国际数学奥林匹克题库

Canada

Olympic

加拿大数学奥林匹克题解

《加拿大数学奥林匹克题解》编委会 组编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

★ 加拿大数学奥林匹克题解

★ 美国数学奥林匹克题解

★ 巴尔干地区数学奥林匹克题解

★ 英国数学奥林匹克题解

★ 俄罗斯数学奥林匹克题解

★ 中国数学奥林匹克国家队选拔考试题解

★ 国际数学奥林匹克预选题解

ISBN 978-7-308-07235-9

9 787308 072359 >

定价：16.00元

国际数学奥林匹克题库

加拿大数学奥林匹克题解

《加拿大数学奥林匹克题解》编委会　组编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

加拿大数学奥林匹克题解 /《加拿大数学奥林匹克题解》编委会组编. —杭州：浙江大学出版社，2010.1
ISBN 978-7-308-07235-9

Ⅰ.加… Ⅱ.加… Ⅲ.数学课—高中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 225844 号

加拿大数学奥林匹克题解

《加拿大数学奥林匹克题解》编委会 组编

责任编辑	杨晓鸣
封面设计	刘依群
出版发行	浙江大学出版社 (杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028) (网址：http://www.zjupress.com)
排　　版	杭州求是图文制作有限公司
印　　刷	德清县第二印刷厂
开　　本	787mm×960mm 1/16
印　　张	9.5
字　　数	195 千字
版 印 次	2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-07235-9
定　　价	16.00 元

国际数学奥林匹克与奥林匹克数学(代序)

数学是锻炼思维的体操,以数学为内容的竞赛已有悠久的历史.在公元16世纪意大利的Tartalia和Cardano曾以解一元三次方程为内容进行过激烈的竞赛.在9世纪,法国科学院等也曾以悬赏的形式征求对数学难题的解答,通过有奖比赛而得到重要的数学发现.

国际数学奥林匹克的权威人士认为,以激发数学才能和引起数学兴趣为目的,中学生自愿参加的数学竞赛,是从匈牙利开始的.

1894年,著名数学家、物理学家L. Eötrös男爵就任匈牙利文化大臣.从这一年起,便开始了为选拔有数学才能的学生的国家考试.开始命名为Eötrös竞赛,后来又以对这一竞赛做出了贡献的J. Kurschak的名字命名,这一竞赛对匈牙利的数学发展起了很重要的作用.后来很多有成就的数学家都曾是这一竞赛的优胜者,例如:1897年的优胜者利波特·费叶尔,在傅立叶级数的可积性理论方面做出了许多出色的工作.1898年的优胜者忒奥多耳·冯·卡门是著名的应用力学家和工程师,对航空和航天技术的发展有过卓越的贡献.1903年的优胜者阿尔伏瑞德·哈尔提出了哈尔测度.马赛尔·黎斯是1904年的优胜者,在泛函分析中提出黎斯凸性定理.而1912年的优胜者嘎波尔·基格,他和波利亚合著的《分析中的定理和问题》至今仍享有盛名.

继匈牙利之后,罗马尼亚于1902年由《数学杂志》组织过数学竞赛.在以后的30年中再没有其他国家系统举办过重大的类似活动,直到匈牙利数学竞赛造就的大师们纷纷登台的时候,欧洲其他国家才睁开惊奇的目光,产生了浓厚的兴趣,并争相效仿.

1934年,前苏联在列宁格勒(今圣彼得堡)大学举办中学生数学奥林匹克,首次将中学生的数学竞赛与体育竞赛的奥林匹克相提并论,把这种活动命名为"数学奥林匹克".

1949年,保加利亚举办了数学竞赛.

1950年,波兰举办了数学竞赛.

1951年,捷克斯洛伐克举办了数学竞赛.

1956年,中国举办了数学竞赛.

1958年,印度举办了数学竞赛.

此后还有前东德、瑞典(1961)、越南、前南斯拉夫、荷兰、古巴、意大利(1962)、蒙古、卢森堡(1963)、西班牙(1964)、英国、芬兰、阿根廷、比利时(1965)、以色列(1968)、加拿

大、希腊(1969)、前西德(1970)、澳大利亚(1971)、美国(1972)等国举办了数学竞赛.

事实表明,20 世纪 50 年代以来,世界各地的这股举办中学生数学竞赛的热潮,它既为国际数学奥林匹克(IMO)的诞生准备了条件,又为世界数学奥林匹克的发展提供了动力.

1956 年,经罗马尼亚罗曼教授的积极活动,东欧国家正式确定了开展国际数学奥林匹克竞赛的计划.并在 1959 年 7 月在罗马尼亚古都布拉索举行了第一届国际数学奥林匹克竞赛.保加利亚、捷克、匈牙利、波兰和罗马尼亚各派出了由 8 名学生组成的代表队,前苏联(实际是莫斯科)派出了 4 名学生组成的代表队.以后几年,参赛的国家并未增多.在 1963 年和 1964 年,南斯拉夫和蒙古先后加入,1965 年芬兰加入,1967 年法国、英国、意大利和瑞典也参加进来.从此参加的国家逐渐增多.1971 年共有 34 个队,以后逐年发展,2008 年共有 103 个国家及地区的 549 名选手参加了第 49 届 IMO.

随着世界各地各级各类数学竞赛活动的蓬勃开展,对数学奥林匹克竞赛的试题的研究也悄然兴起.国际数学奥林匹克的发展使得竞赛的试题也形成一定的规范:它不再限定在各国高中数学的范围,而更多的是一般中学不怎么涉及的领域,如初等数论、组合论、平面几何、不等式等方面.而且试题的难度不在于了解和解决试题所需要的数学知识的多少,而在于对数学本质的洞察力以及是否具有创造力和数学的机智,试题无模式可套,要求学生探索思考,寻找规律.

由于 IMO 试题的上述特点,有人认为 IMO 试题代表的是一种特殊的数学,可以称为“奥林匹克数学”.

对于数学奥林匹克活动而言,其中最吸引人的,无疑就是那一道道闪耀着数学智慧,散发着数学美的试题.

数学大师华罗庚教授曾经说过:“出题比做题要难,题目要出得妙,出得好,要测得出水平.一次数学竞赛成功与否,主要取决于命题.”

基于数学竞赛试题的重要作用,对竞赛试题的研究和分析就成为一项重要的工作.为加强交流学习,开阔视野,给数学奥林匹克爱好者提供学习的源泉,我们特组织编写了“国际数学奥林匹克题库”系列丛书.

“国际数学奥林匹克题库”汇集了国内外重大数学竞赛的试题和解答.这些竞赛试题构思独特,新颖别致,灵活深邃,内容广,内涵深.解这些题不仅需要扎实的基础知识和基本技能,也需要灵活的思维和坚强的毅力.因此,对于有志于参加数学竞赛的同学来说,本丛书中的问题是不可或缺的训练材料.

“国际数学奥林匹克题库”的编写也是对国际数学竞赛资料的一次大整理,可作为各数学竞赛老师的一份重要资料,作为数学爱好者了解数学竞赛的一个窗口.

从书的编写过程中,我们参考了一些国内外的资料,在此对这些资料的作者表示感谢.

本丛书篇幅较大,内容庞杂.虽然作者仔细认真地核查多遍,但囿于我们的水平,不当乃至错误之处恐难避免,敬请读者不吝指正.请将您的意见发到 sxjszcbjb@163.com.或至网站:http://www.jsmaths.com 留言.

编　者

2010 年 1 月于苏州

数学奥林匹克在加拿大

加拿大数学奥林匹克是从1969年开始的，每年举行一届，到2009年已举办了41届，前四届每次竞赛有十个题目，后来减至七八个题目，从第十二届以后，每届都是五个题目.

近年来，加拿大数学奥林匹克每年均在三月下旬举行，考试时间为3.5小时.

本书收集了第22～41届加拿大数学奥林匹克(1990－2009)的试题和解答，并在附录中给出了第1～21届加拿大数学奥林匹克(1969－1989)的试题.

加拿大从1981年开始参加国际数学奥林匹克(IMO)，到2008年为止，他们参加IMO比赛28次，共得金牌16枚，银牌37枚，铜牌66枚，荣誉奖16个.他们的团体成绩多在第10－20名之间，最好的一次是第七名(1981年).加拿大在国际数学奥林匹克竞赛中的具体成绩参见附录2.

本书中的一部分试题来自加拿大数学奥林匹克的官方网站，一部分来自历年国际数学奥林匹克期间的领队交流资料，还有一部分来自国内一些期刊杂志.

本书中的解答一是来源于领队交流资料中的官方解答，二是来源于作者和作者辅导的学生的解答，还有一些来源于国内一些期刊杂志中发表的解答.在此，对这些资料的提供者表示深深地谢意.

目　　录

一、加拿大数学奥林匹克(1990—2009)试题

第 22 届加拿大数学奥林匹克(1990)

1 有 $n(n\geqslant 2)$ 名选手参加一项为期 k 天的比赛，在每天的比赛中，选手可能得到的分数为 $1,2,3,\cdots,n$，且没有两个人的得分相同，当 k 天比赛结束时，发现每名选手的总分都是 26 分. 试确定数对 (n,k) 的所有可能情况.

2 如图，将 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个不同的数随机排列成一个三角数阵，设 M_k 是从上往下数第 k 行中的最大数，试求 $M_1<M_2<\cdots<M_n$ 的概率.

※
※ ※
※ ※ ※
...
※※※ ... ※※※

1990.2 图

3 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 X，由 X 向 AB、BC、CD、DA 分别作垂线，垂足为 A'、B'、C'、D'.

求证：$A'B'+C'D'=A'D'+B'C'$.

4 一个质点在 x 轴上的运动速度最大为 2 米/秒，在平面其他地方的运动速度最大为 1 米/秒. 试求该质点从原点出发在 1 秒钟内所能到达区域的边界曲线.

5 已知定义在正整数集上的函数 f 满足：

$$f(1)=1,f(2)=2,$$

$$f(n+2)=f(n+2-f(n+1))+f(n+1-f(n))(n\geqslant 1).$$

(1)求证：$0\leqslant f(n+1)-f(n)\leqslant 1$，并且当 $f(n)$ 为奇数时，$f(n+1)=f(n)+1$；

(2)试求适合 $f(n)=2^{10}+1$ 的所有 n 的值，并证明你的结论.

第 23 届加拿大数学奥林匹克(1991)

1 证明方程

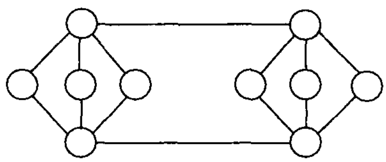
$$x^2+y^5=z^3$$

有无穷多组整数解,其中 $xyz\neq0$.

2 n 为固定的正整数,求出所有具有以下性质的正整数的和:在二进制中,这个数恰有 $2n$ 个数字,其中 n 个 1,n 个 0(首位数字不能为 0).

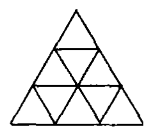
3 在平面上,设 C 是一个圆,P 是一给定的点,过 P 作直线交 C 于 A、B 两点. 证明:所有弦 AB 的中点在一个圆上.

4 从数集 $\{0,1,2,\cdots,14\}$ 中选出不同的数,填入下图中的 10 个小圆中,使得由线段连结的两个数之差的绝对值均不相同. 这可能吗? 请证明你的结论.



1991.4 图

5 如图,大三角形的边长为 3,由图中过各交点的直线所成的平行四边形的个数 $f(3)=15$. 求边长为 n 的三角形中相应的平行四边形的个数 $f(n)$.



1991.5 图

第 24 届加拿大数学奥林匹克(1992)

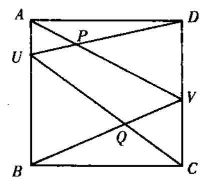
1 证明:前 n 个正整数的乘积能被它们的和整除的充要条件是:$n+1$ 不是一个奇素数.

2 已知 $x,y,z>0$,证明不等式

$$x(x-z)^2+y(y-z)^2\geqslant(x-z)(y-z)(x+y-z).$$

并确定等号何时成立.

3 如图所示,$ABCD$ 为正方形,U、V 分别是边 AB、CD 内部的点.确定使四边形 $PUQV$ 面积为最大时,U、V 的所有可能情况.



1992.3 图

4 解方程

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3.$$

5 一副牌有 $2n+1$ 张,其中一张“王”和 $1,2,\cdots,n$ 各两张.把这 $2n+1$ 张牌排成一行,使得“王”在正中间,且对每个 k,$1\leqslant k\leqslant n$,两张 k 之间恰有 $k-1$ 张牌.当 $n\leqslant 10$ 时,对怎样的 n,上述安排是可能的,对怎样的 n,上述安排是不可能的?

第25届加拿大数学奥林匹克(1993)

1 一个三角形的3条边长及一条高是4个连续的正整数,且这条高将三角形分成的两个直角三角形的边长均为整数.求这个三角形的三边长,并证明这是唯一的.

2 证明:实数 x 是有理数的充要条件是:能从数列 $x,x+1,x+2,\cdots$ 中选出3个不同的项,组成等比数列.

3 $\triangle ABC$ 中,AC 边上的中线 BD 和 AB 边上的中线 CE 相互垂直,求证:$\cot B+\cot C\geqslant\frac{2}{3}$.

4 若干个学校参加网球比赛,同一学校的选手相互不比赛,每两个学校的每两名选手之间都要比赛一场.在两个男孩或两个女孩之间进行的比赛称为单打,一个男孩和一个女孩之间的比赛称为混合单打.男孩的人数与女孩的人数至多相差1,单打的场数和混合单打的场数也至多相差1.问有奇数个选手的学校至多有几个?

5 数列 $y_1,y_2,y_3,\cdots$ 满足条件 $y_1=1$,对于 $k>0$,有

$$y_{2k}=\begin{cases}2y_k, & \text{若 } k \text{ 为偶数}\\ 2y_k+1, & \text{若 } k \text{ 为奇数}\end{cases}$$

$$y_{2k+1}=\begin{cases}2y_k, & \text{若 } k \text{ 为奇数}\\ 2y_k+1, & \text{若 } k \text{ 为偶数}\end{cases}$$

证明:每个自然数恰在数列 $y_1,y_2,y_3,\cdots$ 中出现一次.

第 26 届加拿大数学奥林匹克(1994)

1 求和：$\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}$.

2 求证：$\sqrt{2}-1$ 的每个正整数次幂都具有 $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ 的形式，其中 m 是某个正整数(例如 $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}$).

3 25 个人围一圆桌而坐，每小时进行一轮投票. 每人必须投"赞成票"或"反对票". 每个人都按下述规则行事：在第 n 轮投票时，如果他和相邻的一人投同样的票，则在第 $n+1$ 轮投票时，他投与第 n 轮一样的票. 在第 n 轮投票时，如果他投的票与相邻的两人都不一样，则在第 $n+1$ 轮投和第 n 轮不同的票. 求证：不论在第一轮投票时，各人投了什么票，总有一个时刻，从这时刻起，每个人在每一轮中投同样的票.

4 AB 是圆 Ω 的直径，P 为不在直线 AB 上的一点. 直线 AP 与 Ω 的交点为 A 和 U，直线 PB 与 Ω 的交点为 B 和 V(注意，在切线的情况下可能有 $A=U$ 或 $B=V$，且若 P 在圆上，则 $P=U=V$). 设 $|PU|=s|PA|$，$|PV|=t|PB|$，s,t 为非负实数，用 s,t 表示 $\angle APB$ 的余弦值.

5 锐角三角形 ABC 中，AD 是 BC 边上的高，H 是线段 AD 内任一点，BH 和 CH 的延长线分别交 AC、AB 于 E 和 F，求证：$\angle EDH=\angle FDH$.

第 27 届加拿大数学奥林匹克(1995)

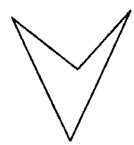
1 设 $f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$,计算和

$$f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{2}{1996}\right)+\cdots+f\left(\frac{1995}{1996}\right).$$

2 已知 a,b,c 为正实数,求证:

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

3 如果一个四边形任意一对边不相交,且有一个内角大于 180°,那么我们就称它为"镖形"(如图所示).设 C 是一个凸 s 边形,将 C 划分成 q 个四边形,任意两个四边形不重叠(也无空隙),设其中有 b 个"镖形",证明:$q\geqslant b+\frac{s-2}{2}$.



1995.3 图

4 设 n 是一个固定的正整数,证明:对任何非负整数 k,下述不定方程

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=y^{3k+2}$$

有无穷多个正整数解$(x_1,x_2,\cdots,x_n;y)$.

5 设 u 为区间(0,1)内一实参数,定义

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant u,\\ 1-\left(\sqrt{ux}+\sqrt{(1-u)(1-x)}\right)^2 & u\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

数列$\{u_n\}$如下递归定义:

$$u_1=f(1),u_n=f(u_{n-1})(n>1).$$

求证:一定存在正整数 k,使得 $u_k=0$.

第 28 届加拿大数学奥林匹克(1996)

1　如果 α,β,γ 是方程 $x^3-x-1=0$ 的根,求 $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ 的值.

2　求方程组

$$\begin{cases}\frac{4x^2}{1+4x^2}=y,\\ \frac{4y^2}{1+4y^2}=z,\\ \frac{4z^2}{1+4z^2}=x,\end{cases}$$

的所有实数解,并证明你的结论.

3　$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正整数 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列. 设 $f(n)$ 是下述排列的数目,它们满足条件:

(ⅰ) $a_1=1$;

(ⅱ) $|a_i-a_{i+1}|\leqslant 2, i=1,2,\cdots,n-1$,

试问 $f(1996)$ 能否被 3 整除.

4　已知等腰 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle B$ 的平分线与 AC 交于 D,且 $BC=BD+AD$,求 $\angle A$.

5　设 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 是给定的 m 个正有理数,且 $\sum_{k=1}^{m}r_k=1$. 对任意正整数 n,定义

$$f(n)=n-\sum_{k=1}^{m}[r_kn].$$

求 $f(n)$ 的最大值和最小值.

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.