

JIXUJIAOYU (HANSHOU)
ZHUANSHENGBEN
GONGGONGKE
XILIEJIAOCAI

继续教育（函授）专升本公共课系列教材

概率论 与数理统计

■ 何凤霞 主编



中国电力出版社
www.cepp.com.cn

继续教育（函授）专升本公共课系列教材

概率论与数理统计

何凤霞 主编



中国电力出版社

www.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书是根据高等院校继续教育《概率论与数理统计》课程的教学大纲要求编写的,内容包括概率论、数理统计两部分,概念叙述清晰,选例由浅入深,每章后都有本章小节,附有练习题和自测题。在本书最后,我们还给出了两套总测验题,使学习者能够检查自己对于本课程的学习情况。

本书可以作为高等院校继续教育(函授)公共课系列的教材,也作为教师和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/何凤霞主编. —北京:中国电力出版社, 2005

(继续教育(函授)专升本公共课系列教材)

ISBN 7-5083-3036-6

I. 概... II. 何... III. ①概率论-函授大学-教材②数理统计-函授大学-教材 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 009250 号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路 6 号 100044 <http://www.cepp.com.cn>)

北京同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2005 年 4 月第一版 2005 年 4 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 9.75 印张 214 千字

印数 0001—4000 册 定价 15.00 元

版 权 专 有 翻 印 必 究

(本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换)

前言

概率论与数理统计是一门应用性很强的学科，也是工科各专业考研的必考内容。为满足广大读者自学的需要，我们根据多年的教学经验，编写了这一套教材。本教材的特点是概念引入自然，内容由浅入深。通过简单的例子，读者轻松学会概率公式的使用，通过综合性的例子，强化读者对概念的理解和公式的灵活运用。

本书每章后都有小结，帮助读者掌握本章要点。每章后还附有练习题和自测题，练习题主要是检查读者对本章基本要求的掌握程度，自测题是检查读者对概念理解的准确性以及对知识的综合运用能力。书后还附了两套总测验题，供教师和学生参考使用。练习题附有答案，自测题和总测验题不附答案。

本书主要针对成人教育、自学考试和一些概率论爱好者，也可以作为高等院校（非数学专业）本科生的教材和教师参考书。

全书分为八章，张辉编写第一、第七章，柳燕编写第二、第三章，严稳利编写第四章，何书松编写第五章，何凤霞编写第六章，石彤菊编写第八章。何凤霞对全书进行了统稿。朱勇华教授仔细审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见。张辉老师绘制了本书的大部分插图，并对全书的数字与外文符号作了统一处理。

本书的出版得到了华北电力大学数理学院的大力支持，得到了中国电力出版社的通力协作，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，本书一定存在着不少缺点和不足，欢迎专家读者批评指正。

概率论与数理统计编写组

2004年12月

目录

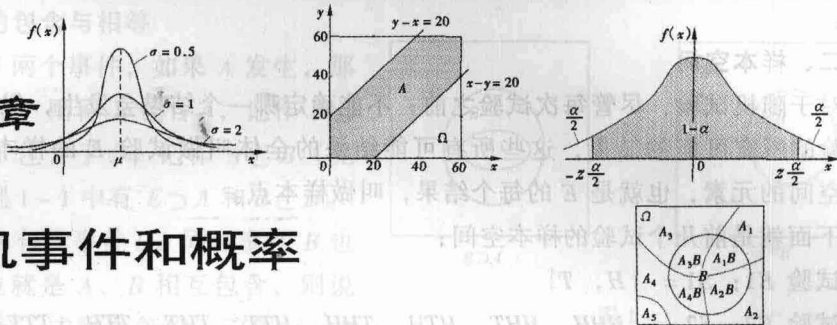
前言

第一章 随机事件和概率	1
§1 随机试验与随机事件	1
§2 事件之间的关系与运算	2
§3 概率的定义与性质 古典概型	6
§4 条件概率与概率的乘法公式 独立性	12
§5 全概公式与贝叶斯公式	15
§6 n 重伯努利试验	17
第二章 随机变量及其概率分布	23
§1 随机变量的概念及分类	23
§2 离散型随机变量分布律及其性质	24
§3 连续型随机变量概率密度及其性质	25
§4 随机变量分布函数及其性质	26
§5 几种常见分布	28
§6 随机变量函数的分布	34
第三章 二维随机变量及其概率分布	39
§1 多维随机变量的概念及分类	39
§2 二维离散型随机变量联合分布律及其性质	39
§3 二维连续型随机变量联合概率密度及其性质	40
§4 二维随机变量联合分布函数及其性质	41
§5 二维随机变量的边缘分布	42
§6 二维随机变量条件分布	45
§7 随机变量的独立性	47
§8 两个随机变量的简单函数的分布	50
第四章 随机变量的数字特征	56
§1 数学期望的概念与性质	56
§2 随机变量的方差的概念与性质	61
§3 常见分布的数学期望与方差	64
§4 随机变量矩、协方差和相关系数	66

第五章 大数定律及中心极限定理	74
§ 1 大数定律	74
§ 2 中心极限定理	76
第六章 数理统计的基本概念	81
§ 1 总体与样本	81
§ 2 样本统计量	83
§ 3 抽样分布	85
第七章 参数估计	92
§ 1 点估计	92
§ 2 估计量的评选标准	96
§ 3 区间估计	98
§ 4 单侧置信区间	104
第八章 假设检验	109
§ 1 假设检验的基本概念	109
§ 2 单正态总体的参数检验方法	113
§ 3 双正态总体的假设检验	117
§ 4 * 分布拟合检验	123
总测验题一	129
总测验题二	132
练习题答案	134
附录	137
附录 1 几种常用的概率分布	137
附录 2 标准正态分布表	138
附录 3 t 分布表	139
附录 4 χ^2 分布表	140
附录 5 F 分布表	142
参考文献	147

第一章

随机事件和概率



自然现象和社会现象是丰富多彩的，人类一直在探寻其中的规律和奥秘。在众多的现象中，人们发现，有一些是在一定条件下必然出现的，比如向上抛出的硬币必然会落下，悬浮的磁针总是指向南北，这些现象称为确定性现象。还有一些现象，比如，在相同的条件下抛出同一枚硬币，落下后的结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷前不能确定将要出现的结果是什么。这类现象虽然不能事前预知确切的结果，但是，经过人们长期实践和研究后发现，在大量重复试验的情况下，它的结果又呈现出某种规律性。这种在个别试验中结果呈现出不确定性，而在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，叫做随机现象。概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

§ 1 随机试验与随机事件

一、随机试验

试验包括各种各样的科学实验，但我们在这里最关心的是如下这类试验：

试验 E_1 ：抛一枚硬币，观察正面 H （币值面）和反面 T 出现的情况；

试验 E_2 ：抛一枚硬币三次，观察正面 H 和反面 T 出现的情况；

试验 E_3 ：抛一枚硬币三次，观察正面 H 出现的次数；

试验 E_4 ：从一批灯泡中随意抽取一只，测试它的寿命；

试验 E_5 ：抛掷一枚骰子，观察出现的点数；

试验 E_6 ：从一个装着红（ R ）、黄（ Y ）、蓝（ B ）三种颜色球的袋子里，任意摸出一个球，观察其颜色。

这些试验都具有以下三个特征：

- (1) 试验可以在相同条件下重复进行；
- (2) 各次试验的结果不一定相同，但事先能够明确试验的所有可能的结果；
- (3) 进行某次试验之前，不能确定哪一个结果会发生。

在概率论中，同时具备这三个特点的试验叫随机试验，用 E 表示。我们是通过随

机试验结果的分析来研究随机现象的。为简便起见，本书以后所提到的试验都指的是随机试验。

二、样本空间

对于随机试验，尽管每次试验之前，不能确定哪一个结果会发生，但是，事先能够明确试验的所有可能的结果，这些所有可能结果的全体叫做试验 E 的样本空间，记为 S 。样本空间的元素，也就是 E 的每个结果，叫做样本点。

下面就是前几个试验的样本空间：

试验 E_1 : $S_1 = \{H, T\}$

试验 E_2 : $S_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

试验 E_3 : $S_3 = \{0, 1, 2, 3\}$

试验 E_4 : $S_4 = \{t \mid t \geq 0\}$

试验 E_5 : $S_5 = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$

试验 E_6 : $S_6 = \{R, Y, B\}$

从这几个试验可以看出，样本空间的元素由试验目的所确定，同样的试验过程，由于试验的目的不一样，其样本空间也不一样。

三、随机事件

在进行随机试验时，我们关心的是那些满足某种条件的样本点所组成的集合。这些集合是试验 E 的样本空间 S 的子集合，它实际上是一些可能发生、也可能不发生的事情，我们称之为随机事件，简称事件，用大写英文字母表示。

例 1-1 已知 10 个同类产品有 8 个正品 2 个次品，从中任意抽取三个，研究出现正品和次品的情况，则以下事件可能会出现：

事件 1：被抽到的三个产品全是正品，不妨记为 A ；

事件 2：被抽到的三个产品有一个次品两个正品，记为 B ；

事件 3：被抽到的三个产品有两个次品一个正品，记为 C ；

事件 4：被抽到的三个产品至少有一个是次品，记为 D ；

事件 5：被抽到的三个产品至少有两个是正品，记为 E ；

可以看出， A 、 B 、 C 、 D 、 E 都是随机事件，而 A 、 B 、 C 事件和 D 、 E 事件又有所不同，前者是这个试验中最简单的随机事件，叫做基本事件，它是由一个样本点组成的单点集；后者 D 是由基本事件 B 和 C 组成， E 是由基本事件 A 和 B 组成。

此外还可以看到，事件“被抽到的三个产品全是次品”是不可能发生的，称之为不可能事件，记作 V ；事件“被抽到的三个产品至少有一个正品”是肯定要发生的，称之为必然事件，记作 U 。为讨论问题方便起见，我们把不可能事件和必然事件也当作随机事件看待。

§2 事件之间的关系与运算

从例 1-1 中可以看到，在随机试验中，有些事件是比较简单的，有些则比较复杂。

我们有必要搞清楚事件之间的关系。

一、事件的包含与相等

设有 A 、 B 两个事件，如果 A 发生，那么 B 一定也发生，则称 B 包含 A ，记作 $B \supset A$ ；这时也说 A 包含于 B ，记作 $A \subset B$ （见图 1-1）。在例 1-1 中有 $E \supset A$ 和 $B \subset D$ 。

如果事件 A 包含事件 B ，同时事件 B 也包含事件 A ，也就是 A 、 B 相互包含，则说事件 A 与 B 相等，或称为等价，记作 $A = B$ （见图 1-1）。

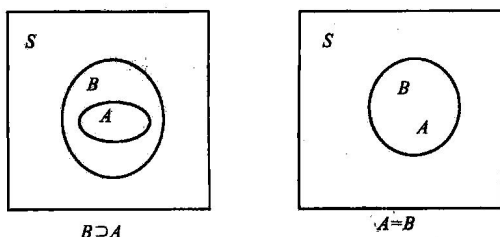


图 1-1

二、事件的和与积

事件 A 或 B 至少有一个发生，称为 A 与 B 的和，也称为并，记作 $A + B$ 或 $A \cup B$ （见图 1-2）。在例 1-1 中有 $D = B + C$ 和 $E = A + B$ 。

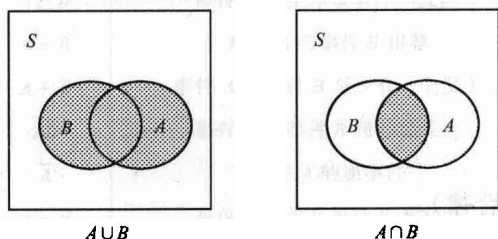


图 1-2

依此类推，称“ n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生”的事件为这 n 个事件的并，记作 $\sum_{i=1}^n A_i = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ ；称“可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一个发生”的事件为这可列个事件的并，记作 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 + \dots + A_n$

$+ \dots$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ 。

事件 A 与 B 同时都发生，称为 A 与 B 的积，也称为交，记作 AB 或 $A \cap B$ （见图 1-2）。

依此类推，称“ n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时都发生”的事件为这 n 个事件的交，记作 $\prod_{i=1}^n A_i = A_1 A_2 \dots A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ ；称“可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时都发生”的事件为这可列个事件的交，记作 $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 A_2 \dots A_n \dots$ 或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$ 。

三、对立事件与事件的差

事件“非 A ”或“ A 不发生”称为 A 的对立事件，记作 $\bar{A}$ （见图 1-3）。

对立事件也叫逆事件。易知 $\overline{\bar{A}} = A$ ，也就是说 A 也是 $\bar{A}$ 的对立事件，而且在一次试验中， A 和 $\bar{A}$ 不会同时发生（即它们互相排斥），但 A 和 $\bar{A}$ 至少有一个发生，就是说 A 和 $\bar{A}$ 满足：

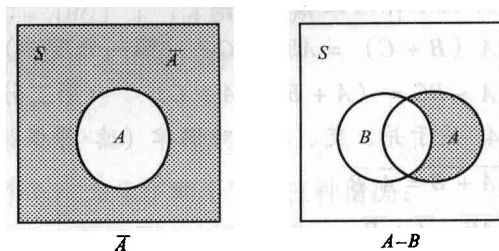


图 1-3

$$A\bar{A} = V$$

$$A + \bar{A} = U$$

$$\begin{aligned} A-B &= A\bar{B} \\ &= A(\bar{A}+B) \\ &= A-A\bar{A} \\ &= A-AB \end{aligned}$$

事件 A 发生而 B 不发生, 称为 A 同 B 的差, 记作 $A-B$, 由这个定义可知 $A-B = A\bar{B}$ (见图 1-3)。

四、互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不可能同时发生, 即 $AB = V$, 则 A 和 B 是互不相容事件 (见图 1-4)。

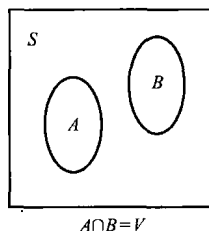


图 1-4

例 1-2 抛掷一枚质地均匀的骰子, 观察出现的点数。记事件 $A = \{1\}$, 即“出现点数 1”; 事件 $B = \{1, 3, 5\}$, 即“出现奇数点”; 事件 $C = \{1, 2\}$, 即“出现的点数不超过 2”; 事件 $D = \{1, 2, 3, 4\}$, 即“出现的点数不超过 4”; 事件 $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 即“出现的点数不超过 5”; 事件 $F = \{2, 4\}$, 即“出现小于 5 的偶数点”, 则 $B \supset A$, $B + D = E$, $BC = A$, $B - D = \{5\}$, $\bar{B} = \{2, 4, 6\} =$ “出现偶数点”, B 与 F 互不相容。

五、事件的运算规律

1. 关于并的运算

$$A + B = B + A \quad (\text{加法交换律})$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\text{加法结合律})$$

$$A + A = A \quad (\text{加法重迭律})$$

$$A + \bar{A} = U \quad (\text{互补律})$$

$$A + U = U \quad (\text{加法吸收律})$$

$$A + V = A \quad (\text{加法吸收律})$$

2. 关于交的运算

$$AB = BA \quad (\text{乘法交换律})$$

$$A(BC) = (AB)C \quad (\text{乘法结合律})$$

$$AA = A \quad (\text{乘法重迭律})$$

$$A\bar{A} = V \quad (\text{互逆律})$$

$$AU = A \quad (\text{乘法吸收律})$$

$$AV = V \quad (\text{乘法吸收律})$$

3. 关于并同交的分配律

$$A(B + C) = AB + AC \quad (\text{第一分配律})$$

$$A + BC = (A + B)(A + C) \quad (\text{第二分配律})$$

4. 关于并、交、逆的对偶律 (德·摩根律)

$$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$$

$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

注意: $\overline{AB} \neq \bar{A}\bar{B}$, 从图 1-5 上可以很清楚地看到这一点。

六、集合与事件

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然可以按照集合论里集合之间的关系和集合运算来处理。表 1-1 表达了它们之间的对应关系。

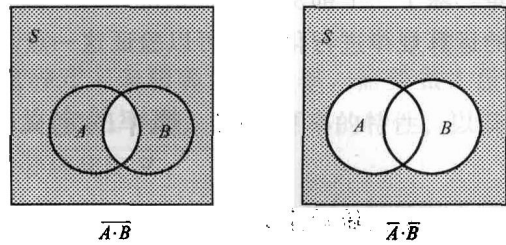


图 1-5

表 1-1

记 号	概 率 论	记 号	集 合 论
S, U	样本空间，必然事件	Ω	全集
V	不可能事件	Φ	空集
$a \in S$	基本事件	$a \in \Omega$	Ω 中的元素
$A \subset S$	事件 A	$A \subset \Omega$	Ω 的子集
$A \subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	$A \subset B$	集合 A 包含于集合 B
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	$A = B$	集合 A 等于集合 B
$A + B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	$A \cup B$	集合 A 与集合 B 的并
AB	事件 A 与事件 B 同时都发生	$A \cap B$	集合 A 与集合 B 的交
$\bar{A}$	事件 A 的逆事件	$\bar{A}$	集合 A 的余集
$A - B$	事件 A 发生且事件 B 不发生	$A - B$	集合 A 与集合 B 的差集
$AB = V$	事件 A 与事件 B 互不相容	$A \cap B = \Phi$	集合 A 与集合 B 无公共元素

注 上述事件、集合的记号也可以通用，比如： S, Ω 既可以表示样本空间，也可以表示必然事件， V, Φ 既可以表示空集，也可以表示不可能事件。为方便起见，在本章以下的内容中，不再严格区分这两类符号。

例 1-3 设 A, B, C 是三个事件，用 A, B, C 的事件式分别表示

1. A, B, C 都发生； ABC
2. A, B, C 至少两个发生； $\bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$
3. A, B, C 中不多于两个发生。 $\overline{ABC}$

解 1. 显然是 ABC 。

2. 包括“两个发生”和“三个都发生”这两种情况： $AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC$ ，我们还可以利用运算规律化简：

$$\begin{aligned}
 & AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC \\
 &= (AB\bar{C} + ABC) + (\bar{A}BC + ABC) + (A\bar{B}C + ABC) \\
 &= AB(\bar{C} + C) + (\bar{A} + A)BC + A(\bar{B} + B)C \\
 &= AB + BC + AC \\
 &= AB + BC + AC
 \end{aligned}$$

3. 包括“一个都没发生”、“只发生了一个”、“发生了两个”这三种情况：

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$$

这样讨论比较麻烦，不妨换一个角度来考虑，事件“ A, B, C 中不多于两个发生”，

也就是“除了三个都发生这种情况以外，其他全是”。这样，事件就可以表示为 $\overline{ABC}$ 。用事件的运算规律进行化简，可以验证这一点。

§ 3 概率的定义与性质 古典概型

一、概率的统计定义

对于随机事件，在一次试验中是否发生，虽然不能预先知道，但是它们在一次试验中发生的可能性是有大小之分的。比如例 1-1 中，由于正品数比次品数多，事件 A：“被抽到的三个产品全是正品”发生的可能性显然比事件 C：“被抽到的三个产品有两个次品一个正品”的可能性要大一些。但是，究竟大多少呢？显然，对事件发生的可能性的这种粗略估计，实在是太不够了。我们希望对它给出客观的定量的分析。

对此，先来研究一个最简单的试验：抛硬币试验。在假定“硬币是均匀对称的，抛掷动作是固定一致的”等等条件下，令事件 A = “硬币正面朝上”，于是，在一次试验实现的情况下，事件 A 是否发生是不确定的。然而，当进行大量的重复试验的情况下，事件 A 发生的次数——称之为频数，用 μ 表示——就能体现出一定的规律性，约占总试验次数的一半。我们定义

事件 A 发生的频率 $w = \frac{A \text{ 出现的频数 } \mu}{\text{试验的总次数 } n}$ (1-1)

上述分析表明，事件 A = “硬币正面朝上”发生的频率 w 接近于 $\frac{1}{2}$ 。

为了研究随机事件频率的规律性，历史上，一些人作过成千上万次投掷硬币的试验，表 1-2 就是这些试验的记录和结果。

表 1-2

试验者	投掷次数 n	出现正面朝上的次数（即频数 μ ）	正面朝上的频率 μ/n
De Morgan	2048	1061	0.518
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

可以看出，投掷次数充分多时，正面出现的频率在 0.5 附近摆动，我们认为 A 发生的概率为 0.5。

一般地，我们有概率的统计定义：

定义 1-1 在相同的条件下重复 n 次随机试验，记 μ 是试验中事件 A 发生的次数。当试验次数 n 很大时，如果事件 A 发生的频率 w 稳定地在某一数值 p 附近摆动；而且，一般说来，随着试验次数的增加，摆动的幅度越来越小，则称 p 是事件 A 发生的概率，记作 $P(A) = p$ 。

简单地说，概率的统计定义可以描述为：“频率的稳定值为随机事件的概率”。

所以，在实际问题中，当 $P(A)$ 值未知时，可以用事件 A 出现的频率作为概率的近

似值。当然试验次数 n 应充分大。

二、概率的公理化定义及性质

概率的统计定义比较直观易懂,但通过这种定义来精确计算概率,需要做大量的试验,所以不容易实现,而且也不容易讨论概率的性质。为此,根据频率的特性,以及概率以频率为稳定值的特点,概率论给出了概率的公理化定义:

定义 1-2 设 E 是随机试验, S 是其样本空间, $P(\cdot)$ 是定义在样本空间子集上的集合函数, 如果满足:

- (1) 非负性: 对于每一个事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
- (2) 规范性: 对于必然事件 S , $P(S) = 1$;
- (3) 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是两两互不相容的事件, 即对于

$$i \neq j, A_i A_j = \Phi, i, j = 1, 2, \dots, n, \dots, \text{ 则有}$$

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

则称集合函数 $P(\cdot)$ 为概率函数, $P(A)$ 为事件 A 发生的概率。

由概率的公理化定义, 容易证明概率具有以下几条性质:

性质 1 对于不可能事件 Φ , 有 $P(\Phi) = 0$

证明 取 $A_i = \Phi, i = 1, 2, \dots$, 由概率的可列可加性:

$$P(\Phi + \Phi + \dots) = P(\Phi) + P(\Phi) + \dots$$

即 $P(\Phi) = P(\Phi) + P(\Phi) + \dots$

由概率非负性知: 上式要成立, 必有 $P(\Phi) = 0$ 。

性质 2 (有限可加性) n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容, 则

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \Phi, \Phi, \dots$, 利用概率的可列可加性即可证明。

性质 3 (减法公式) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ 。

特别, 若 $B \subset A$, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$, 并且有 $P(B) \leq P(A)$ 。

证明 因为 $A = AS = A(B + \bar{B}) = AB + A\bar{B}$, 而 AB 与 $A\bar{B}$ 互不相容;

由有限可加性得: $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$,

于是 $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$,

即 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$ 。

若 $B \subset A, AB = B$, 故 $P(A - B) = P(A) - P(B)$, $\therefore$

由 $P(A - B) \geq 0$, 得 $P(B) \leq P(A)$ 。

性质 4 对于任一事件 $A \subset S$, 有 $P(A) \leq 1$ 。

证明 由于 $A \subset S$, 由性质 3, $P(A) \leq P(S)$,

由概率定义 $P(S) = 1$, 所以 $P(A) \leq 1$ 。

性质 5 (加法公式) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 。

特别, 若 $AB = \Phi$, 则有: $P(A + B) = P(A) + P(B)$ 。

从图 1-6 中可以直接看出, 阴影部分 $P(AB)$ 被重复计算了, 所以应该减去。

证明 $\because A + B = A + B\bar{A}$, 而 A 与 $B\bar{A}$ 互不相容,

由有限可加性: $P(A+B) = P(A+B\bar{A}) = P(A) + P(B\bar{A})$,

由减法公式: $P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB)$,

代入上式可得: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

若 $AB = \Phi$, 则有 $P(AB) = 0$, 得 $P(A+B) = P(A) + P(B)$ 。

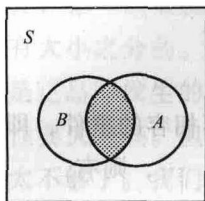


图 1-6

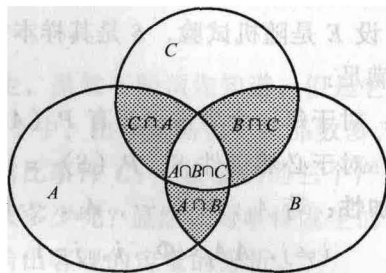


图 1-7

注:三个事件的加法公式为(见图 1-7)

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

同理可得 n 个事件的加法公式。

性质 6 (逆事件公式) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

证明 由于 $A\bar{A} = \Phi$, 故 $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

由于 $A \cup \bar{A} = S$, $P(A \cup \bar{A}) = 1$

得 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, 及 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

例 1-4 已知 $P(A) = 0.7$, $P(A-B) = 0.3$, 求 $P(AB)$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ 。

解 由减法公式 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$ 得

$$P(AB) = P(A) - P(A-B) = 0.7 - 0.3 = 0.4$$

由事件的对偶律及逆事件的概率性质

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6$$

例 1-5 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = P(BC) = \frac{1}{8}$, $P(AC) = 0$, 求 $P(A \cup B \cup C)$ 。

解 由于 $ABC \subset AC$ 知 $P(ABC) \leq P(AC)$, 又 $P(AC) = 0$ 得 $P(ABC) = 0$,

由加法公式

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - 0 - \frac{1}{8} + 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

三、古典概型

定义 1-3 如果随机试验 E 具备如下两个特点:

(1) 样本空间的元素 (基本事件) 只有有限个;

(2) 每个基本事件发生的可能性相同。

这样的随机试验叫做古典概型。

古典概型中的任一随机事件 A 发生的概率称为古典概率。

例 1-6 一个盒子里装有 3 个白球、2 个黑球，总共 5 个球。从中任取一个，问取得白球的概率是多少？

解 既然是任意取球，那么 5 个球被取到的机会应该是均等的，各应该是 $\frac{1}{5}$ 。但白球有 3 个，所以取得白球的概率应为 $\frac{3}{5}$ 。

说得更清楚详细些，可以把五个球编上号码，比如白球为 1、2、3 号，黑球为 4、5 号。因为是随便取一个，所以“取到 1 号球”、“取到 2 号球”、“取到 3 号球”、“取到 4 号球”、“取到 5 号球”这些结果发生的机会一样，而且是互相排斥的，除此以外不可能有别的结果。而 1、2、3 号为白球，它们在总数 5 中占 $\frac{3}{5}$ ，因此取得白球的概率应为 $\frac{3}{5}$ 。

例 1-7 一个盒子里装有 3 个白球、2 个黑球，总共 5 个球。从中任取两个，问取到的两个球都是白球的概率是多少？

解 这个问题稍复杂些，但是仍然可以用上面的方法来分析。不妨假定球的编号方法同上。因为是随便任意取两个，所以下列这 10 种结果发生的机会一样，而且是互相排斥的，除此以外不可能有别的结果。

1-2

1-3 2-3

1-4 2-4 3-4

1-5 2-5 3-5 4-5

上述这 10 种情况中全是白球的仅有“1-2”、“1-3”、“2-3”这三种，因此，取到的两个球都是白球的概率应为 $\frac{3}{10}$ 。

对这两个例子进行分析，可以总结出古典概率的计算公式

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 所包含的基本事件个数}}{\text{试验的基本事件总数}} = \frac{m}{n} \quad (1-2)$$

事实上，由概率的公理化定义可以证明该公式，证明略。

要计算古典概型事件 A 的概率，必须搞清楚样本空间包含的基本事件总数以及事件 A 中包含的基本事件个数。以例 1-7 的讨论为例，在 5 个球中任意取 2 个，共有 $C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ 种取法，它们出现的机会相同，每一种取法都对应一个基本事件，共有 $n = 10$

个事件。而从三个白球中取出两个来，共有 $C_3^2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$ 种取法，即 $m = 3$ 。由古典概型

的概率计算公式 (1-2)，所求概率为 $P(A) = P(\text{“取出两个白球”}) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$ 。

例 1-8 一个盒子里装有 3 个白球、2 个黑球，总共 5 个球。从中任取一个，记下颜色后放回，然后再任取一个，问两次取到的都是白球的概率是多少？

解 由排列组合的乘法原理知, 完成某项任务, 如果必须经过两个步骤, 第一个步骤有 m 种方法, 第二个步骤有 n 种方法, 则完成这项任务共有 $m \times n$ 种方法。两次取球共有 $5 \times 5 = 25$ 种方法, 而都取到白球有 $3 \times 3 = 9$ 种方法, 由古典概型的概率计算公式可知

$$P(A) = \frac{3 \times 3}{5 \times 5} = \frac{9}{25}.$$

注意: 这个例子与前面“取出不放回”的例子有所不同, 它是“取出放回”的。“取出不放回”的抽取方式叫做不放回抽样, “取出放回”的抽取方式叫做放回抽样, 这两种情况在研究时要注意加以区别。

例 1-9 设有 10 件产品, 其中有 3 件次品, 其余是正品。现任意抽取 5 件产品, 问 (1) 其中未抽到次品的概率是多少? (2) 恰好只抽到 1 件次品的概率是多少? (3) 恰好抽到 2 件次品的概率是多少?

解 (1) 设事件 $A =$ “未抽到次品”。从 10 件产品任意抽取 5 件产品, 有 C_{10}^5 种取法。未抽到次品也就是必须从 7 件正品中任意抽取 5 件, 有 C_7^5 种取法。则

$$P(A) = \frac{C_7^5}{C_{10}^5} = \frac{\frac{7!}{5! \cdot (7-5)!}}{\frac{10!}{5! \cdot (10-5)!}} = \frac{2520}{30240} = \frac{1}{12} \approx 0.08$$

(2) 设事件 $B =$ “恰好只抽到 1 件次品”。基本事件总数应该与 (1) 相同, 有 C_{10}^5 种取法。恰好只抽到 1 件次品, 就是说取到 1 件次品, 4 件正品。假定第一步取次品, 它是从 3 件次品中任取的, 有 C_3^1 种取法; 第二步取正品, 它是从 7 件正品中任取的, 有 C_7^4 种取法, 因此, “恰好只抽到 1 件次品”所包含的基本事件个数为 $C_3^1 \cdot C_7^4$ 种。综合上述

$$\text{分析, } P(B) = \frac{C_3^1 \cdot C_7^4}{C_{10}^5} = \frac{\frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!}}{\frac{10!}{5! \cdot (10-5)!}} = \frac{12600}{30240} = \frac{5}{12} \approx 0.42.$$

(3) 设事件 $C =$ “恰好抽到 2 件次品”, 分析过程与 (2) 相同, 可得

$$P(C) = \frac{C_3^2 \cdot C_7^3}{C_{10}^5} = \frac{\frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!}}{\frac{10!}{5! \cdot (10-5)!}} = \frac{12600}{30240} = \frac{5}{12} \approx 0.42$$

顺便说一下, 上述过程中可以看到, 计算组合时可以利用性质: $C_n^k = C_n^{n-k}$ 。

例 1-10 一个袋子里装有 3 个球, 红、黄、白色各一个, 每次从中任取一个, 有放回地抽三次, 问取到的三球里没有红球或没有黄球的概率是多少?

解 设事件 $A =$ “三球都不是红球”; $B =$ “三球都不是黄球”, 则 “三球里没有红球或没有黄球”的概率是 $P(A+B)$ 。

$$P(A) = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3} = \frac{8}{27}, \quad P(B) = \frac{8}{27}$$

$$P(AB) = P(\text{“三球中既无红球也无黄球”}) = \frac{1}{27}$$

$$P(A+B) = \frac{10}{27}$$

$$\frac{8}{27} + \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$$

$$= P(\text{“三球都是白球”}) = \frac{1 \times 1 \times 1}{3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{27}$$

由概率的加法公式知 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$ 。

例 1-11 在一次考试中，有三道选择填空题，共 4 个可供选择的答案，每题对应一个，答错不倒扣分。某考生判断不清，只好随机选择，问他至少填对一道题的概率是多少？

解 设事件 $A = \text{“至少填对一道题”}$ ，用逆事件去考虑比较简单。

$\bar{A} = \text{“三道题都没填对”}$ ，由于该生随机选择，故每次可能有四个选择，一共选三次，所以共有 $4 \times 4 \times 4$ 种结果等可能被选到，而每一次错误的选择有三种，一共选三次，“三道题都没选对”的情形有 $3 \times 3 \times 3$ ，

$$P(\bar{A}) = \frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4} = \frac{27}{64},$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}.$$

古典概率的公式也可以适用于等概完备事件组的情形。

定义 1-4 如果事件组 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 有以下 3 个性质：

- (1) 它们发生的机会相同（等可能性）；
- (2) 在任意一次试验中，它们之中至少有一个发生（完全性）；
- (3) 在任意一次试验中，它们之中至多有一个发生（互不相容性）；

则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为等可能完备事件组，也叫做等概基本事件组。其中，事件 $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ 称为基本事件。

四、几何概型

把古典概型中样本空间的元素（基本事件）只有有限个推广到无限，保留基本事件发生的等可能性，就得到了几何概型。

定义 1-5 设 Ω 是可度量的几何图形，在 Ω 中随机地投掷一点，事件 A 表示所投掷的点落在 Ω 内可度量的几何图形 $\mathfrak{R}$ 中，

$$\text{则} \quad P(A) = \frac{\mathfrak{R} \text{ 的测度}}{\Omega \text{ 的测度}}.$$

对一维空间，长度就是测度；对二维空间，面积就是测度；对三维空间，体积就是测度。

例 1-12 一个质地匀称的陀螺的圆周上，均匀地刻有 $[0, 5]$ 区间上的数字，在平滑的桌面上旋转它。求陀螺停下来时，圆周与桌面接触点处的刻度恰好位于区间 $[2, 3]$ 上的概率。

解 设事件 $A = \text{“刻度恰好位于区间 } [2, 3]\text{”}$ 。

由于区间内的数是无限的，所以这是几何概型一维的情况， $\Omega = [0, 5]$ ； $\mathfrak{R} = [2, 3]$ ，