高等数学

GAODENG SHUXUE

主编　兰华龙　李松林

西南交通大學出版社
SWJUP
Http://press.swjtu.edu.cn

高 等 数 学

主　编　兰华龙　李松林
副主编　李　应　阮杰昌

西南交通大学出版社
·成都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 兰华龙，李松林主编. —成都：西南交通大学出版社，2008.7（2009.8 重印）
ISBN 978-7-81104-950-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①兰…②李… Ⅲ. 高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 107492 号

高 等 数 学

主编 兰华龙 李松林

责任编辑	张宝华
封面设计	翼虎书装
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564 87600533
邮编	610031
网址	http: //press.swjtu.edu.cn
印刷	四川锦祝印务有限公司
成品尺寸	170 mm×230 mm
印张	23
字数	436 千字
印数	4 001—7 500 册
版次	2008 年 7 月第 1 版
印次	2009 年 8 月第 2 次印刷
书号	ISBN 978-7-81104-950-3
定价	36.80 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话：（028）87600562

前　言

本教材根据教育部最新制定的《高等数学课程的教学基本要求》,结合编者多年的教学经验,在充分调研的基础上,遵循"以应用为目的,以必需、够用为度"的原则构建教材内容,体现了教材的实用性、科学性、针对性．本教材主要有以下几个特点:

(1)教材文字表述简练,内容深入浅出．在注重数学基础知识的同时,淡化了繁杂的定理证明,又辅之以说明或几何解释,既便于教师教,又便于学生学．

(2)教材注重联系实际,突出数学的应用思想．注重从实际背景中引入概念,让学生体会到数学来源于生活与生产实际,以利于拓宽学生的数学应用基础,培养学生分析问题解决问题的能力,进而提高其理论联系实际的能力,让学生体会数学的本质及价值．

(3)教材中适当渗入了数学建模的基本思想,并将高等数学的基本知识、数学建模和数学实验有机融合,以提高学生的综合能力和素质．

(4)内容安排上,重难点突出,层次分明,既能夯实学生的数学基础,又充分考虑到学生的个性化发展．各章节后的习题、复习题都分成A(基础)、B(提高)两个模块,以满足高等院校分层次教学的需要．

本教材共七章,主要内容包括:极限与连续、一元微分学及其应用、一元积分学及其应用、微分方程、多元微积分及其应用、无穷级数、线性代数、数学实验等．前四章为基础模块,后三章为应用模块．此外,书后还有附录:数学实验、数学建模简介、常用初等数学公式、常用积分表.各专业可根据专业培养目标的要求,选学相应的教学内容．其中,第一、四章由李松林编写;第二章由张德刚编写;第三章由兰华龙编写;第五、六章由李应编写;第七章由阮杰昌编写;附录一由王晓平、李琰、邵文凯编写;附录二、三、四由蒋鹏忠、刘少雄、霍婷婷编

写．全书由兰华龙、李松林统稿完成．

在全书的编辑出版过程中，得到了西南交通大学出版社的大力支持与帮助，在此表示感谢．

由于时间仓促和编者水平有限，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评指正．

编　者

2008 年 7 月

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　录

第一章　极限与连续

高等数学主要研究变量及其相互之间的关系．函数是高等数学研究的主要对象，极限是高等数学中研究问题的基本方法，而函数的连续则是研究的条件．本章将在进一步熟悉函数概念与性质的基础上，介绍函数的极限与连续性等基本概念、性质及运算法则．

第一节　初等函数

基本要求：

(1) 熟悉函数的基本概念和基本性质．

(2) 理解复合函数的概念，熟练掌握复合函数的结构及分解．

(3) 能够建立一些简单实际问题的数学模型．

引例1　某汽车租赁公司出租某种汽车一天的收费标准为：基本租金200元加上每千米收费15元．租用一辆该种汽车一天，行车x千米时的租车费为

$$y=(200+15x)\text{ 元}$$

上式中，x的取值范围是数集$D=\{x|x>0\}$，对于D中的每一个x，按所示规则都有唯一确定的y与之对应．

一、函数的概念

定义1.1　设x，y是某变化过程中的两个变量，D是给定的一个数集，若对于集合D中的每一个x值，按某一对应法则f，变量y都有唯一确定的值和它对应，那么称变量y是变量x的函数．记作

$$y=f(x),\quad x\in D$$

式中,变量 x 称为自变量,x 的取值范围 D 称函数的定义域;与 x 对应的 y 的取值范围称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

说明:

(1) 函数的定义域和对应法则是确定函数的两个基本要素.

(2) 函数是反映变量之间相互依存的一种数学模型.

例 1　求函数 $y=\dfrac{1}{\ln(1-2x)}$ 的定义域

解　要使函数 $y=\dfrac{1}{\ln(1-2x)}$ 有意义,必须满足

$$\ln(1-2x)\neq 0 \quad 且 \quad 1-2x>0$$

即

$$x\neq 0 \quad 且 \quad x<\frac{1}{2}$$

故函数 $y=\dfrac{1}{\ln(1-2x)}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

二、函数的表示

常用的表示函数的方法有:列表法、图像法和解析法三种.

解析法:用解析表达式表示一个函数就称为函数的解析法.高等数学中讨论的函数,大多由解析法表示.

例 2(图像法)　某气象站用自动温度记录仪记录下一昼夜气温变化(见图1－1).由图1－1可知,对于一昼夜内每一时刻 t,都有唯一确定的温度 T 与之对应.

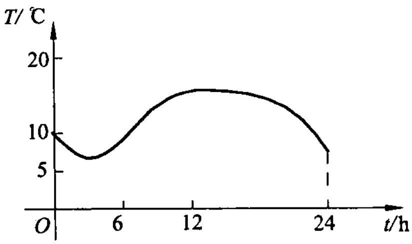

图 1－1

下面介绍几种常用函数.

1. 隐函数

在方程 $F(x,y)=0$ 中,当 x 在某集合 D 内任意取定一个值时,相应地,总有满足该方程 $F(x,y)=0$ 的唯一的 y 值存在,则方程 $F(x,y)=0$ 在区间 D 内确定了一个函数.这个函数称为**隐函数**.

例如,方程 $e^x+xy-1=0$ 就确定了变量 y 与变量 x 之间的函数关系,它是一个隐函数.

注意:通常把形如 $y=f(x)$ 的函数称为**显函数**.有些隐函数可以通过一定的运算,把它转化为显函数.例如,$e^x+xy-1=0$,在 $x\neq 0$ 时,可以化成显函

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

数$y=\dfrac{1-e^x}{x}$. 但隐函数 $x^2-xy+e^y=1$,却不可能化成显函数.

2. 分段函数

在自变量的不同取值范围内,函数关系由不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**. 分段函数是高等数学中常见的一类函数,它是用几个关系式表示的一个函数,而不是表示几个函数. 对于定义域内的任意 x,分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段关系式中自变量取值集合的并集.

例 3　单位阶跃函数是电学中一个常用函数,它可表为

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\\0, & t<0\end{cases}$$

其图形如图 1－2 所示.

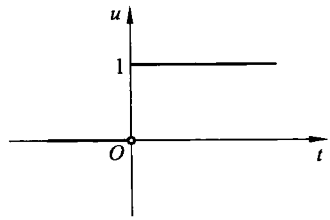

图 1－2

3. 参数方程确定的函数

由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(t\in D)$ 来表示变量 x 与 y 之间的依赖关系的函数,称为用参数方程确定的函数.

例如,由参数方程$\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$ 可以确定函数

$$y=\sqrt{1-x^2}\quad (x\in[-1,1])$$

三、函数的简单几何性质

1. 函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,且对于任意的 $x\in D$,都有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**;若 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,且对于任意的 $x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如,$f(x)=x$ 为奇函数,$f(x)=|x|$ 为偶函数.

注:奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

2. 函数的单调性

若函数 $y=f(x)$ 在区间 D 内有定义,对任意 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad 或 \quad (f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 D 内是**单调递增(递减)函数**,D 叫做 $f(x)$ 的单调递增(递减)区间.

3. 函数的周期性

设 $y=f(x)$ 为 D 上的函数,若存在 $T>0$,对任意 $x\in D$,

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称此函数为 D 上的**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的一个**周期**.

例如,在 $(-\infty,+\infty)$ 上,$f(x)=\cos x$ 是周期函数,其最小正周期为 2π.

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在某区间 D 内有定义,若存在 $M>0$,对任意 $x\in D$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 内是有界的.若不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$ 在 D 内无界.

在定义域内有界的函数称为有界函数.直观上看,有界函数的图形介于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

例如,$f(x)=\sin x$ 在定义域 $D=(-\infty,+\infty)$ 内有界.

例 4 判断函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

解 由 $\dfrac{1-x}{1+x}>0$,得 $-1<x<1$,所以函数定义域关于原点对称.又

$$f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

四、基本初等函数

1. 常数函数

$$y=c \quad (c\ 为任意实数)$$

定义域:$(-\infty,+\infty)$.
图形:过点$(0,c)$,且与 x 轴平行或(重合) 的直线(见图 1—3).
性质:有界,偶函数,没有最小正周期的周期函数.

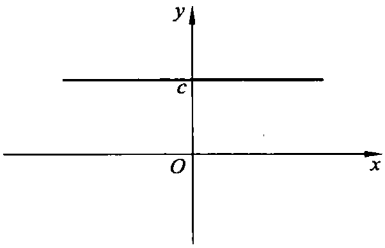

图 1—3

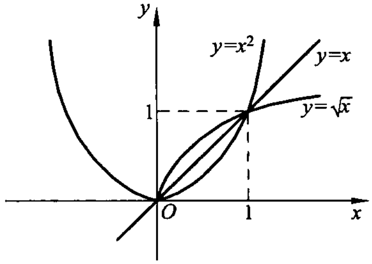

图 1—4

2. 幂函数

$$y = x^{\mu} \quad (\mu \text{ 任意实数})$$

定义域:随 μ 取值而异.
图形如图 1—4 所示.
性质:当 μ 是奇数时,$y = x^{\mu}$ 是奇函数;当 μ 是偶数时,$y = x^{\mu}$ 是偶函数.

3. 指数函数

$$y = a^{x} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

定义域:$(-\infty,+\infty)$.
图形:过点$(0,1)$,恒在 x 轴的上方(见图 1—5).
性质:当 $0 < a < 1$ 时,$y = a^{x}$ 单调递减;当 $a > 1$ 时,$y = a^{x}$ 单调递增.

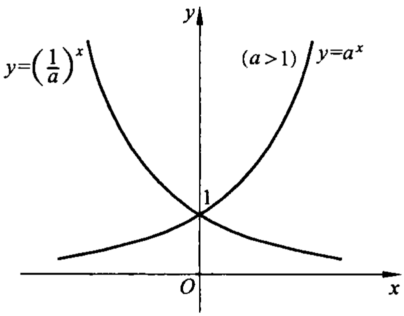

图 1—5

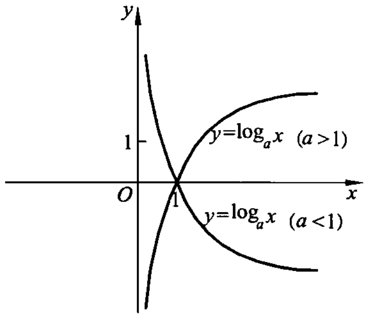

图 1—6

4. 对数函数

$$y = \log_{a} x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

定义域:$(0,+\infty)$.
图形:过点$(1,0)$,恒在 y 轴的右方(见图 1－6).
性质:当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调递减;当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 单调递增.
注意:指数函数与对数函数互为反函数,因此具有相同的单调性.

5. 三角函数

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\tan x,\quad y=\cot x$$
$$y=\sec x,\quad y=\csc x$$

(1) 正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域:$(-\infty,+\infty)$,值域:$[-1,+1]$.
图形如图 1－7 所示.
性质:有界,奇函数,最小正周期为 2π

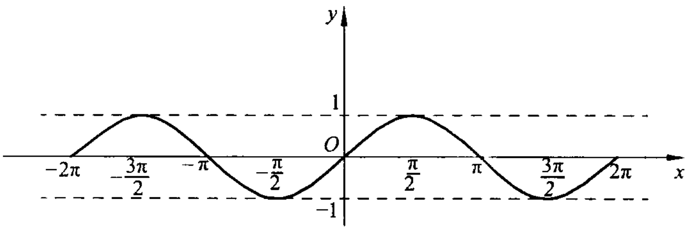

图 1－7

(2) 余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域:$(-\infty,+\infty)$,值域:$[-1,+1]$.
图形如图 1－8 所示.
性质:有界,偶函数,最小正周期为 2π.

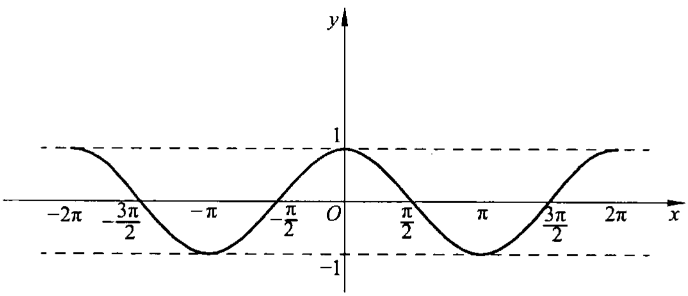

图 1－8

(3) 正切函数 $y=\tan x$ 的定义域:$\left\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.
图形如图 1－9 所示.
性质:奇函数,单调递增,最小正周期为 π.

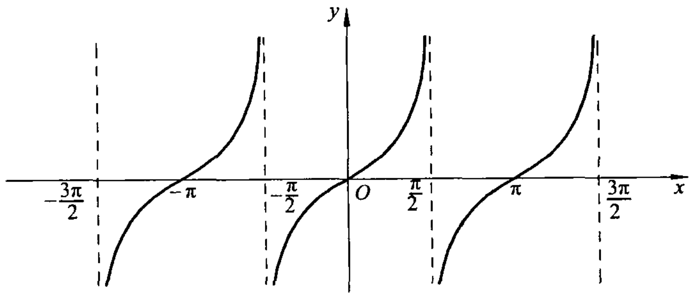

图 1－9

6. 反三角函数

$$y = \arcsin x,\quad y = \arccos x,\quad y = \arctan x,\quad y = \text{arccot}\, x$$

以上六类函数统称为基本初等函数．

五、初等函数

1. 复合函数

定义 1.2　设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$，而 u 是 x 的函数 $u = \varphi(x)$，若 $\varphi(x)$ 的函数值全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，其中 u 称为中间变量，$f(u)$ 称为外层函数，$\varphi(x)$ 称为内层函数．

例 5　已知 $y = e^u$，$u = \sin x$，试把 y 表示为 x 的复合函数．

解　$y = e^u = e^{\sin x}$.

例 6　指出函数的复合过程，并求其定义域：

(1) $y = \left(\arcsin \dfrac{1}{x}\right)^2$；　　(2) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

解　(1) $y = \left(\arcsin \dfrac{1}{x}\right)^2$ 是由函数 $y = u^2$，$u = \arcsin v$，$v = \dfrac{1}{x}$ 复合而成的．要使 $y = \left(\arcsin \dfrac{1}{x}\right)^2$ 有意义，只需 $\arcsin \dfrac{1}{x}$ 有意义，即 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$，即 $|x| \geqslant 1$. 因此，$y = \left(\arcsin \dfrac{1}{x}\right)^2$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(2) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 是由函数 $y = \sqrt{u}$，$u = x^2 - 3x + 2$ 复合而成的．要使 $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 有意义，只需 $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$，解此不等式，得 $y =$

$\sqrt{x^2-3x+2}$ 的定义域为$(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

注意：

(1) 并不是任何两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都可以构成一个复合函数，关键在于外层函数 $y=f(u)$ 的定义域与内层函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集是否为空集，若其交集不空，则这两个函数就可以复合，否则，就不能复合．例如，$y=\sqrt{u}$ 及 $u=-2-x^2$ 就不能复合成一个复合函数．因为 $u=-2-x^2$ 的值域为$(-\infty,-2]$，不包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域$[0,+\infty)$ 内，因而不能复合．

(2) 分析一个复合函数的复合过程，每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算式(即简单函数).

(3) 复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成，更多的是由基本初等函数经过四则运算构成的简单函数复合而成，因此，当分解到常数与基本初等函数的四则运算式(简单函数) 时，就不再分解了．

2. 初等函数

定义 1.3 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合所构成的，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．

例如，$y=\sin^2x$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$ 都是初等函数．而 $y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ 2x-1, & x<0\end{cases}$ 不是初等函数．

六、常用经济函数

1. 需求函数

在经济学中，某一商品的需求量是指在一定的价格水平下，消费者愿意而且有支付能力购买的商品量．影响商品需求的因素很多，商品的价格是影响需求的一个主要因素．另外，还有其他因素，如消费者收入的增减，季节的变换以及消费者的偏好等都会影响需求．如果把价格以外的其他因素都看做常量，则需求量 Q 可视为该商品的价格 p 的函数，这个函数称为需求函数，记作

$$Q=Q(p)$$

2. 供给函数

供给是与需求相对的概念．需求是就购买者而言，而供给是就生产者而言．某一商品的供给量是指在一定的价格水平下，生产者愿意生产并可供出售的商

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com