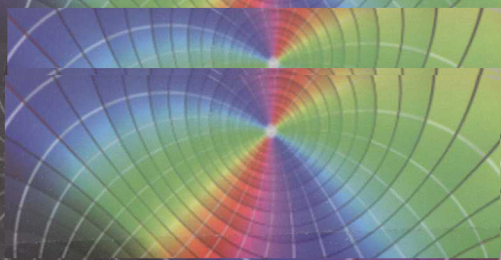




世纪普通高等教育基础课规划教材

复变函数

唐生强 唐清干 黄文韬 编



$$e^{2\pi i} = 1$$



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



世纪普通高等教育基础课规划教材

复变函数

唐生强 唐清干 黄文韬 编



机械工业出版社

本书遵循普通高等学校工科本科《复变函数课程教学基本要求》，按照新形势下教材改革精神，结合编者长期的教学改革实践编写而成，较全面、系统地介绍了复变函数的基础知识。

全书共7章，内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数展开、留数及其应用和共形映射等，最后一章是复变函数实验，讨论怎样用计算机软件去解决复变函数中的问题。每章配有适量习题和补充题供读者选用，书末附有习题答案与提示。

本书可作为普通高等学校工科本科各专业的复变函数课程的教材，也可供工程技术人员、报考研究生的读者参考。

图书在版编目（CIP）数据

复变函数/唐生强，唐清干，黄文韬编. —北京：机械工业出版社，2010.2

21世纪普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978-7-111-29526-6

I. 复… II. ①唐…②唐…③黄… III. 复变函数—高等学校—教材 IV. 0174.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第006679号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 封面设计：路恩中

责任校对：张媛 责任印制：乔宇

北京机工印刷厂印刷

2010年2月第1版第1次印刷

169mm×239mm·10.5印张·198千字

标准书号：ISBN 978-7-111-29526-6

定价：16.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心：(010) 88361066

门户网：<http://www.cmpbook.com>

销售一部：(010) 68326294

教材网：<http://www.cmpedu.com>

销售二部：(010) 88379649

读者服务部：(010) 68993821 封面无防伪标均为盗版

前 言

复变函数是高等学校工科类本科的一门重要的基础课，是高等数学和线性代数的后继课程。复数的概念起源于求方程的根，在很长时间内，人们对复数尚不太理解，甚至不接受。但随着数学的发展，复数的重要性日益凸显。复变函数论的全面发展是在19世纪，它几乎统治了19世纪的数学。当时的数学家公认复变函数论是最丰饶的数学分支，并且称它为19世纪的数学享受，也有人称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一。用分析、几何和代数等方法研究复变量的解析函数的有关问题，已经形成了十分丰富、系统、完美与和谐的理论体系和深刻的结果。其理论和方法已经渗透到数学领域的各个分支，如微分方程、积分方程、概率论和数论等学科，对这些学科的发展有着重要的影响。同时在流体力学、电学、热学等方面有着重要的应用，有很多复杂的计算也都是用它来解决的。因此复变函数无论在实际应用，还是理论上都有指导作用。

本书在教学内容的深度和广度方面遵循教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的总体要求，根据普通高校工科本科“复变函数课程教学基本要求”编写，较全面、系统地介绍了复变函数的基础知识。在编写过程中，力求贯彻改革精神，处理好继承与改革，尤其是经典内容与现代数学内容的关系，注重理论联系实际，加强应用，在保证复变函数基本要求的前提下，力求适应工科二本及其他学科学生的水平与要求，注重培养学生的动手能力，强调计算机科学技术与复变函数的有机结合，尤其是针对西部地区教学资源相对薄弱与学生水平相对较低的教学状况，使本教材能适应新世纪对工程技术人才的“数学素质”的培养要求。本书在书写时力求叙述简洁，通俗易懂，便于读者自学，同时也尝试将数学软件的使用与教材相结合，让读者通过在计算机上完成一些复变函数的运算来“做数学”，使读者在学习数学知识的同时，学习数学的思想和探索数学的方法，提高数学素质，锻炼逻辑思维和复杂的计算能力，在从困惑到发现之中，获得乐趣，进而激发读者今后学习的兴趣。每章都配有较多的例题，并有适量习题和补充题供教师和读者选用，配置两类习题的目的：一是为了便于教师从中选择合适的题目供教学使用；二是便于读者选用相关题目进行自我检查，从而对学习效果作出客观、真实的评价。书末附有部分习题和补充题答案及提示。有“*”号的内容供相关专业选用。本书第1、2、3章由唐清干编写，第4、5、6章由唐生强编写，第7章由黄文韬编写，全书由唐生强统编、修正和定稿。

袁朝晖教授审阅了书稿，并提出了宝贵的意见和建议，特致谢意。限于编者的水平，书中不足之处恐难避免，敬请读者批评指正。

目 录

前言

第 1 章 复数与复变函数	1
1.1 复数	1
1.2 复平面上的点集	8
1.3 复变函数	10
1.4 复球面与无穷远点	14
习题 1	15
补充题 1	16
第 2 章 解析函数	17
2.1 解析函数的概念	17
2.2 柯西-黎曼条件	20
2.3 初等函数	23
*2.4 平面场	28
习题 2	35
补充题 2	36
第 3 章 复变函数的积分	37
3.1 复变函数积分的概念及其基本性质	37
3.2 柯西积分定理	42
3.3 柯西积分公式	46
3.4 解析函数与调和函数的关系	52
习题 3	53
补充题 3	55
第 4 章 解析函数的级数展开	57
4.1 复级数的基本性质	57
4.2 幂级数	59
4.3 解析函数的泰勒展式	64
4.4 洛朗 (Laurent) 级数	69
4.5 解析函数的孤立奇点	75
习题 4	81
补充题 4	83

第 5 章 留数及其应用	85
5.1 留数	85
5.2 用留数定理计算实积分	90
*5.3 对数留数与辐角原理	96
习题 5	99
补充题 5	100
第 6 章 共形映射	102
6.1 共形映射的概念	102
6.2 分式线性映射	104
6.3 若干初等函数所构成的共形映射	113
*6.4 希瓦尔兹-克里斯托菲尔 (Schwarz-Christoffel) 映射	120
*6.5 拉普拉斯 (Laplace) 方程的边值问题	125
习题 6	129
补充题 6	131
第 7 章 复变函数实验	132
7.1 复数及复代数式的基本运算	132
7.2 复函数与复函数作图	133
7.3 解析函数的判定	137
7.4 调和函数的判定与共轭调和函数的求法	139
7.5 幂级数展开	140
7.6 留数的计算	141
7.7 映射几何表示举例	141
习题 7	146
部分习题参考答案与提示	148
参考文献	159

第 1 章 复数与复变函数

1.1 复数

有关复数的基本知识,虽然在初等数学中已经讲授过了,但为今后讨论方便起见,这里有必要给出系统的叙述和补充.

1.1.1 复数的概念

设 x, y 是任意两个实数, i 表示虚数单位 $\sqrt{-1}$, 具有性质 $i^2 = -1$, 称形如 $x + yi$ 或 $x + iy$ 的数为复数, 记作:

$$z = x + iy \text{ 或 } z = x + yi, \quad (1.1.1)$$

其中实数 x, y 分别称为复数 z 的实部和虚部, 记为:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \quad (1.1.2)$$

当 $x=0, y \neq 0$ 时, 复数 $z=yi$ 称为纯虚数; 当 $y=0$ 时, 复数 $z=x+i \cdot 0$ 可看做实数 x ; 例如, 复数 $z=2+i \cdot 0$ 可看做实数 2. 全体复数称为复数域, 记作 $\mathbb{C}$.

两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$, 当且仅当 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ 时, 称 z_1 与 z_2 相等, 记作 $z_1 = z_2$.

复数 $x - iy$ 称为复数 $x + iy$ 的共轭复数, 记作 $\bar{z} = x - iy$. 例如, 复数 $z = 3 + 2i$ 的共轭复数 $\bar{z} = 3 - 2i$. 显然, 若 z 是实数, 那么 $\bar{z} = z$, 对一切复数 z , 有 $\overline{\bar{z}} = z$.

根据复数的上述定义, 容易看到: 全体实数只是全体复数的一部分, 这就意味着复数域是实数域的扩充, 并且一个复数完全由它的实部和虚部所确定.

复数与实数不同, 一般来说, 任意两个复数之间不能比较大小.

1.1.2 复数的代数运算

两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的四则运算定义如下:

加法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1.1.3)$$

减法:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (1.1.4)$$

乘法: z_1 与 z_2 相乘时, 按多项式的乘法法则进行, 只不过要把 i^2 换成为 -1 , 即

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.1.5)$$

除法: z_1 与 z_2 相除时, 先将它写成分数形式, 然后分子分母都乘以分母的共轭复数, 再进行简化, 即

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} (z_2 \neq 0). \quad (1.1.6)$$

例如, 设 $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$, 那么 $z_1 z_2 = (3 + 2i)(1 - 2i) = 3 - 6i + 2i - 4i^2 = 7 - 4i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 2i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-1 + 8i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i.$$

根据上述定义的四则运算, 容易证明加法、乘法满足交换律和结合律及加法对乘法的分配律, 即:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3). \quad (1.1.7)$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3), z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3. \quad (1.1.8)$$

又由 1.1.1 小节中共轭复数的定义, 容易证明下列式子成立:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} (z_2 \neq 0),$$

$$z \bar{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2, \quad z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z). \quad (1.1.9)$$

例 1 设 $z = \frac{1 - 2i}{3 - 4i} - \left(\frac{2 + i}{-5i}\right)$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 及 $\bar{z}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } z &= \frac{1 - 2i}{3 - 4i} - \frac{2 + i}{-5i} = \frac{(1 - 2i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} - \frac{2 + i}{(-5)i} \\ &= \frac{11 - 2i}{25} - \frac{(2 - i)i(-5)}{(i5)i(-5)} = \frac{11 - 2i}{25} + \frac{5 + 10i}{25} \\ &= \frac{16}{25} + \frac{8}{25}i. \end{aligned}$$

$$\text{因此, } \operatorname{Re} z = \frac{16}{25}, \operatorname{Im} z = \frac{8}{25}; \bar{z} = \left(\frac{16}{25} + \frac{8}{25}i\right)\left(\frac{16}{25} - \frac{8}{25}i\right) = \frac{64}{125}.$$

例 2 设 z_1 和 z_2 是任意的两个复数, 证明:

$$z_1 \bar{z_2} + \bar{z_1} z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z_2}) = 2\operatorname{Re}(\bar{z_1} z_2).$$

$$\text{证 由 } z_1 \bar{z_2} + \bar{z_1} z_2 = z_1 \bar{z_2} + \overline{z_1 \bar{z_2}} = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z_2}),$$

$$z_1 \bar{z_2} + \bar{z_1} z_2 = \overline{\bar{z_1} z_2} + \bar{z_1} z_2 = 2\operatorname{Re}(\bar{z_1} z_2).$$

$$\text{因此, } z_1 \bar{z_2} + \bar{z_1} z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z_2}) = 2\operatorname{Re}(\bar{z_1} z_2).$$

1.1.3 复数的几何表示、模与辐角

实数的几何表示是数轴上的点, 那么复数的几何表示是什么呢?

由于复数 $z = x + iy$ 与一对有序实数 (x, y) 具有一一对应关系, 在引入直角

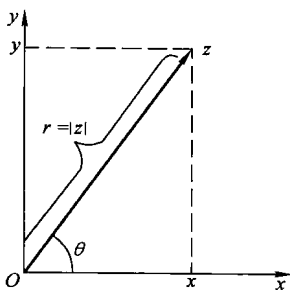
坐标系的平面上, 一对有序实数 (x, y) 和平面上的点也有一一对应关系, 因此能够建立平面上的点和全体复数 $z = x + iy$ 间的一一对应关系. 因此, 可以把平面上的点 (x, y) 看做是复数 $z = x + iy$ 的一种几何表示法. 这种表示复数的方法通常称为点表示, 并且常把点 z 作为“数 z ”的同义词 (图 1-1-1).

因实数 x 对应 x 轴上的点, 所以称 x 为实轴; 纯虚数 iy 对应于 y 轴上的点, 所以称 y 轴为虚轴, 这样表示复数的平面称为复平面或 z 平面.

复数 $z = x + iy$ 还可以用一向量表示, 将 z 理解为起点在原点 $(0, 0)$ 、终点在 (x, y) 的向量 (图 1-1-1). 特别地, 复数 0 对应着零向量. 向量的长度称为 z 的模, 记作 $|z|$ 或 r , 即

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.1.10)$$

图 1-1-1



显然, 下列各式成立

$$|x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|, \quad |z| \leq |x| + |y|, \quad z \bar{z} = |z|^2. \quad (1.1.11)$$

由复数的向量表示法, 易见复数的加减法法则与向量的加减法的平行四边形法则一致 (图 1-1-2). 这样力学、物理学中的向量如力、速度、加速度等物理量, 都可以用复数来表示. 这说明复数不仅仅是实数在形式上的扩充, 而且是很强的实际背景的.

由于 $|z|$ 表示向量 z 的长度, $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 间的距离, 易知下面两个不等式成立:

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|. \quad (1.1.12)$$

当 $z \neq 0$ 时, 表示复数 z 的向量与 x 轴正向的夹角 θ , 称为复数 z 的辐角, 记作 $\theta = \text{Arg } z$ (图 1-1-1), 并规定 θ 按逆时针方向取值为正, 顺时针方向取值为负. 如同极坐标系中点的极角一样, 任意一个复数的辐角有无穷多个, 但彼此两个辐角之间相差 2π 的整数倍, 其中有一个辐角在 $-\pi$ 与 π 之间, 称为 z 的“辐角主值”, 记作 $\arg z$.

于是有:

$$-\pi < \arg z \leq \pi, \quad (1.1.13)$$

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.1.14)$$

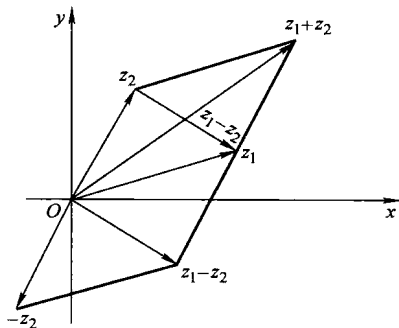


图 1-1-2

由三角函数知识可知 $\arg z$ 与 $\arctan \frac{y}{x}$ 有下列关系:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & (z \text{ 在第一象限}) \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & (z \text{ 在第二象限}) \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & (z \text{ 在第三象限}) \\ \arctan \frac{y}{x}, & (z \text{ 在第四象限}) \end{cases} \quad (1.1.15)$$

当 $z=0$ 时, 其模 $|0|=0$, 但它的辐角无定义, 也可以认为此时辐角是不定的, 可以为任意角度.

由上所述, 复数 $z=x+iy$ 的实部、虚部、模与辐角有下列关系式:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \theta = \arg z. \quad (1.1.16)$$

因此, 复数可表示为下面的形式:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1.1.17)$$

式 (1.1.17) 称为复数的三角表示式.

根据欧拉 (Euler) 公式, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 复数 z 又有指数形式的表示式:

$$z = r e^{i\theta}. \quad (1.1.18)$$

式 (1.1.18) 称为复数 z 的指数表示式.

复数的各种表示法可以相互转化, 根据所讨论问题的需要来选择.

例 1 求复数 $z = \frac{-2i}{-1+i}$ 的三角表示式与指数表示式.

$$\text{解 } z = \frac{-2i}{-1+i} = \frac{-2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = -1+i,$$

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\arctan \frac{y}{x} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\arg z = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{于是, } z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

例 2 证明 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, 并说明它的几何意义.

$$\begin{aligned} \text{证 } |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2) \overline{(z_1 - z_2)} = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2).\end{aligned}$$

两式相加得 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

几何意义: 平行四边形两对角线的平方和等于各边平方和.

例3 假定 z_1, z_2, z_3 三点适合下列条件:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, \quad \text{与} \quad |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$$

试证: z_1, z_2, z_3 是内接于单位圆的一个等边三角形的顶点.

证 由例2知:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

因为 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, 故 $z_1 + z_2 = -z_3$, 因此有 $|z_1 + z_2| = |z_3|$, 从而

$$|z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - |z_1 + z_2|^2 = 2(1 + 1) - 1 = 3.$$

同理可证 $|z_2 - z_3|^2 = |z_1 - z_3|^2 = 3$.

所以 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3| = \sqrt{3}$, 因此 z_1, z_2, z_3 是内接于单位圆的一个等边三角形的顶点.

例4 证明复平面上的直线方程可写成:

$$\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z = c (\alpha \neq 0 \text{ 为复常数, } c \text{ 为实常数}).$$

证 平面上直线方程为:

$$Ax + By + D = 0,$$

由于 $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, 将其代入上式得:

$$\frac{1}{2}(A + iB)\bar{z} + \frac{1}{2}(A - iB)z + D = 0,$$

令 $\alpha = \frac{1}{2}(A + iB)$, $C = -D$, 则有 $\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z = c$.

例5 求下列方程表示的曲线:

(1) $|z + i| = 2$;

(2) $|z - 2i| = |z + 2|$;

(3) $(1 + i)\bar{z} + (1 - i)z = -1$.

解 (1) 由几何上可以看出, 方程 $|z + i| = 2$ 是中心在点 $-i$, 半径为 2 的圆 (图 1-1-3) 下面用代数的方法求出该圆的直角坐标方程. 设 $z = x + iy$, 方程变为: $|x + i(y + 1)| = 2$ 即 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$.

(2) 几何上, 该方程表示到点 $2i$ 和 -2 距离相等的点的轨迹, 因此该方程表示的曲线是连接 $2i$ 和 -2 的线段的垂直平分线 (图 1-1-4). 事实上设 $z = x$

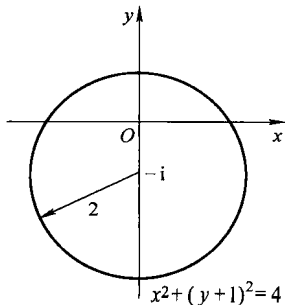


图 1-1-3

+iy 有

$|x + i(y - 2)| = |(x + 2) + iy|$, 即 $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2}$ 亦即 $x + y = 0$.

(3) 设 $z = x + iy$, 则该方程为:

$$(1 + i)(x - iy) + (1 - i)(x + iy) = -1,$$

化简得:

$$x + y + \frac{1}{2} = 0 \quad (\text{图 1-1-5}).$$

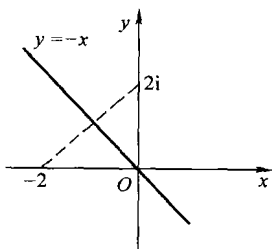


图 1-1-4

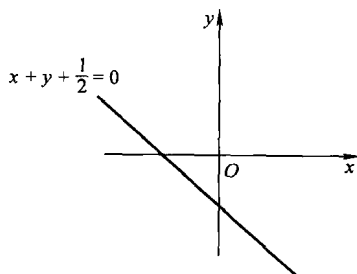


图 1-1-5

例 4、例 5 说明平面上曲线可用复数 z 的等式来表达, 反之亦然.

1.1.4 复数的乘幂与方根

定理 (1) 两个复数乘积的模等于它们的模的乘积, 其辐角等于它们的辐角之和;

(2) 两个复数商的模等于它们的模的商, 其辐角等于被除数辐角与除数的辐角之差, 即有:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2; \quad (1.1.19)$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z. \quad (1.1.20)$$

证 设 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$,
 $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$
 $= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)].$

因此:

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

因此有:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2 = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

上述定理可用复数指数形式表述如下:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

设 $z_k = r_k e^{i\theta_k} (k = 1, 2, \dots, n)$ 由上述定理可推得: $z_1 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}$, 于是得到:

$$\text{推论} \quad |z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| |z_2| \cdots |z_n|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2 \cdots z_n) = \sum_{k=1}^n \text{Arg } z_k. \quad (1.1.21)$$

对两个复数的积 $z_1 z_2$ 相当于将表示复数 z_1 的向量旋转 $\text{Arg } z_2$, 然后将其伸长 (或缩短) 到 $|z_2|$ 倍 (图 1-1-6).

下面介绍复数的乘幂与方根.

定义 n 个相同复数 z 的乘积, 称为 z 的 n 次幂, 记作 z^n , 即

$$z^n = \underbrace{z z \cdots z}_{n \uparrow}. \quad (1.1.22)$$

如果在式 (1.1.21) 中令 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = r e^{i\theta}$, 那么对于任何的正整数 n , 有

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (1.1.23)$$

如果规定 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, 那么当 n 为负整数时上式也成立.

特别地, 取 $|z| = 1$, 即 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ 由式 (1.1.23) 有

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (1.1.24)$$

这就是著名的棣莫佛 (De Moivre) 公式.

定义 若 $\omega^n = z$, 则称 $\omega = \rho e^{i\varphi}$ 是复数 $z = r e^{i\theta}$ 的 n 次方根, 记为 $\sqrt[n]{z}$ 或 $z^{\frac{1}{n}}$.

根据公式 (1.1.23), 有

$$(\rho e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n e^{i\theta}.$$

因此, $\rho^n = r$, $n\varphi = \theta + 2k\pi$. ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$)

于是得到 z 的 n 次方根有 n 个, 且:

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

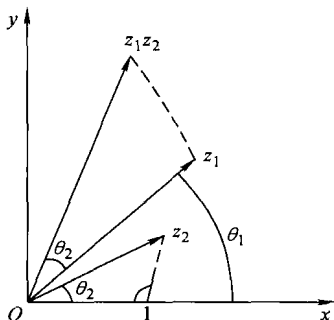


图 1-1-6

$\omega_k (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ 分布在圆周 $\sqrt[n]{|z|} = |\omega|$ 上, 且是圆内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 求 $\sqrt[4]{1+i}$ 的值.

解 $\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}}$
 $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1),$

$$\omega_0 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}}, \quad \omega_1 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2})},$$

$$\omega_2 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i(\frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2})}, \quad \omega_3 = 2^{\frac{1}{8}} e^{i(\frac{\pi}{16} + \frac{5\pi}{2})}.$$

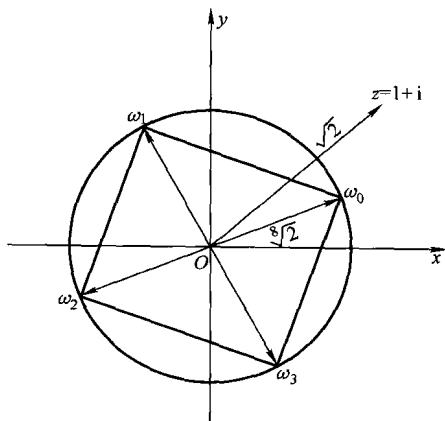


图 1-1-7

1.2 复平面上的点集

1.2.1 平面点集的基本概念

设 z_0 是复平面上的一点, 由不等式 $|z - z_0| < \delta (\delta > 0)$ 确定的点集, 称为点 z_0 的 δ 邻域, 或点 z_0 的邻域, 点 z_0 的 δ 邻域是圆周 $|z - z_0| = \delta$ 的内部. 由不等式 $0 < |z - z_0| < \delta$ 确定的点集, 称为点 z_0 的去心邻域.

对于平面点集 G , 若存在点 z_0 的某个邻域包含于 G 中, 称 z_0 是 G 的内点; 若 G 的每个点都是 G 的内点, 称 G 为开集.

设 G 是一个平面点集, P 是平面上的一点 (可以属于 G 也可以不属于 G), 若 P 的一切邻域都含有 G 的无穷多个点, 称 P 为 G 的聚点; 若 P 的一切邻域既有属于 G 的点又有不属于 G 的点, 称 P 为 G 的边界点. G 的全部边界点组成的集合称为 G 的边界 (图 1-2-1).

平面点集 G 称为有界集, 若存在正数 M , 使得对于 G 中的一切点 z 有 $|z| \leq M$.

集 G 称为一个区域, 若它满足下列条件:

- (1) G 是一个开集;
- (2) G 是连通的, 就是说 G 中任意两点可用完全属于 G 的一条折线连接起来 (图 1-2-1)

区域 G 加上它的边界称为闭区域, 记作 $\bar{G}$.

一般来说一个区域或闭区域是由一条或几条平面曲线围成的平面上的一块.

例 1 满足 $r_1 < |z - z_0| < r_2 (r_2 > r_1 > 0)$ 的点集是一个有界区域 (圆区域), 该区域的边界是由圆周 $|z - z_0| = r_1$ 及 $|z - z_0| = r_2$ 组成的. 点集 $r_1 \leq$

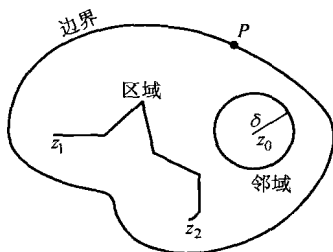


图 1-2-1

$|z - z_0| \leq r_2$ 是一个有界的区域 (图 1-2-2).

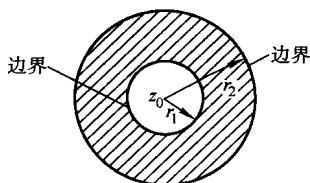


图 1-2-2

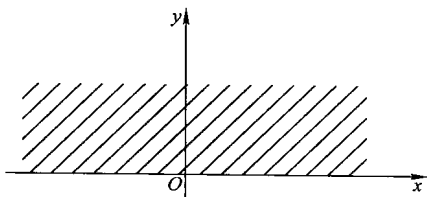


图 1-2-3

例 2 满足 $\text{Im } z > 0$ 的点集是一个无界的区域, 即上半平面 (图 1-2-3).

例 3 满足 $\text{Im } z = 0$ 的点集是整个实轴, 它是无界点集, 但不是区域.

1.2.2 单连通与多连通

在平面上曲线 C 的参数方程为:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (a \leq t \leq b). \quad (1.2.1)$$

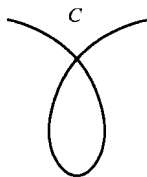
若 $x(t), y(t)$ 是连续的实函数, 称 C 为连续曲线.

式 (1.2.1) 可用复数形式表示为:

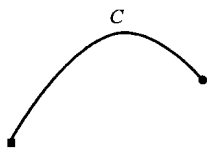
$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad (a \leq t \leq b) \quad (1.2.2)$$

若 $x'(t), y'(t)$ 连续, 且 $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, 那么曲线 C 为有连续变动的切线, 称曲线 C 为光滑曲线. 由几段光滑曲线连接组成的曲线称为逐段光滑曲线.

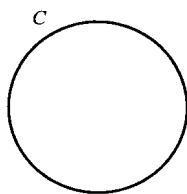
对于曲线 $C: z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$, 点 $z(a)$ 和 $z(b)$ 称为曲线 C 的端点, 除端点可能重合外, 本身不相交的连续曲线称为简单曲线; 端点重合的简单曲线称为简单闭曲线, 例如 $z = \cos(t) + i \sin(t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ 是一条简单闭曲线 (图 1-2-4).



(非简单曲线)



(简单曲线)



(简单闭曲线)

图 1-2-4

对任意一条简单闭曲线而言, 都具有下面性质: 简单闭曲线 C 把整个复平面分成三个点集, 其中除去 C 以外, 一个是有界区域, 称为 C 的内部; 另一个是无界区域, 称为 C 的外部; C 为他们的公共边界, 这个性质的几何意义是十分明显的.

设 G 是一个区域, 在 G 中任作一条简单闭曲线, 若 C 的内部都包含在 G 中,

称 G 是单连通区域, 简称单连域, 非单连通区域称为多连域.

例如, 多边形内部, 圆周的内部, 上半平面 (不含 x 轴) 等都是单连域, 环域 $r_1 < |z - z_0| < r_2$ 或去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 等都是多连域. 一般来说, 一条简单闭曲线的内部是一个单连域 (是平面上的一块), 从几何上看多连域是平面上含“洞”或“缝”的一块 (图 1-2-5).

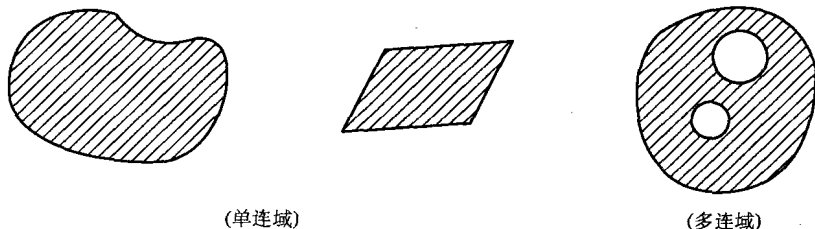


图 1-2-5

1.3 复变函数

1.3.1 复变函数的概念

定义 设 D 是平面上的点集, 对于 D 中的每一点 $z = x + iy$, 依某一确定的法则, 有一个或者几个复数 $w = u + iv$ 与之对应, 称复变数 w 是复变数 z 的函数, 记作

$$w = f(z),$$

其中 z 称为自变量, w 称为因变量, D 称为函数的定义域.

若一个 z 值只对应唯一一个 w 值, 称 $w = f(z)$ 是单值函数; 若一个 z 值对应 2 个或 2 个以上的 w 值, 称 $w = f(z)$ 为多值函数.

例如 $w = f(z) = z^2 + 1$ 是单值函数, $w = f(z) = \sqrt{z}$ 及 $w = f(z) = \text{Arg } z$ 是多值函数. 在以后的讨论中, 若无特别声明, 所论及的函数均指单值函数.

当取 $z = x + iy$ 时, $w = f(z)$ 可表示为:

$$w = u + iv = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (1.3.1)$$

其中 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 是 x, y 的二元实函数.

例如 $w = z^2 + 1$, 令 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 那么

$$w = u + iv = (x + iy)^2 + 1 = (x^2 - y^2 + 1) + 2ixy,$$

因此有 $u = x^2 - y^2 + 1$, $v = 2xy$.

由上可见, 一个一元复变函数唯一对应一对二元实变函数. 这样, 对于 $w = f(z)$ 的研究, 有时可以转化为对两个二元实变函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 的研究. 反之给定两个二元实变函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, 则 $w = u(x, y) + iv(x, y)$.

$v = v(x, y)$ 对应一个复变函数 $w = f(z)$.

例如 $w = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$, 可化为 $w = f(z) = \frac{1}{z}$.

在实变函数 $y = f(x)$ 的情形下, 由它的几何图形的直观性研究函数 $y = f(x)$ 的性质有着重要意义, 但对复变函数 $w = f(z)$ 而言, 就不能借助于同一个平面或空间的几何图形来直观地表达 $w = f(z)$, 这是复变函数与实变函数的一个不同之处.

如何从几何上理解 $w = f(z)$ 呢? 这里需要借助于两个复平面, 其一是用 Z 平面上的点表示自变量 z 的值, 其二是用 W 平面上的点表示函数 w 的值, 将 $w = f(z)$ 理解为两个复平面间的点的对应关系. 具体的说, 就是对于定义域 D 中的每一点 z , 相应的在 W 平面上有一点 $w = f(z)$ 与它对应. 当取遍 D 中所有点 z 时, 相应的点 $w = f(z)$ 在 W 平面上形成一个点集 E . 函数 $w = f(z)$ 把点集 D 变换 (映射) 到 W 平面上的点集 E , 因此通常称函数 $w = f(z)$ 为一个变换 (映射), 称点 z 是点 w 的原像, 点 w 是点 z 的像 (图 1-3-1).

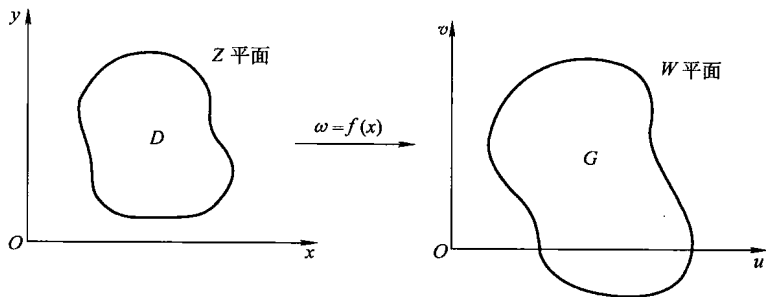


图 1-3-1

例 1 函数 $w = f(z) = \bar{z}$ 所构成的变换 (映射) 把 Z 平面上的点 $z = a + ib$, $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$, 依次映射为 W 平面上点 $w = a - ib$, $w_1 = 2 - 3i$, $w_2 = 1 + 2i$.

例 2 设有函数 $w = f(z) = z^2$, 试求它把 Z 平面上的下列曲线变成 W 平面上的何种曲线.

(1) 以原点为中心, 2 为半径, 在第一象限的圆弧;

(2) 倾角是 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 的直线;

(3) 双曲线 $x^2 - y^2 = c$, ($c > 0$).

解 (1) 令 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = f(z) = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta}$. 因此有 $|w| = r^2 = 4$, $0 \leq \varphi = 2\theta \leq \pi$.

故在 W 平面上对应图形是: 以原点为中心, 4 为半径的上半圆周 (图 1-3-2).