新教材
新高考
与课堂同步

主编/申建春

高考数学30年真题讲与练

选修 2 4

潇湘数学教育工作室 策划

做新题不如做高考题 做真题更切中高考题

国防科技大学出版社

高考数学

30年真题讲与练

选修2 4

顾　问　赵雄辉

策　划　潇湘数学教育工作室

主　编　申建春

副主编　周大明　曾红斌　李文英　李桂初

编委会主任　袁箭卫

编委会副主任　邓集柏　于真灵　黎书柏　张志华

编　委　唐绍伦　蒲宏金　邓交练　李　宇　黎尚清　李先红　邓成林　肖春龙　左新安
刘合平　李松云　胡良美　李清汉　李绵勇　赵永益　张有才　谷田中　罗利平
杨建军　罗自力　漆辉超　李　忠　李万春　刘永忠　杨清国　周　鹏　黄营林
张建忠　李　闯　徐　旺

国防科技大学出版社

·长沙·

图书在版编目（CIP）数据

高考数学30年真题讲与练 / 申建春主编.——长沙：国防科技大学出版社，2010.4

ISBN 978-7-81099-631-0

Ⅰ.高… Ⅱ.申… Ⅲ.数学课－高中－解题－升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 067635 号

高考数学
30年真题讲与练 | 选修2 4

主　　编　申建春

责任编辑　卢天贶

策　　划　潇湘数学教育工作室

出版发行　国防科技大学出版社

印　　刷　湖南省书报刊发行业协会湘联印刷厂

开　　本　880毫米×1230毫米　1/16

印　　张　34

字　　数　1200千

定　　价　全套90元

版　　次　2010年5月第1版

印　　次　2010年5月第1次印刷

高考数学题不神秘

数学题浩如烟海，谁也不能做完！

高考数学题不断推陈出新，永无止境！

高考数学题是关注度最高的数学题，高中学生在做，老师在做，专门研究高考数学的人也在做！

揭开高考数学题神秘的面纱，就能帮助同学们学好数学，高考中得高分.

有些高考题源自教材. 以教材上的习题为原型，适当加以改编形成高考题. 这是高考题的重要来源，每年的高考题中都可以找到这样的题. 因此，同学们要认真做好书本上的题，最好能举一反三、触类旁通. 这样，解起高考题来就不陌生，就能得心应手，就能发挥自己的最佳水平.

有些高考题源自历年的高考题. 从 1977 年恢复高考至今，已有 30 多年了，而根据高考要求，许多基本内容没有变化，也是需要同学们掌握的. 这样，在对一些基本内容的考查上，每年难以有新题出现，必然就会有许多似曾相识的高考题.

如果在学习某一内容时，将历年与这个内容相关的高考题拿来作为练习题，好处则是妙不可言.

一则了解高考在这个内容上到底考什么. 知道了高考考什么，就明确了学习的方向，知道学习中应该在哪方面下力气，做到有的放矢，事半功倍.

二则了解高考在这个内容上需要掌握哪些解题技巧. 掌握了解高考题的技巧，必能迅速找到解题思路，提高解题速度与正确率，高考数学就能得高分.

三则可以了解高考在这个内容上命题的变化趋势. 这一点很重要，掌握了高考题命题的变化趋势，做题就不会盲目，就能心中有数，就能战无不胜.

四则可以了解各省市命题的特点. 其实，你只要细心多做同一年几个省市的高考数学题，就会发现许多有趣而有用的命题特点. 这些命题特点，对同学们参加自己省市的高考非常有帮助. 因为同一内容的命题可以从很多方面入手，各省市会互相借鉴的，也会按一定的时间间隔重复出现的. 因此，多做历年高考真题，是把握高考题的有效途径.

有些同学喜欢做新题，认为新题有可能会切中高考题. 其实，这种想法不正确，至少可以说不全正确. 同学们做题都是有限的，你认为是新题，可能是因为你不能浏览所有的中学数学习题，才会感觉是新题. 做新题不如做高考题！ 每年各省市的高考数学题中都有个别新题，全国每年有近 40 套高考数学题，新题就尽在高考题中！

因此，做真题更能切中高考题！

本书就是根据上面的理念，由全国著名的、专门从事高考数学研究的潇湘数学教育工作室策划，组织了历年把关的、优秀的高三数学老师进行编写.

本书的每节由“方法指引”“真题讲解”“高考直击”三个栏目组成，每个栏目各有特色，同学们使用时，要把握好栏目的作用.

“方法指引”提示本节高考的主要内容，指点解答高考题所需要的主要技巧与方法.

“真题讲解”选用与本节内容紧密联系的高考真题，选题力求从易到难，题型全面；解题方法既考虑教材上的通用方法，又注意一些特殊技巧.每个题都给出了详细解答，以便给同学们提供解题示范，增加高考解题中的得分点.大部分题在解完后，有一个“说明”.“说明”旨在指点解题方法的思考过程、解题技巧，提醒容易出现错误的地方，网罗同类型的高考题.

“高考直击”选用的题目也是与本节内容相关的高考题，既有与“真题讲解”中类似的题，也有不同类型的题，力求将历年高考题的类型全面涉及.

“参考答案”是“高考直击”中练习题的答案.如果题目十分简单，则只给出答案.如果题目有一定的难度，则给出了详细解答.还有部分题在解答后面有“说明”，以便同学们更能全面地思考问题.

教材上有些小节的内容没有单独的高考题，我们在编写时就没有单独设立这节，而是将这节内容编在与之有紧密联系的章节里.

在使用本书时，有些章节由于高考内容比较多，题目相对较多；有些章节内容比较少，题目就相对少.因此，有些小节内容可以在学习完新课时就可立即使用本书，有些内容需要学完一章的内容后才能使用本书.同学们可以灵活使用.

大家在使用本书时，有什么好的建议，或者发现书中的一些错误，请及时转告我们，以便在修订时进一步完善.电子邮箱：shenjch66@126.com.

做新题不如做高考题！

做高考题更能切中高考题！

做高考题高考必能得高分！

最后，祝愿同学们用了本书，高考得高分.这是你的心愿，也是我们的心愿.

目 录

选修2－1

选修2－2

选修2－3

选修4-1

选修4-4

选修4-5

选修 2－1

第一章　常用逻辑用语

方法指引

高考中，常用逻辑用语主要是作为一个工具来考查同学们对高中所学数学知识，尤其是一些重要数学概念的本质的掌握情况. 这一内容主要是利用四种命题、简单逻辑连接词、全称命题、特称命题、充分条件与必要条件，来考查同学们对函数、不等式、立体几何、解析几何、三角函数等知识的掌握情况. 这一章相当于是知识大杂烩，同学们必须理解所学知识的基础，结合命题、逻辑连接词、充分条件和必要条件这些概念解题.

真题讲解

一、选择题

1. (2009，浙江文(2))“$x>0$”是“$x\neq0$”的(　　).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解　A.

若 $x>0$，则 $x\neq0$，即充分性成立；若 $x\neq0$，则 $x>0$ 不一定成立，故选 A.

2. (2008，重庆理(2))设 m、n 是整数，则“m、n 均为偶数”是“$m+n$ 是偶数”的(　　).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解　A.

由 $m+n$ 为偶数$\Rightarrow m$、n 都为偶数或 m、n 都为奇数，所以 m、n 均为偶数$\Rightarrow m+n$ 为偶数，反之不成立，故选 A.

3. (2008，江西文(1))“$|x|=|y|$”是“$x=y$”的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解　B.

由 $|x|=|y|$ 得 $x=y$ 或 $x=-y$，所以 $x=y\Rightarrow|x|=|y|$，反之不成立，故选 B.

4. (2007，北京理(3))平面 α∥平面 β 的一个充分条件是(　　)

A. 存在一条直线 a，$a\parallel\alpha$，$a\parallel\beta$；

B. 存在一条直线 a，$a\subset\alpha$，$a\parallel\beta$；

C. 存在两条平行直线 a、b，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\parallel\beta$，$b\parallel\alpha$；

D. 存在两条异面直线 a、b，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\parallel\beta$，$b\parallel\alpha$；

解　D.

A 项是既不充分也不必要条件，B 项是必要不充分条件，C 项也是必要不充分条件，D 项是充分条件. 故选 D.

5. (2007，陕西理(9))给出如下三个命题：

①四个非零实数 a,b,c,d 依次成等比数列的充要条件是 $ad=bc$；

②设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $ab\neq0$，若 $\frac{a}{b}<1$，则 $\frac{b}{a}>1$；

③若 $f(x)=\log_2x$，则 $f(|x|)$ 是偶函数.

其中不正确命题的序号是(　　)

A. ①②③　　B. ①②　　C. ②③　　D. ①③

解　B.

对于①，令 $a=1,b=2,c=2,d=4$，则 $ad=bc$，但 a、b、c、d 不成等比数列，①错误；

对于②，令 $a=1,b=-1$，满足 $\frac{a}{b}<1$，但不能推出 $\frac{a}{b}>1$，②错误；

对于③，令 $g(x)=f(|x|)=\log_2|x|,x\neq0$，则 $g(-x)=\log_2|-x|=\log_2|x|=g(x)$，所以 $f(|x|)$ 是偶函数. 故选 B.

6. (2007，宁夏理(1))已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x\leqslant1$，则(　　)

A. $\neg p$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin x\geqslant1$

B. $\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x\geqslant1$

C. $\neg p$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\sin x>1$

D. $\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x>1$

解　C.

由全称命题的否定为特称命题知选 C.

7. (2007,北京文(8))对于函数①$f(x)=|x+2|$,②$f(x)=(x-2)^2$,③$f(x)=\cos(x-2)$,判断如下两个命题的真假:

命题甲:$f(x+2)$是偶函数;

命题乙:$f(x)$在$(-\infty,2)$上是减函数,在$(2,+\infty)$上是增函数;

能使命题甲、乙均为真的所有函数的序号是(　　)

A. ①②　　B. ①③　　C. ②　　D. ③

解　C.

对于①,函数$f(x+2)=|x+4|$既不是奇函数也不是偶函数,所以①错误;对于③,$f(x+2)=\cos x$是偶函数,但$f(x)=\cos(x-2)$有多个增减区间,不能使命题乙为真命题,所以③错误. 故选C.

8. (2008,福建文(2))"$a=1$"是"直线$x+y=0$和直线$x-ay=0$互相垂直"的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

解　C.

由直线$x+y=0$和直线$x-ay=0$互相垂直得$1\times1+1\times(-a)=0$,即$a=1$,所以"$a=1$"是"直线$x+y=0$和直线$x-ay=0$互相垂直"的充要条件,故选C.

9. (2009,重庆文(2))命题"若一个数是负数,则它的平方是正数"的逆命题是(　　)

A. "若一个数是负数,则它的平方不是正数"

B. "若一个数的平方是正数,则它是负数"

C. "若一个数不是负数,则它的平方不是正数"

D. "若一个数的平方不是正数,则它不是负数"

解　B.

因为一个命题的逆命题是将原命题的条件与结论进行交换,因此逆命题为"若一个数的平方是正数,则它是负数",故选B.

10. (2008,广东理(6))已知命题p:所有有理数都是实数,命题q:正数的对数都是负数,则下列命题中为真命题的是(　　)

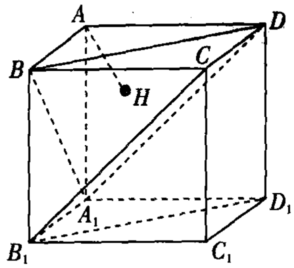
A. $(\neg p)\vee q$　　B. $p\wedge q$

C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $(\neg p)\vee(\neg q)$

解　D.

因为命题p为真命题,命题q为假命题,从而上述叙述中只有$(\neg p)\vee(\neg q)$为真命题,故选D.

11. (2007,江西理(7))如图,正方体AC_1的棱长为1,过点A作平面A_1BD的垂线,垂足为点H,则以下命题中,错误的命题是(　　)



A. 点H是$\triangle A_1BD$的垂心

B. AH垂直平面CB_1D_1

C. AH的延长线经过点C_1

D. 直线AH和BB_1所成的角为$45°$

解　D.

根据图形知AH与BB_1所成的角是AA_1与AH所成的角,连结A_1C_1,由于$A_1A=1$,$A_1C_1=\sqrt{2}$,$AC_1=\sqrt{3}$,$\sin\angle C_1AA_1=\dfrac{A_1C_1}{AC_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,$\therefore\angle C_1AA_1=\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,所以D错误. 故选D.

12. (2007,上海文(15))设$f(x)$是定义在正整数集上的函数,且$f(x)$满足:"当$f(k)\geqslant k^2$成立时,总可推出$f(k+1)\geqslant(k+1)^2$成立."那么,下列命题总成立的是(　　)

A. 若$f(1)<1$成立,则$f(10)<100$成立

B. 若$f(2)<4$成立,则$f(1)\geqslant1$成立

C. 若$f(3)\geqslant9$成立,则当$k\geqslant1$时,均有$f(k)\geqslant k^2$成立

D. 若$f(4)\geqslant25$成立,则当$k\geqslant4$时,均有$f(k)\geqslant k^2$成立

解　D.

$f(4)\geqslant25$,即$f(4)\geqslant5^2>4^2$,由$f(k)\geqslant k^2$成立时,总可推出$f(k+1)\geqslant(k+1)^2$,得$f(4)\geqslant5^2\geqslant4^2\Rightarrow f(5)\geqslant6^2\geqslant5^2\Rightarrow f(6)\geqslant7^2\geqslant6^2\Rightarrow f(k)\geqslant k^2$,而A、B、C均不成立,故选D.

13. (2006,湖南理(4))"$a=1$"是"函数$f(x)=|x-a|$在区间$[1,+\infty)$上为增函数"的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解　A.

若"$a=1$",则函数$f(x)=|x-a|=|x-1|$在区间$[1,+\infty)$上为增函数;而若$f(x)=|x-a|$在区间$[1,+\infty)$上为增函数,则$0\leqslant a\leqslant1$,所以"$a=1$"是"函数$f(x)=|x-a|$在区间$[1,+\infty)$上为增函数"的充分不必要条件,故选A.

二、填空题

14.（2005，福建文(16)）把下面不完整的命题补充完整，并使之成为真命题：

若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于__________对称，则函数 $g(x)=$______________.（注：填上你认为可以成为真命题的一种情形即可，不必考虑所有可能的情形）.

解　①x 轴，$g(x)=-3-\log_2 x$，或②y 轴，$g(x)=3+\log_2(-x)$，或③原点，$g(x)=-3-\log_2(-x)$，或④直线 $y=x$，$g(x)=2^{x-3}$.

15.（2007，上海理(10)）在平面上，两条直线的位置关系有相交、平行、重合三种. 已知 α,β 是两个相交平面，空间两条直线 l_1,l_2 在 α 上的射影是直线 s_1,s_2，l_1,l_2 在 β 上的射影是直线 t_1,t_2. 用 s_1 与 s_2，t_1 与 t_2 的位置关系，写出一个总能确定 l_1 与 l_2 是异面直线的充分条件：________________.

解　$s_1/\!/s_2$，并且 t_1 与 t_2 相交（或 $t_1/\!/t_2$，并且 s_1 与 s_2 相交）.

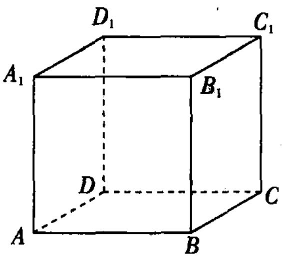
16.（2006，山东理(16)）下列四个命题中，真命题的序号有_______（写出所有真命题的序号）.

①将函数 $y=|x+1|$ 的图象按向量 $\boldsymbol{v}=(-1,0)$ 平移，得到的图象对应的函数表达式为 $y=|x|$，

②圆 $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x$ 相交，所得弦长为 2，

③若 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，则 $\tan\alpha\cot\beta=5$，

④如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，P 为底面 $ABCD$ 内一动点，P 到平面 AA_1D_1D 的距离与到直线 CC_1 的距离相等，则点 P 的轨迹是抛物线的一部分.



解　③④.

①错误，得到的图象对应的函数表达式应为 $y=|x-2|$；

②错误，圆心坐标为 $(-2,1)$，到直线 $y=\frac{1}{2}x$ 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}>$ 半径 2，故圆与直线相离；

③正确，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，两式相加，得 $2\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{6}$，两式相减，得 $2\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，故将上两式相除，即得 $\tan\alpha\cot\beta=5$；

④正确，点 P 到平面 ADD_1 的距离就是点 P 到直线 AD 的距离，点 P 到直线 CC_1 的距离就是点 P 到点 C 的距离，由抛物线的定义可知点 P 的轨迹是抛物线.

三、解答题

17.（2006，全国Ⅱ文(21)）设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=ax^2-2x-2a$. 若 $f(x)>0$ 的解集为 A，$B=\{x|1<x<3\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解　由 $f(x)$ 为二次函数知 $a\neq0$，令 $f(x)=0$，解得其两根为 $x_1=\frac{1}{a}-\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$，$x_2=\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}$，

由此可知 $x_1<0$，$x_2>0$，

（ⅰ）当 $a>0$ 时，$A=\{x|x<x_1\}\cup\{x|x>x_2\}$，

$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2<3$，即 $\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}<3$，解得 $a>\frac{6}{7}$，

（ⅱ）当 $a<0$ 时，$A=\{x|x_1<x<x_2\}$，

$A\cap B\neq\varnothing$ 的充要条件是 $x_2>1$，即 $\frac{1}{a}+\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}>1$，解得 $a<-2$，

综上，使 $A\cap B\neq\varnothing$ 成立的 a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{6}{7},+\infty\right)$.

高考直击

1.（2009，安徽文(3)）“$a+c>b+d$”是“$a>b$ 且 $c>d$”的（　　）

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

2.（2009，四川文(7)）已知 a,b,c,d 为实数，且 $c>d$. 则“$a>b$”是“$a-c>b-d$”的（　　）.

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3.（2009，浙江理(2)）已知 a,b 是实数，则“$a>0$ 且 $b>0$”是“$a+b>0$ 且 $ab>0$”的（　　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. (2008,湖北理(2))若非空集合A,B,C满足$A\cup B=C$,且B不是A的子集,则(　　)

A. "$x\in C$"是"$x\in A$"的充分条件但不是必要条件

B. "$x\in C$"是"$x\in A$"的必要条件但不是充分条件

C. "$x\in C$"是"$x\in A$"的充要条件

D. "$x\in C$"既不是"$x\in A$"的充分条件也不是"$x\in A$"的必要条件

5. (2009,江西文(1))下列命题是真命题的为(　　).

A. 若$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$,则$x=y$

B. 若$x^2=1$,则$x=1$

C. 若$x=y$,则$\sqrt{x}=\sqrt{y}$

D. 若$x<y$,则$x^2<y^2$

6. (2009,天津理(3))命题"存在$x_0\in\mathbf{R},2^{x_0}\leqslant 0$"的否定是(　　)

A. 不存在$x_0\in\mathbf{R},2^{x_0}>0$

B. 存在$x_0\in\mathbf{R}$, $2^{x_0}\geqslant 0$

C. 对任意的$x\in\mathbf{R},2^x\leqslant 0$

D. 对任意的$x\in\mathbf{R},2^x>0$

7. (2008,安徽文(4))"$a<0$"是"方程$ax^2+1=0$有一个负数根"的(　　)

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. (2009,天津文(3))设$x\in\mathbf{R}$,则"$x=1$"是"$x^3=x$"的(　　)

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. (2007,湖南理(3))设M,N是两个集合,则"$M\cup N\neq\varnothing$"是"$M\cap N\neq\varnothing$"的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

10. (2006,江西文(4))下列四个条件中,p是q的必要不充分条件的是(　　)

A. $p:a>b,q:a^2>b^2$

B. $p:a>b,q:2^a>2^b$

C. $p:ax^2+by^2=c$为双曲线,$q:ab<0$

D. $p:ax^2+bx+c>0,q:\frac{c}{x^2}-\frac{b}{x}+a>0$

11. (2006,天津理(4))设集合$M=\{x|0<x\leqslant 3\}$,$N=\{x|0<x\leqslant 2\}$,那么"$a\in M$"是"$a\in N$"的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

12. (2008,湖北文(3))若集合$p=\{1,2,3,4\}$,$Q=\{x|0<x<5,x\in\mathbf{R}\}$,则(　　)

A. "$x\in P$"是"$x\in Q$"的充分条件但不是必要条件

B. "$x\in P$"是"$x\in Q$"的必要条件但不是充分条件

C. "$x\in P$"是"$x\in Q$"的充要条件

D. "$x\in P$"既不是"$x\in Q$"的充分条件也不是"$x\in Q$"的必要条件

13. (2005,福建文(7))已知直线m、n与平面α,β,给出下列三个命题:

①若$m/\!/\alpha,n/\!/\alpha$,则$m/\!/n$;

②若$m/\!/\alpha,n\perp\alpha$,则$n\perp m$;

③若$m\perp\alpha,m/\!/\beta$,则$\alpha\perp\beta$.

其中真命题的个数是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

14. (2005,浙江理(6))设α、β为两个不同的平面,l,m为两条不同的直线,且$l\subset\alpha,m\subset\beta$,有如下的两个命题:①若$\alpha/\!/\beta$,则$l/\!/m$;②若$l\perp m$,则$\alpha\perp\beta$. 那么(　　)

A. ①是真命题,②是假命题

B. ①是假命题,②是真命题

C. ①②都是真命题

D. ①②都是假命题

15. (2007,江苏理(4))已知两条直线m,n,两个平面α,β. 给出下面四个命题:

①$m/\!/n,m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\alpha$;

②$\alpha/\!/\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta\Rightarrow m/\!/n$;

③$m/\!/n,m/\!/\alpha\Rightarrow n/\!/\alpha$;

④$\alpha/\!/\beta,m/\!/n,m\perp\alpha\Rightarrow n\perp\beta$.

其中正确命题的序号是(　　)

A. ①、③　　B. ②、④　　C. ①、④　　D. ②、③

16.（2007，湖北理(4)）平面 α 外有两条直线 m 和 n，如果 m 和 n 在平面 α 内的射影分别是 m' 和 n'，给出下列四个命题：

①$m'\perp n'\Rightarrow m\perp n$；

②$m\perp n\Rightarrow m'\perp n'$；

③m' 与 n' 相交 $\Rightarrow m$ 与 n 相交或重合；

④m' 与 n' 平行 $\Rightarrow m$ 与 n 平行或重合.

其中不正确的命题个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

17.（2008，湖南文(2)）"$|x-1|<2$ 成立"是"$x<3$ 成立"的（　　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

18.（2007，江西文(8)）若 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则下列命题中正确的是（　　）

A. $\sin x<\frac{2}{\pi}x$　　B. $\sin x<\frac{3}{\pi}x$

C. $\sin x>\frac{2}{\pi}x$　　D. $\sin x>\frac{3}{\pi}x$

19.（2006，福建文(3)）"$\tan\alpha=1$"是"$\alpha=\frac{\pi}{4}$"的（　　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

20.（2009，湖北文(3)）"$\sin\alpha=\frac{1}{2}$"是"$\cos2\alpha=\frac{1}{2}$"的（　　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

21.（2007，天津理(3)）"$\theta=\frac{2\pi}{3}$"是"$\tan\theta=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$"的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

22.（2009，辽宁文(11)）下列四个命题：

p_1：$\exists x\in(0,+\infty)$，$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^x$

p_2：$\exists x\in(0,1)$，$\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{3}}x$

p_3：$\forall x\in(0,+\infty)$，$\left(\frac{1}{2}\right)^x>\log_{\frac{1}{2}}x$

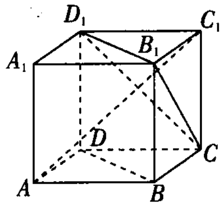
p_4：$\forall x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\log_{\frac{1}{3}}x$

其中的真命题是（　　）.

A. p_1，p_3　　B. p_1，p_4

C. p_2，p_3　　D. p_2，p_4

23.（2007，四川文(4)）如图，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，下面结论错误的是（　　）



A. BD∥平面 CB_1D_1

B. $AC_1\perp BD$

C. $AC_1\perp$ 平面 CB_1D_1

D. 异面直线 AD 与 CB_1 所成的角为 $60°$

24.（2006，安徽理(4)）设 a、$b\in\mathbf{R}$，已知命题 p：$a=b$；命题 q：$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，则 p 是 q 成立的（　　）

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

25.（2005，北京理(2)）"$m=\frac{1}{2}$"是"直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直"的（　　）

A. 充分必要条件

B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

26.（2004，福建理(3)）命题 p：若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分而不必要条件；命题 q：函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. 则（　　）

A. "p 或 q"为假　　B. "p 且 q"为真

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

第二章　圆锥曲线与方程

第一节　椭圆

方法指引

若动点 P 到两定点 F_1,F_2 的距离之和是定值，则点 P 的轨迹是椭圆．通常将这个定义称为椭圆的第一定义．

若动点 P 到定点 F 的距离与到定直线 l 的距离的比是一个大于 0 小于 1 的常数，则动点 P 的轨迹是椭圆．这个定义称为椭圆的第二定义．

运用椭圆定义解题是有关椭圆内容的高考题考查得最多的内容．特别是运用第一定义的表达式 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，结合解三角形，在求椭圆离心率、线段的长等方面应用非常广泛．

椭圆的标准方程有两个：当焦点在 x 轴上时，方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦点是 $(\pm c,0)$，长轴顶点是 $(\pm a,0)$，短轴顶点是 $(0,\pm b)$，准线是 $x=\pm\frac{a^2}{c}$；当焦点在 y 轴上时，方程为 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$，焦点是 $(0,\pm c)$，长轴顶点是 $(0,\pm a)$，短轴顶点是 $(\pm b,0)$，准线是 $y=\pm\frac{a^2}{c}$．不管哪种形式的方程，都有 $a^2=b^2+c^2$，离心率 $e=\frac{c}{a}$．

将椭圆与直线结合是椭圆问题综合题的主要内容，解决的办法要用到一元二次方程根与系数的关系、基本不等式、直线方程等知识，具体思考方法在后面会详细讲解．

真题讲解

一、选择题

1．(2008，上海春季(14))已知椭圆 $\frac{x^2}{10-m}+\frac{y^2}{m-2}=1$，长轴在 y 轴上．若焦距为 4，则 m 等于(　　)．

A. 4　　B. 5　　C. 7　　D. 8

解　D.

因为长轴在 y 轴上，所以 $a^2=m-2,b^2=10-m$．

因此，$c^2=m-2-(10-m)=2m-12$．

而 $2c=4$，则 $c=2$，即 $2m-12=2^2\Rightarrow m=8$，选 D．

说明　椭圆的标准方程有两个：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$，其中的 a 表示半长轴的长．在含有参数的椭圆方程中，一定要分清哪个是 a．

2．(2007，全国Ⅱ文(11))已知椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍，则椭圆的离心率等于(　　)．

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解　D.

因为 $2a=2\times 2b,a=2b$，则 $c=\sqrt{(2b)^2-b^2}=\sqrt{3}b$．

因此，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}b}{2b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，选 D．

3．(1994，全国理(2))如果方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，那么实数 k 的取值范围是(　　)．

A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,2)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,1)$

解　D.

将方程化为标准方程是：$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{2}{k}}=1$．

因为焦点在 y 轴上，所以 $\begin{cases}k>0,\\ \frac{2}{k}>2.\end{cases}$ 解得 $0<k<1$，选 D．

说明　这里有两点值得注意：一是原椭圆方程不是标准方程，但解题过程中要用到 a,b，则先要化为标准方程；二是焦点在 y 轴上，要注意左边的分母哪个是 a^2．

4．(2009，江西理(6))过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于点 P，F_2 为右焦点，若 $\angle F_1PF_2=60°$，则椭圆的离心率为(　　)．

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

解　B.

因为$|PF_1|=|F_1F_2|\cot60^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}c$，$|PF_2|=\frac{|F_1F_2|}{\sin60^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{3}c$，所以

$$2a=|PF_1|+|PF_2|=\frac{2\sqrt{3}}{3}c+\frac{4\sqrt{3}}{3}c=2\sqrt{3}c\Rightarrow a=\sqrt{3}c.$$

因此，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{3}c}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，选B.

说明　$|PF_1|+|PF_2|=2a$，这是椭圆定义的表达式. 解题时，要善于将$|PF_1|$，$|PF_2|$，a，b，c联系起来. 本题就是2004年北京市春季高考数学第3题，同时与2004年福建省高考理科数学第4题一致.

5. (2008，天津理(5))设椭圆$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{m^2-1}=1(m>1)$上一点$P$到其左焦点的距离为3，到右焦点的距离为1，则点$P$到右准线的距离为(　　).

A. 6　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

解　B.

依据题意，椭圆的长轴长是$3+1=4$，则

$a=m=2, b=\sqrt{m^2-1}=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}, c=1, e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}.$

设P到右准线的距离是d，则$\frac{1}{d}=\frac{1}{2}\Rightarrow d=2$，选B.

说明　在求点P到右准线的距离时，用到了这样一个结论：椭圆上一点到一个焦点的距离与到相应准线的距离的比等于离心率. “相应准线”就是与这个焦点距离最近的那条准线，也就是右准线是右焦点的相应准线，左准线是左焦点的相应准线.

6. (2007，湖南文(9))设F_1、F_2分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$P$是其右准线上纵坐标为$\sqrt{3}c$($c$为半焦距)的点，且$|F_1F_2|=|F_2P|$，则椭圆离心率是(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解　D.

依据已知，点P坐标是$\left(\frac{a^2}{c},\sqrt{3}c\right)$.

由$|F_1F_2|=|F_2P|$得，

$$2c=\sqrt{\left(\frac{a^2}{c}-c\right)^2+(\sqrt{3}c-0)^2}.$$

整理得，$c^4=(a^2-c^2)^2$，即$c^2=a^2-c^2\Rightarrow a=\sqrt{2}c$.

故离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{2}c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，选D.

7. (2004，湖北理(6))已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，点$P$在椭圆上，若$P$、$F_1$、$F_2$是一个直角三角形的三个顶点，则点$P$到$x$轴的距离为(　　).

A. $\frac{9}{5}$　　C. 3　　C. $\frac{9\sqrt{7}}{7}$　　D. $\frac{9}{4}$

解　D.

$a=4, b=3, c=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}.$

若F_1，F_2中有一个是直角三角形的直角顶点，不妨设F_2是直角顶点，则过$F_2(\sqrt{7},0)$，且垂直于x轴的直线方程是：$x=\sqrt{7}$. 代入椭圆方程中有$\frac{7}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，求得$y=\pm\frac{9}{4}$. 因此，点$P$到$x$轴的距离是$\frac{9}{4}$，选D.

若P是直角顶点，则有$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$.

而$|F_1F_2|^2=(2\sqrt{7})^2=28$，$|PF_1|+|PF_2|=2a=8$. (1)

因此，$|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=64$，即$|PF_1|\cdot|PF_2|=18$. (2)

由(1)，(2)知，$|PF_1|$，$|PF_2|$无实数解. 因此，点P不可能是直角顶点.

综上所述，选D.

说明　证明点P不是直角顶点这一步很有必要，只有这样思考，才是完整地解答了本题.

8. (2002，北京理(6))给定四条曲线：(1)$x^2+y^2=\frac{5}{2}$，(2)$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，(3)$x^2+\frac{y^2}{4}=1$，(4)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. 其中与直线$x+y-\sqrt{5}=0$仅有一个交点的曲线是(　　).

A. (1)(2)(3)　　B. (2)(3)(4)

C. (1)(2)(4)　　D. (1)(3)(4)

解　D.

(1)表示圆，则圆心(0,0)到直线$x+y-\sqrt{5}=0$的距离是$\frac{|-\sqrt{5}|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，圆的半径是$\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，所以圆与直线相切，即只有一个交点，从而否定B.

(2)表示长轴在x轴上的椭圆，其中一个顶点是(3,0)，而直线$x+y-\sqrt{5}=0$与x轴交点是$(\sqrt{5},0)$. $\sqrt{5}<3$，所以直线与椭圆有两个交点，则可否定A，C，故选D.

说明　如果利用解方程组，求直线与四条曲线的交点坐标的办法，则比较繁琐. 还可以画草图，只要将数据取准确，也容易判断出结果.

9. (2009,全国Ⅰ理(12))已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F,右准线为 l,点 $A\in l$,线段 AF 交 C 于点 B. 若 $\overrightarrow{FA}=3\overrightarrow{FB}$,则 $|\overrightarrow{AF}|=$(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 3

解　A.

因为 $a=\sqrt{2}, b=1$,则 $c=1, F(1,0), l:x=2$.

设 $A(2,y_0)$,则 $\overrightarrow{FA}=(1,y_0)$,$\overrightarrow{FB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FA}=\left(\frac{1}{3},\frac{y_0}{3}\right)$.

那么,设 $B(x_B,y_B)$,则 $\overrightarrow{FB}=(x_B-1,y_B)$.

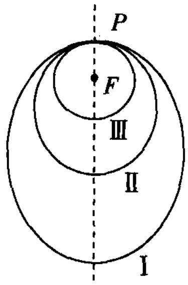
因此,$x_B-1=\frac{1}{3}, x_B=\frac{4}{3}, y_B=\frac{y_0}{3}$,即 $B\left(\frac{4}{3},\frac{y_0}{3}\right)$.

因为 $B\left(\frac{4}{3},\frac{y_0}{3}\right)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上,所以 $\left(\frac{4}{3}\right)^2+2\left(\frac{y_0}{3}\right)^2=2\Rightarrow y_0=\pm 1$.

所以 $\overrightarrow{FA}=(1,1)$ 或 $(1,-1)$. 因此,$|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{2}$,选 A.

说明　将向量转化为坐标表示,便于利用椭圆方程计算. 因此,向量 $\overrightarrow{FA}$,$\overrightarrow{FB}$ 用坐标表示后,就容易发现点 B 的坐标. 这样就与椭圆方程联系起来了. 近年的高考中出现了比较多的用向量表示线段间的关系的题目,我们要掌握这类题目解决的方法.

10. (2008,湖北理(10))如图所示,"嫦娥一号"探月卫星沿地月转移轨道飞向月球,在月球附近一点 P 轨进入以月球球心 F 为一个焦点的椭圆轨道Ⅰ绕月飞行,之后卫星在 P 点第二次变轨进入仍以 F 为一个焦点的椭圆轨道Ⅱ绕月飞行,最终卫星在 P 点第三次变轨进入以 F 为圆心的圆形轨道Ⅲ绕月飞行,若用 $2c_1$ 和 $2c_2$ 分别表示椭圆轨道Ⅰ和Ⅱ的焦距,用 $2a_1$ 和 $2a_2$ 分别表示椭圆轨道Ⅰ和Ⅱ的长轴的长,给出下列式子:



①$a_1+c_1=a_2+c_2$;②$a_1-c_1=a_2-c_2$;③$a_2c_1>a_1c_2$;④$\frac{c_1}{a_1}<\frac{c_2}{a_2}$.

其中正确式子的序号是(　　).

A. ①③　　B. ②③　　C. ①④　　D. ②④

解　B.

结合题目条件,细致观察图形,可以发现两个规律:$|PF|$ 始终是定值,椭圆轨道Ⅰ的长轴大于椭圆轨道Ⅱ的长轴,即有 $2a_1>2a_2$,为此得到如下解法.

由题意知:$PF=a-c$,所以 $a_1-c_1=a_2-c_2$,故②正确.

又因为 $a_1>a_2$,所以 $\frac{a_1-c_1}{a_1}<\frac{a_2-c_2}{a_2}$,即 $1-\frac{c_1}{a_1}<1-\frac{c_2}{a_2}$,所以 $a_2c_1>a_1c_2$,故③正确,因此选 B.

说明　②容易发现是对的,难在如何想到③是对的. 因为①显然不对,则③与④必有一个对,所以就从 $a_1-c_1=a_2-c_2$ 与 $a_1>a_2$ 上入手. 那么,就有了推导③的过程. 从这里,我们也得到了解答选择题的一个方法,即使有些选择支比较难,但可以先否定或肯定一两个选择支,然后再思考余下的选择支,就容易许多了.

11. (2007,江西理(9))设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $e=\frac{1}{2}$,右焦点为 $F(c,0)$,方程 $ax^2+bx-c=0$ 的两个实根分别为 x_1 和 x_2,则点 $P(x_1,x_2)$(　　).

A. 必在圆 $x^2+y^2=2$ 内

B. 必在圆 $x^2+y^2=2$ 上

C. 必在圆 $x^2+y^2=2$ 外

D. 以上三种情形都有可能

解　A.

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,所以 $a=2c, b^2=a^2-c^2=4c^2-c^2=3c^2$.

因为方程 $ax^2+bx-c=0$ 的两个实根分别为 x_1 和 x_2,所以 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=-\frac{c}{a}$.

则 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2+\frac{2c}{a}=\frac{3c^2}{4c^2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{7}{4}<2$,所以点 $P(x_1,x_2)$ 必在圆 $x^2+y^2=2$ 内,选 A.

说明　如何想到要计算 $x_1^2+x_2^2$ 的? 这是从选择支上得到的启发. 题目问的是点 $P(x_1,x_2)$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系,则必须计算 $x_1^2+x_2^2$ 与 2 的大小.

12. (2005,山东理(12))设直线 $l:2x+y+2=0$ 关于原点对称的直线为 l',若 l' 与椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 的交点为 A、B,点 P 为椭圆上的动点,则使 $\triangle PAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ 的点 P 的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解　B.

l' 的方程是:$-2x-y+2=0$,即 $2x+y-2=0$. 它与

两坐标轴的交点是椭圆的顶点，则$|AB|=\sqrt{5}$.

设$\triangle PAB$的AB边上的高是h，则$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}h=\frac{1}{2}$，

$h=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

设与l'平行，且相距为$\frac{1}{\sqrt{5}}$的直线l_1的方程是：$2x+y+k=0$. 根据两平行直线间的距离公式，得$\frac{|k+2|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

$|k+2|=1$，$k=-1$或$k=-3$.

当$k=-1$时，l_1的方程是$2x+y-1=0$，与y轴的交点是$(0,1)$，在椭圆内部，所以l_1与椭圆有两个交点满足题目条件.

当$k=-3$时，l_1的方程是$2x+y-3=0$，与y轴的交点是$(0,3)$，与x轴的交点是$\left(\frac{3}{2},0\right)$，显然分别在椭圆顶点的上面与右面，则此时直线与椭圆没有交点.

因此，满足条件的点P有2个，选B.

说明 本题如果选用方法不当的方法，会出现比较复杂的计算.

第一，l'与l关于原点对称，则l中的x用$-x$代替，y用$-y$代替就得到l'的方程. 熟悉这一点，可省去很多计算过程.

第二，如果设$P(x,y)$，则就需要解方程组$\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{4}=1,\\ \frac{|2x+y-2|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}},\end{cases}$也是有比较大的计算量. 但是，利用平行线间的距离、l_1与两坐标轴交点与椭圆的位置关系，则计算量减少了许多.

二、填空题

13.（2009，广东理(11)）已知椭圆G的中心在坐标原点，长轴在x轴上，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且G上一点到G的两个焦点的距离之和为12，则椭圆G的方程为______________.

解 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

设椭圆G的方程是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

因为G上一点到G的两个焦点的距离之和为12，所以$2a=12$，$a=6$.

又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$c=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$，故$b^2=a^2-c^2=36-27=9$.

因此，椭圆G的方程是$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$.

14.（2008，浙江理(12)）已知F_1、F_2为椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的两个焦点，过$F_1$的直线交椭圆于$A$，$B$两点，若$|F_2A|+|F_2B|=12$，则$|AB|=$__________.

解 8.

根据椭圆定义有，$|AF_1|+|AF_2|=10$，$|BF_1|+|BF_2|=10$. 两式相加得

$(|AF_1|+|BF_1|)+(|AF_2|+|BF_2|)=20$.

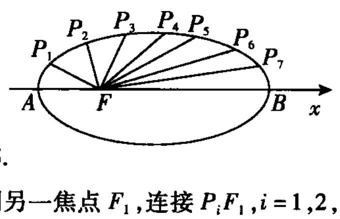
而$|AF_1|+|BF_1|=|AB|$，$|F_2A|+|F_2B|=12$，所以$|AB|=8$.

说明 两次利用椭圆定义，避免了繁杂的运算. 用同样的方法可解下题：

（2006，全国Ⅱ理(5)）已知$\triangle ABC$的顶点B，C在椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$上，顶点A是椭圆的一个焦点，且椭圆的另外一个焦点在BC边上，则$\triangle ABC$的周长是（　　）.（答案为C）

A. $2\sqrt{3}$　　B. 6　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 12

15.（2006，四川理(15)）如图，把椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$的长轴$AB$分成8等份，过每个分点作$x$轴的垂线交椭圆的上半部分于$P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7$七个点，$F$是椭圆的一个焦点，则$|P_1F|+|P_2F|+|P_3F|+|P_4F|+|P_5F|+|P_6F|+|P_7F|=$__________.



解 35.

取椭圆另一焦点F_1，连接P_iF_1，$i=1,2,\cdots,7$.

根据已知及椭圆的对称性有，$|P_iF|=|P_{8-i}F_1|$，$i=1,2,\cdots,7$.（※）

根据椭圆定义有，$|P_iF|+|P_iF_1|=10$，$i=1,2,\cdots,7$.

分别令$i=1,2,\cdots,7$，得到7个等式，并将这些等式相加，结合（※）得到

$2(|P_1F|+|PF_2|+|PF_3|+|PF_4|+|PF_5|+|PF_6|+|PF_7|)=70$.

因此，$|P_1F|+|P_2F|+|P_3F|+|P_4F|+|P_5F|+|P_6F|+|P_7F|=35$.

说明 本题看起来很难，其实，我们只要稍微思考一下就不难了.

思考一：难道要求我们一一求出每条线段的长度吗？当然，根据已知，可以一一求出，但计算太繁了. 一

个填空题不可能要求算这么多的！

思考二：简便方法在哪里？不一一计算，而已知的7个点都在椭圆上，且都是与焦点连接的，这就促使我们想到椭圆的定义. 但用椭圆定义解题，还需要一个焦点呀，莫急，再作出另一个焦点，将相关的线段再连接起来，就出现了柳暗花明的局面啦.

思考三：解本题得到了什么启发？启发之一就是如果碰到很复杂的计算时，应该想想是否能另辟蹊径；启发之二是要用椭圆定义解题，必须构造椭圆定义解题所需要的条件.

16. (2008，全国Ⅰ理(15))在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，$\cos B=-\frac{7}{18}$. 若以A，B为焦点的椭圆经过点C，则该椭圆的离心率$e=$________.

解　$\frac{3}{8}$.

设$|AB|=|BC|=2c$，由余弦定理得$|AC|^2=4c^2+4c^2-8c^2\cdot\left(-\frac{7}{18}\right)=\frac{100c^2}{9}$，$|AC|=\frac{10c}{3}$.

依据条件，$|AC|+|BC|=2a$，即$\frac{10c}{3}+2c=2a$，$\frac{c}{a}=\frac{3}{8}$. 故所求离心率是$\frac{3}{8}$.

17. (2007，江苏(15))在平面直角坐标系xOy中，已知$\triangle ABC$的顶点$A(-4,0)$和$C(4,0)$，顶点B在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上，则$\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=$________.

解　$\frac{5}{4}$.

由已知得到A，C是椭圆的焦点，则$AB+BC=10$.

又由正弦定理得，$\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\frac{AB+BC}{AC}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$.

说明　将解三角形中的正弦定理、余弦定理结合到椭圆中，要注意三角形的边与椭圆中a，b，c的联系. 如本题中，三角形的边AB，BC的长就是椭圆的焦距$2c$，而边AC，BC的和就是椭圆的长轴长.

18. (2007，福建理(14))已知正方形$ABCD$，则以A、B为焦点，且过C、D两点的椭圆的离心率为________.

解　$\sqrt{2}-1$.

因为$ABCD$是正方形，所以设$|AB|=|BC|=|AD|=2c$，则$|BD|=2\sqrt{2}c$.

又根据椭圆定义有$|DA|+|DB|=2a$，即$2c+2\sqrt{2}c=2a$，$\frac{c}{a}=\sqrt{2}-1$. 故所求离心率是$\sqrt{2}-1$.

19. (2009，上海理(9))已知F_1、F_2是椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$P$为椭圆$C$上一点，且$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$. 若$\triangle PF_1F_2$的面积为9，则$b=$________.

解　3.

设$|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则$m+n=2a$. (1)

因为$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$，所以$m^2+n^2=|F_1F_2|^2=4c^2$. (2)

又$\triangle PF_1F_2$的面积为9，则$\frac{1}{2}mn=9$. (3)

由(2)得，$(m+n)^2-2mn=4c^2$，即$4a^2-36=4c^2$，$a^2-c^2=9$. 因此，$b=3$.

说明　要求b，但它在式子中都没有出现，a，c都出现了，自然想到$b^2=a^2-c^2$. 因此，变出a^2-c^2就是这样想到的.

20. (2007，辽宁理(14))设椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一点$P$到左准线的距离为10，$F$是该椭圆的左焦点，若点$M$满足$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF})$，则$|\overrightarrow{OM}|=$________.

解　2.

椭圆的左准线是$x=-\frac{25}{3}$，设$P(x,y)$，则$\frac{|3x+25|}{3}=10$，$x_1=\frac{5}{3}$，$x_2=-\frac{55}{3}$.

由于点P在椭圆上，则$x_2=-\frac{55}{3}$不合条件，舍去.

将$x=\frac{5}{3}$代入椭圆方程，求得$y^2=\frac{128}{9}$.

因为$\overrightarrow{OP}=(x,y)$，$\overrightarrow{OF}=(-3,0)$，所以$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}=(x-3,y)$.

因此，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF})=\frac{1}{2}(x-3,y)$，则

$|\overrightarrow{OM}|=\frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5}{3}-3\right)^2+\frac{128}{9}}=2$.

说明　由条件很容易想到利用椭圆的另一个定义求$|PF|$. 这样做会陷入比较复杂的计算中. 而将向量转化为坐标表示，计算相对简单. 因此，解题时方法的选择很重要.

21. (2003，北京春季理(15))椭圆C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$在第一象限部分的一点$P$，以点$P$横坐标作为长轴长，纵坐标作为短轴长作椭圆$C_2$，如果$C_2$的离心率等于$C_1$的离心率，则点$P$的坐标为________.

解　$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$.

设$P(m,n)$，$m>0$，$n>0$. 那么$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1$. (1)

又由两椭圆的离心率相等得，$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=$