以得到:

$$|\lambda,+1\rangle=N_+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n)!]^{1/2}}{2^n n!}\lambda^n|2n\rangle, \quad (2.56)$$

$$N_+=(1-|\lambda|^2)^{1/4}, |\lambda|<1; \quad (2.57)$$

$$|\lambda,-1\rangle=N_-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n!}{[(2n+1)!]^{1/2}}\lambda^n|2n+1\rangle, \quad (2.58)$$

$$N_-=\left(\frac{|\lambda|(1-|\lambda|^2)^{1/2}}{\sin^{-1}|\lambda|}\right)^{1/2}, |\lambda|<1; \quad (2.59)$$

$$|\lambda,+2\rangle=M_+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n!}{[(2n)!]^{1/2}}\lambda^n|2n\rangle, \quad (2.60)$$

$$M_+=\left(\frac{(1-|\lambda|^2)^{3/2}}{(1-|\lambda|^2)^{1/2}+|\lambda|\sin^{-1}|\lambda|}\right)^{1/2}, |\lambda|<1; \quad (2.61)$$

$$|\lambda,-2\rangle=M_-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n+1)!]^{1/2}}{2^n n!}\lambda^n|2n+1\rangle, \quad (2.62)$$

$$M_-= (1-|\lambda|^2)^{3/4}, |\lambda|<1; \quad (2.63)$$

$$|\lambda,+3\rangle=(\cosh|\lambda|)^{-(1/2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{[(2n)!]^{1/2}}|2n\rangle, \quad (2.64)$$

$$|\lambda,-3\rangle\left(\frac{\sinh|\lambda|}{|\lambda|}\right)^{-(1/2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{[(2n+1)!]^{1/2}}|2n+1\rangle; \quad (2.65)$$

可以看出 $|\lambda,+1\rangle$ 是真空压缩态,而 $|\lambda,-2\rangle$ 是压缩态的第一激发态。

下面来介绍以上这些态的压缩性,反聚束性这些非经典性质。首先我们定义两个正交的算符:

$$\hat{q}=(\hat{a}+\hat{a}^+)/2^{1/2}; \quad \hat{p}=i(\hat{a}^+-\hat{a})/2^{1/2};$$

两个正交算符的不确定关系为: $\langle(\Delta\hat{q})^2(\Delta\hat{p})^2\rangle\geq 1/4$ 。

压缩性意味着 $\Delta\hat{q}$ 或 $\Delta\hat{p}$ 小于 $1/2$,并用 Q 参数来衡量反聚束性。

$$Q=[\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle-\langle\hat{n}\rangle]/\langle\hat{n}\rangle=[\langle\hat{a}^{+2}\hat{a}^2\rangle-\langle\hat{a}^+\hat{a}\rangle^2]/\langle\hat{a}^+\hat{a}\rangle. \quad (2.66)$$

通过计算可得:

$$(1) \text{ 对于 } |\lambda,+1\rangle \text{ 态, } \langle(\Delta\hat{q})^2\rangle=\langle\hat{q}\rangle^2=\frac{1}{2}+\frac{|\lambda|}{(1-|\lambda|^2)}(|\lambda|+\cos\theta), \quad (2.67)$$

$$\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle=\langle\hat{p}\rangle^2=\frac{1}{2}+\frac{|\lambda|}{(1-|\lambda|^2)}(|\lambda|+\cos\theta), \quad (2.68)$$

其中, $\lambda=|\lambda|e^{i\theta}$ 。

当 $\cos\theta<-|\lambda|$, $\hat{q}$ 发生压缩;而当 $\cos\theta>-|\lambda|$, $\hat{p}$ 发生压缩,

$$Q=2\langle\hat{n}\rangle+1=(1+|\lambda|^2)/(1-|\lambda|^2); \quad (2.69)$$

Q 值总是正的,这个态不显示任何反聚束性。

$$(2) \text{ 对于 } |\lambda, -1\rangle \text{ 态, } \langle (\Delta \hat{q})^2 \rangle = \frac{1}{2} + \langle \hat{n} \rangle + |\lambda| \cos \theta (1 + \langle \hat{n} \rangle), \quad (2.70)$$

$$\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \frac{1}{2} + \langle \hat{n} \rangle - |\lambda| \cos \theta (1 + \langle \hat{n} \rangle), \quad (2.71)$$

当 $\cos \theta < -\frac{|\lambda| \sin^{-1} |\lambda| + (1 - |\lambda|^2)^{1/2}}{\sin^{-1} |\lambda| + |\lambda| (1 - |\lambda|^2)^{1/2}}$, $\hat{q}$ 发生压缩,

而当 $\cos \theta > \frac{|\lambda| \sin^{-1} |\lambda| + (1 - |\lambda|^2)^{1/2}}{\sin^{-1} |\lambda| + |\lambda| (1 - |\lambda|^2)^{1/2}}$, $\hat{p}$ 发生压缩。

$$Q = \frac{3\langle \hat{n} \rangle + 1}{\langle \hat{n} \rangle} \frac{|\lambda|^2}{1 - |\lambda|^2} - \langle \hat{n} \rangle. \quad (2.72)$$

Q 值可正可负或为零, 可以有反聚束性。

$$(3) \text{ 对于 } |\lambda, +2\rangle \text{ 态, } \langle (\Delta \hat{q})^2 \rangle = \frac{1}{2} + \langle \hat{n} \rangle + |\lambda| \cos \theta (2 + \langle \hat{n} \rangle), \quad (2.73)$$

$$\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \frac{1}{2} + \langle \hat{n} \rangle - |\lambda| \cos \theta (2 + \langle \hat{n} \rangle), \quad (2.74)$$

当 $\cos \theta < -\frac{1}{|\lambda|} \frac{\hat{n}}{2 + \langle \hat{n} \rangle} = -\frac{(1 + 2|\lambda|^2) \sin^{-1} |\lambda| + 3|\lambda| (1 - |\lambda|^2)^{1/2}}{(2 + |\lambda|^2)(1 - |\lambda|^2)^{1/2} + 3|\lambda| \sin^{-1} |\lambda|}$, $\hat{q}$ 发生压缩,

而当 $\cos \theta > \frac{1}{|\lambda|} \frac{\hat{n}}{2 + \langle \hat{n} \rangle} = \frac{(1 + 2|\lambda|^2) \sin^{-1} |\lambda| + 3|\lambda| (1 - |\lambda|^2)^{1/2}}{(2 + |\lambda|^2)(1 - |\lambda|^2)^{1/2} + 3|\lambda| \sin^{-1} |\lambda|}$, $\hat{p}$ 发生压缩。

这个态的 Q 值也为正值, 没用反聚束性。

$$(4) \text{ 对于 } |\lambda, -2\rangle \text{ 态, } \langle (\Delta \hat{q})^2 \rangle = \frac{1}{2} + \langle \hat{n} \rangle + |\lambda| \cos \theta (2 + \langle \hat{n} \rangle), \quad (2.75)$$

$$\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \frac{1}{2} + \langle \hat{n} \rangle - |\lambda| \cos \theta (2 + \langle \hat{n} \rangle), \quad (2.76)$$

当 $\cos \theta < -(1 + 2|\lambda|^2)/3|\lambda|$, $\hat{q}$ 发生压缩,

$$\text{而当 } \cos \theta > -(1 + 2|\lambda|^2)/3|\lambda|, \hat{p} \text{ 发生压缩, } Q = \frac{2|\lambda|^4 + 5|\lambda|^2 - 1}{1 + |\lambda|^2 - 2|\lambda|^4} \quad (2.77)$$

可以看出, $|\lambda|$ 在一定的范围内, 可以显示出聚束性和反聚束性。

$$(5) \text{ 对于 } |\lambda, +3\rangle \text{ 态, } \langle (\Delta \hat{q})^2 \rangle = \frac{1}{2} + |\lambda| (\tanh |\lambda| + \cos \theta), \quad (2.78)$$

$$\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \frac{1}{2} + |\lambda| (\tanh |\lambda| - \cos \theta), \quad (2.79)$$

根据不同的 θ , $\hat{q}$ 、 $\hat{p}$ 均可以发生压缩。

$Q = 2|\lambda|/\sinh(2|\lambda|)$, Q 值总是为正的, 没有反聚束性。

$$(6) \text{ 对于 } |\lambda, -3\rangle \text{ 态, } \langle (\Delta \hat{q})^2 \rangle = \frac{1}{2} + |\lambda| (\coth |\lambda| + \cos \theta), \quad (2.80)$$

$$\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle = \frac{1}{2} + |\lambda| (\coth |\lambda| - \cos \theta), \quad (2.81)$$

这个态不具有压缩性。

$$Q = -2|\lambda|/\sinh(2|\lambda|), Q \text{ 永为负值, 总是显示反聚束性。}$$

3. 仲玻色子两光子湮灭算符本征态

前人已经做过关于玻色子两光子湮灭算符本征态的量子统计特性, 现在我们要对仲玻

色子两光子湮灭算符本征态的量子统计特性进行探讨。

3.1 仲玻色子两光子湮灭算符的构造以及公式准备

普通玻色子满足对易关系 $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$, 而仲玻色子满足更广义的对易关系 $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}$, 其中, $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+)$ 。

因为 $\hat{a}^+$ 是 $\hat{a}$ 的厄米共轭算符, 通过仲玻色子满足的对易关系, 我们很容易得出以下关系式:

$$[\hat{a}^+, \hat{H}] = -\hat{a}^+; \quad (3.1.1)$$

$$[\hat{a}^2, \hat{a}^+] = 2\hat{a}; \quad (3.1.2)$$

$$[\hat{a}^{+2}, \hat{a}^+] = -2\hat{a}^+。 \quad (3.1.3)$$

从以上的关系式中我们可以知道这些对易关系满足以下四个式子:

$$[\hat{a}^{2n}, \hat{a}^+] = 2n\hat{a}^{2n-1}; \quad (3.1.4)$$

$$[\hat{a}^{+2n}, \hat{a}] = -2n\hat{a}^{+2n-1}; \quad (3.1.5)$$

$$[\hat{a}^{2n+1}, \hat{a}^+] = \{2n + [\hat{a}, \hat{a}^+]\} \hat{a}^{+2n}; \quad (3.1.6)$$

$$[\hat{a}^{+2n+1}, \hat{a}] = -\hat{a}^{+2n} \{2n + [\hat{a}, \hat{a}^+]\}。 \quad (3.1.7)$$

可以知道仲玻色子的能量本征值为 $h_0, h_0 + 1, \dots, h_0 + n, \dots, h_0$ 是 $\hat{H}$ 的最低能量本征值。现在我们引入数态算符:

$$\hat{N} = \hat{H} - h_0 = \frac{1}{2}(\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+) - h_0。 \quad (3.1.8)$$

数态定义为:

$$\hat{N} |n\rangle_{h_0} = n |n\rangle_{h_0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.9)$$

显然 $|n\rangle_{h_0}$ 是 $\hat{H}$ 的本征态, 其本征值为 $n + h_0$ 。

为了得到我们可以写出 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^+$ 的表述, 我们可以写出:

$$\hat{a} |n\rangle_{h_0} = \lambda_n |n-1\rangle_{h_0}, \quad (3.1.10)$$

$$\hat{a}^+ |n\rangle_{h_0} = \mu_n |n+1\rangle_{h_0}。 \quad (3.1.11)$$

其中, λ_n 和 μ_n 是待定系数。

通过推导可得仲玻色子数态满足以下关系:

$$\hat{a} |2n\rangle_{h_0} = (2n)^{1/2} |2n-1\rangle_{h_0}; \quad (3.1.12)$$

$$\hat{a} |2n+1\rangle_{h_0} = \{2(n+h_0)\}^{1/2} |2n\rangle_{h_0}; \quad (3.1.13)$$

$$\hat{a}^+ |2n\rangle_{h_0} = \{2(n+h_0)\}^{1/2} |2n+1\rangle_{h_0}; \quad (3.1.14)$$

$$\hat{a}^+ |2n+1\rangle_{h_0} = \{2n+2\}^{1/2} |2n+2\rangle_{h_0}; \quad (3.1.15)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] |2n\rangle_{h_0} = 2h_0 |2n\rangle_{h_0}; \quad (3.1.16)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] |2n+1\rangle_{h_0} = 2(1-h_0) |2n+1\rangle_{h_0}; \quad (3.1.17)$$

并且 $\sum_{N=0}^{\infty} |n\rangle_{h_0} \langle n|_{h_0} = 1, \langle n|_{h_0} |m\rangle_{h_0} = \delta_{nm}。$

关系式(3.1.14)、(3.1.15)、(3.1.16)、(3.1.17)给出了以下式子:

$$|n\rangle_{h_0} = \left\{ \frac{\Gamma(h_0)}{2^n \Gamma([n/2]+1) \Gamma([(n+1)/2]+h_0)} \right\}^{1/2} \hat{a}^{+n} |0\rangle_{h_0}。 \quad (3.1.18)$$

仲玻色子的基本算符湮灭和产生算符—— $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^+$ 满足广义的对易关系 $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}$, 数态