高等职业教育文化基础课通用教材(2年制)

高等数学

GAODENG
SHUXUE

陈笑缘　于　信　主编

中国财政经济出版社

高等职业教育文化基础课通用教材

（2年制）

高 等 数 学

陈笑缘 于 信 主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/陈笑缘，于信主编．—北京：中国财政经济出版社，2004.7
高等职业教育文化基础课通用教材．2年制
ISBN 7-5005-7285-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．①陈…②于…　Ⅲ．数学-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ．029

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第070624号

中国财政经济出版社出版
URL：http://www.cfeph.cn
E-mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮政编码：100036
发行电话：010-88190616　88190655（传真）
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×960毫米　16开　15印张　242000字
2004年8月第1版　2006年12月北京第4次印刷
定价：18.00元
ISBN 7-5005-7285-9/O·0029
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前言

为了满足高等职业技术教育（学制）改革的需要，本教材根据教育部制定的“高职高专数学教学的基本要求”，遵循“应用为主，够用为度”的原则编写。

在编写过程中，努力体现高等职业技术教育特点，以实际问题例子为引线，使抽象的概念形象化。同时，让学生体会到数学是来源于实际，又能指导实际的一种思维创造。用图形或例子解释概念、性质、定理，淡化理论推导。逐步渗透数学建模的思想，注重应用意识与创新思维能力的培养。适当介绍了 MATLAB 数学软件应用、数学家小知识等，激发学生的学习兴趣，扩大知识面，发挥数学教育的功能。

本教材主要内容有：一元微积分、线性代数及其应用、概率统计初步三大模块，可供经管类各专业师生使用。在教材中标有“*”的内容，可根据具体教学情况酌情选用。教材尽量做到通俗易懂，由浅入深，富于启发。

与本教材相配套的有《高等数学学习辅导》与《高等数学教师参考书》，供学生学习与教师教学使用。

本套教材由陈笑缘总纂定稿。陈笑缘、于信任主编，叶迎春任副主编。编写人员及分工如下（按章节顺序排列）：

第一章　叶迎春

第二章　张　拓　陈笑缘

第三章　翟本瑶

第四章　胡建钧　陈笑缘

第五章　于　信

第六章　王春珊

参加编写的院校有浙江商业职业技术学院、山东商业职业技术学院、安徽商贸职业技术学院、河南职业技术学院、陕西财经职业技术学院和安徽工

商职业技术学院。

本书在编写过程中得到中国财政经济出版社的热情关怀和指导，以及各编写同志所在院校的大力支持与协作，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2004年6月

目 录

第一章
函数、极限与连续

内容提要

函数是微积分学研究的主要对象，极限是微积分学研究的基本工具. 本章在复习与补充函数相关知识的基础上，介绍微积分学的重要概念——极限，进而讨论函数的连续性.

第一节　函　　数

一、函数的概念与性质

1. 函数的概念

定义 1·1　设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在实数的某一范围 D 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照某种对应法则 f，有惟一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),\ x\in D$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**函数**(或因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0 \in D$，通过对应法则 f，函数 y 有惟一确定的值 y_0 与之相对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$在 x_0 处的**函数值**，记作

$$y_0=f(x_0)\text{或 } y\Big|_{x=x_0}=f(x_0)$$

全体函数值的集合，称为函数的**值域**.

函数的表示方法，一般有解析法、表格法、图象法. 在研究函数时，一定要考虑它的定义域. 当函数用解析法表示时，求函数的定义域的原则是使函数表达式有意义. 因此，要求：

(1) 分式，分母必须不等于零；

(2) 偶次根式，被开方式必须大于等于 0；

(3) 对数，真数必须大于零；底大于零且不等于 1；

(4) 正切符号下的式子必须不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，
余切符号下的式子必须不等于 $k\pi(k\in Z)$；

(5) 反正弦符号下的式子的绝对值必须小于等于 1，
反余弦符号下的式子的绝对值必须小于等于 1；

(6) 表达式中同时有以上几种情况，需同时考虑，并求它们的交集；

(7) 在不同的范围内用不同的解析式表示的函数称为分段函数. 如：$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ 就是一个分段函数. 分段函数的定义域为各段自变量取值集合的并集.

例 1： 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{x^2-16}$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\ln(2x+4)$

(3) $f(x)=\arcsin\dfrac{1+x}{2}$

解： (1) 因为 $x^2-16\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 4$ 或 $x\leqslant -4$，
所以此函数定义域为$(-\infty, -4]\cup[4, +\infty)$.

(2) 因为$\begin{cases}3-x>0\\ 2x+4>0\end{cases}$，即$\begin{cases}x<3\\ x>-2\end{cases}$，所以函数定义域为$(-2, 3)$.

(3) 因为 $-1\leqslant\dfrac{1+x}{2}\leqslant 1$，即 $-3\leqslant x\leqslant 1$，所以函数定义域为$[-3, 1]$.

例 2： 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x>0\\ 3 & x<0\end{cases}$ 的定义域，并作函数的草图.

解： 分段函数的定义域为各段自变量取值集合的并集，所以此函数的定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$，其图形为图 1-1.

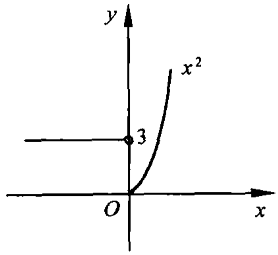


图 1-1

应当指出，在实际应用问题中，除了要根据解析式子本身来确定自变量的取值范围以外，还要考虑到变量的实际意义，一般来说，经济变量往往取正值.

在讨论函数时，经常用到邻域概念. 我们称开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域，简称点 x_0 的邻域. δ 为正数，称为邻域的半径.

例 3： 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，求 $f(2)$，$f(a)$，$f(x+1)$，$f(-\dfrac{1}{x})$ 的值.

解：
$$f(2)=\frac{1}{1+2^2}=\frac{1}{5}$$
$$f(a)=\frac{1}{1+a^2}$$
$$f(x+1)=\frac{1}{1+(x+1)^2}=\frac{1}{x^2+2x+2}$$
$$f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2}{1+x^2}$$

函数的定义域、对应法则、值域称为函数的三要素. 当两个函数的定义域与对应法则一致时，这两个函数表示的是同一个函数. 如 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=|x|$，它们的定义域与对应法则一致，只是表示不同而已，实际是同一个函数.

2. 函数的性质

(1) 函数的奇偶性

定义 1·2 设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义. 如果对于任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

由定义 1·2 知，奇偶函数的定义域 D 关于原点对称，且在平面直角坐标系中，偶函数的图象关于 y 轴对称(如图 1-2)；奇函数的图象关于原点对称(如图 1-3).

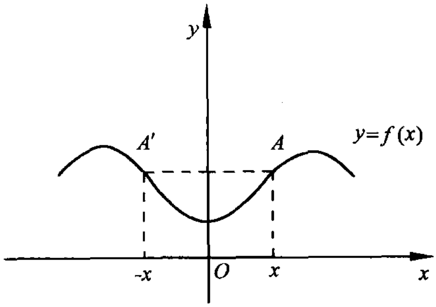


图 1－2

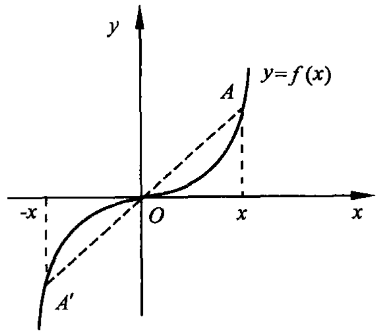


图 1－3

例 4： 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^4-3x^2+5$

（2）$f(x)=4x+\cos x$

（3）$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})$

解：（1）因为 $f(-x)=(-x)^4-3(-x)^2+5=x^4-3x^2+5=f(x)$，

所以 $f(x)=x^4-3x^2+5$ 是偶函数.

（2）因为 $f(-x)=4(-x)+\cos(-x)=-4x+\cos x\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)=4x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

（3）因为 $f(-x)=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=-f(x)$，

所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})$是奇函数.

（2）函数的单调性

定义 1·3 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义. 如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$y=f(x)$在(a,b)内是**单调增加**的(如图 1－4)，(a,b)称为 $f(x)$的单调增区间；如果对于(a,b)内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$在(a,b)内是**单调减少**的(如图 1－5)，(a,b)称为 $f(x)$的单调减区间.

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数，所对应的区间称为单调区间.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$

上是单调减少的；$[0,+\infty)$与$(-\infty,0]$分别为函数 $y=x^2$ 的单调增区间与单调减区间.

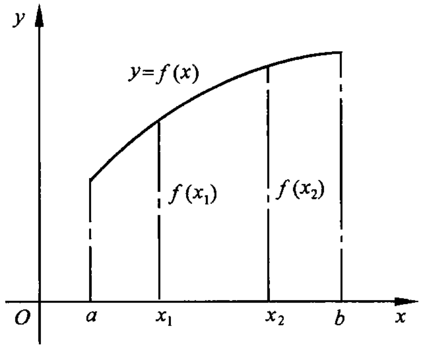


图 1－4

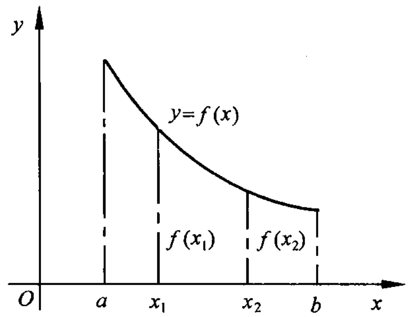


图 1－5

(3) 函数的周期性

定义 1·4　对于函数 $y=f(x)$，如果存在不为零的实数 T，对于每一个 $x\in D$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$是**周期函数**，T 称为$f(x)$的一个**周期**. 周期函数的周期有无穷多个，我们通常所说函数的周期指的是最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$都是以 π 为周期的周期函数.

(4) 函数的有界性

定义 1·5　设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在 D 上是**有界**的.

有界函数的图像 $y=f(x)$必介于两条平行于 x 轴的直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间(如图 1－6).

函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\,x$ 等是区间$(-\infty,+\infty)$上的有界函数.

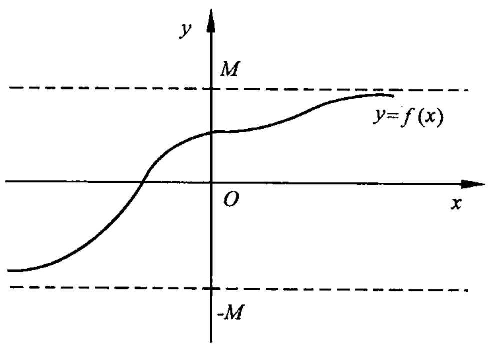


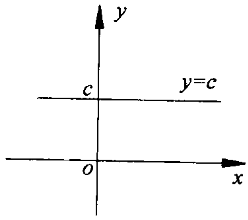
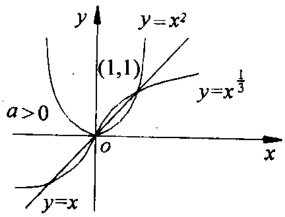
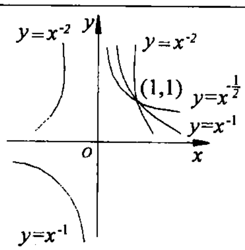
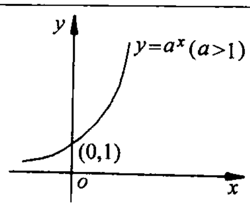
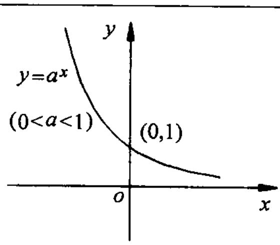
图 1－6

3. 初等函数

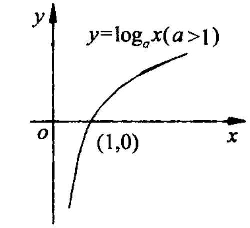
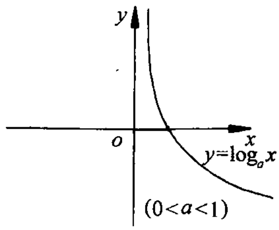
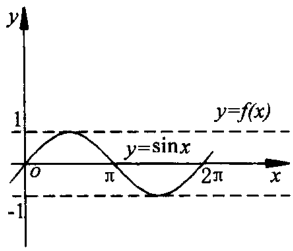
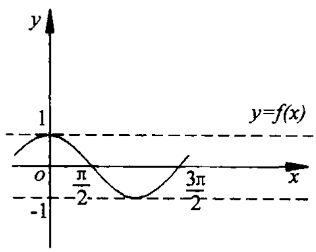
(1) 基本初等函数

我们在中学里学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为**基本初等函数**，其主要性质与图象概括如下(见表 1－1)：

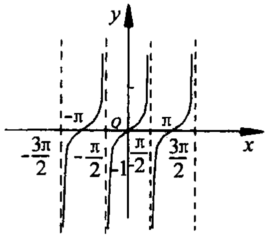
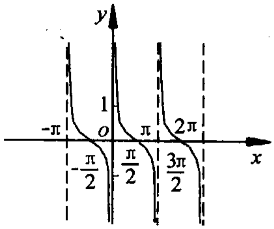
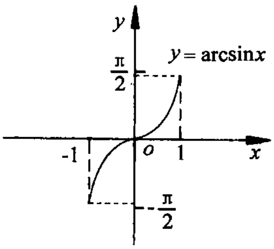
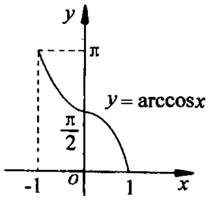
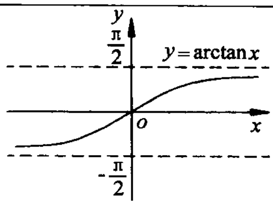
表 1－1

名称	表达式	定义域	图象	性质
常数函数	$y=c$ (c 为常数)	$(-\infty, +\infty)$		1. 偶函数； 2. 有界.
幂函数	$y=x^{\alpha}$ (α 为有理数)	根据 α 值的不同，$y=x^{\alpha}$ 的定义域也不同		1. 图象都过(0, 0)和(1, 1)点； 2. 在[0, +∞)内单调增加.
				1. 图象都过(1, 1)点； 2. 在(0, +∞)内单调减少.
指数函数	$y=a^{x}$ ($a>0$, $a\neq1$)	$(-\infty, +\infty)$		1. 图象均在 x 轴上方； 2. 图象均过(0, 1)点； 3. 单调增加.
				1. 图象均在 x 轴上方； 2. 图象均过(0, 1)点； 3. 单调减少.

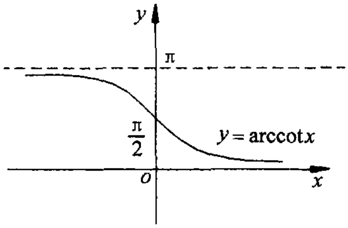
续表

名称	表达式	定义域	图　象	性　质
对数函数	$y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$)	$(0, +\infty)$		1. 图象均在 y 轴右侧； 2. 图象均过(1, 0)点； 3. 单调增加.
				1. 图象均在 y 轴右侧； 2. 图象均过(1, 0)点； 3. 单调减少.
正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty, +\infty)$		1. 奇函数； 2. 周期 $T=2\pi$； 3. 有界； 4. 在区间$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$($k\in z$)上单调增加；在区间$[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi]$($k\in z$)上单调减少.
余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty, +\infty)$		1. 偶函数； 2. 周期 $T=2\pi$； 3. 有界； 4. 在区间$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$($k\in z$)上单调增加；在区间$[2k\pi, (2k+1)\pi]$($k\in z$)上单调减少.

续表

名称	表达式	定义域	图象	性质
正切函数	$y=\tan x$	$\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in z\}$	 $y=\tan x$	1. 奇函数； 2. 周期 $T=\pi$； 3. 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in z)$上单调增加.
余切函数	$y=\cot x$	$\{x \mid x\neq k\pi,\ k\in z\}$	 $y=\cot x$	1. 奇函数； 2. 周期 $T=\pi$； 3. 在区间$(k\pi,\ (k+1)\pi)$ $(k\in z)$上单调减少.
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,\ 1]$		1. 奇函数； 2. 有界； 3. 单调增加.
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,\ 1]$		1. 有界； 2. 单调减少.
反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,\ +\infty)$		1. 奇函数； 2. 有界； 3. 单调增加.

续表

名称	表达式	定义域	图象	性质
反余切函数	$y=\operatorname{arccot}x$	$(-\infty,\ +\infty)$		1. 有界； 2. 单调减少.

(2) 复合函数

对于一些函数，例如 $y=\sqrt{x^2+1}$，我们可以将它看作是把 $u=x^2+1$ 代入到 $y=\sqrt{u}$ 中而得到的，像这样在一定条件下，将一个函数“代入”到另一个函数中去，称之为这两个函数的“复合”.

定义 1·6　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，如果对于自变量 x 的取值，通过 u 有惟一的 y 与之对应，则 y 通过变量 u 构成 x 的函数，称 y 为 x 的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中，u 为**中间变量**.

例如，由函数 $y=\cos u$，$u=x^2$ 构成了复合函数 $y=\cos x^2$.

必须注意的是：不是任意两个函数都可以构成一个复合函数的. 要构成复合函数，至少函数 $u=\varphi(x)$ 值域的一部分必须包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域中. 例如 $y=\arcsin u$，$u\in[-1,\ 1]$ 和 $u=5+x^2$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$ 就不能复合. 这是因为对于 $u=5+x^2$ 的定义域 $(-\infty,\ +\infty)$ 内的任何值 x 所对应的 u 值都大于或等于 5，于是 $y=\arcsin(x^2+5)$ 是没有意义的.

例 5：　已知 $y=e^u$，$u=1+x^2$，将 y 表示成 x 的函数.

解：　由于 $y=e^u$ 的定义域 $(-\infty,\ +\infty)$，$u=1+x^2$ 的值域 $[1,\ +\infty)$，所以将 $u=1+x^2$ 代入 $y=e^u$ 得它们组成的复合函数 $y=e^{1+x^2}$.

两个以上的函数也可以构成复合函数，如函数 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{x}$，它们构成了复合函数 $y=\sin^2\sqrt{x}$，再如 $y=\tan(\ln\frac{x}{2})$ 是由 $y=\tan u$，$u=\ln v$，$v=\frac{x}{2}$ 复合而成的.

例 6：指出下列复合函数是由那些简单函数复合而成的：

(1) $y=\sin(5x+4)$

(2) $y=e^{\tan x}$

(3) $y=\ln\sqrt{\ln x}$

(4) $y=\sqrt{\operatorname{arccot}(x+1)}$

解：(1) 函数 $y=\sin(5x+4)$是由 $y=\sin u$，$u=5x+4$ 复合而成的.

(2) 函数 $y=e^{\tan x}$是由 $y=e^{u}$，$u=\tan x$ 复合而成的.

(3) 函数 $y=\ln\sqrt{\ln x}$是由 $y=\ln u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\ln x$ 复合而成的.

(4) 函数 $y=\sqrt{\operatorname{arccot}(x+1)}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\operatorname{arccot}v$，$v=x+1$ 复合而成的.

(3) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所构成，并可用一个式子表示的函数叫**初等函数**.

高等数学中讨论的函数绝大部分都是初等函数. 例如，函数 $y=\sin x^2$，$y=\dfrac{5x+2}{x^2+2x+1}$，$y=\sqrt{x}-\ln 2x$ 等都是初等函数.

二、经济函数模型举例

在社会经济活动中，往往会涉及到一些经济变量，它们之间有着各种依存关系. 用数学方法解决经济问题时，就要找出这些经济量之间的函数关系，建立数学模型. 下面我们介绍一些常见的经济函数模型.

1. 需求函数与供给函数模型

在研究市场问题时，常常会涉及两个重要的函数，即需求函数和供给函数.

市场对某种商品的需求量 Q，主要受到该商品的价格的影响，通常降低商品的价格会使需求量增加，提高商品的价格会使需求量减少. 在假定其它因素不变的条件下，市场需求量 Q 可视为该商品价格 p 的函数，称为**需求函数**，记作

$$Q=Q(p)$$

供给是与需求相对应的概念，需求是就市场中的消费者而言，供给是就市场中的生产销售者而言的. 某种商品的市场供给量 S 也受商品价格 p 的制约，价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品，供给量增加;反之，价格