国家工科数学课程教学基地建设教材配套丛书

高等数学教学辅导书

◎ 华南理工大学数学系
◎ 主编　王全迪　郭艾　杨立洪

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

国家工科数学课程教学基地建设教材配套丛书

高等数学教学辅导书

Gaodeng Shuxue Jiaoxue Fudao Shu

华南理工大学数学系

主编　王全迪　郭　艾　杨立洪

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是华南理工大学数学系、国家工科数学课程教学基地按照科学性、创新性、适用性、实践性的标准，为华南理工大学数学系编写的《高等数学》（上、下册）（高等教育出版社）配套的学习指导书。

本书对应教材的章节体系，系统地给出学习指导内容，全书由函数与极限，导数与微分，微分中值定理与导数应用，不定积分，定积分，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，微分方程，级数共十一章组成，每章的主要内容包括：重点难点分析，典型例题解析，教材习题选解，相关考研题目解答，练习题及练习题参考答案等内容。

本书不仅可与华南理工大学数学系的《高等数学》配合使用，在阅读了理工科本科要求的其他《高等数学》后参考，也会对学生深刻理解高等数学的基本概念和理论，准确地抓住解题关键，提高分析问题和解决问题的能力很有帮助，因而本书适合作为普通高等院校理工科本科各专业的学生学习高等数学课程的辅导书，也可以作为参加硕士研究生入学考试的复习参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教学辅导书/王全迪，郭艾，杨立洪主编.
—北京：高等教育出版社，2010.7
ISBN 978-7-04-029676-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②郭… ③杨… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 109876 号

策划编辑 王　强　**责任编辑** 张耀明　**封面设计** 于文燕
责任绘图 黄建英　**版式设计** 王艳红　**责任校对** 王　超
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市京南印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2010年7月第1版
印　　张	30.25	**印　　次**	2010年7月第1次印刷
字　　数	560 000	**定　　价**	40.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　29676-00

前　言

本书是华南理工大学数学系编写的《高等数学》（上、下册）（高等教育出版社 2009）的配套学习指导书，按对应教材的章节体系，系统地给出学习指导内容。

本书共分十一章，每章包括重点难点分析、典型例题解析、教材习题选解、相关考研题目解答以及练习题等内容。重点难点分析是提示出该章的重点内容和学生在学习中容易混淆的概念，并对相关问题给出解答；典型例题解析是通过对典型例题的解法分析训练学生的数学思维，揭示出解题规律，并通过对典型例题点评与注释，使学生加深对课程内容的理解与掌握，提高学生的解题能力；教材习题选解给出了对应教材相应习题的详细解答；相关考研题目解答是为学生参加研究生入学考试提供复习指导与参考；练习题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题，可供学生检测对基础知识的理解程度和解题方法的掌握。

全书由王全迪、郭艾、杨立洪、李少白、陈志辉、温旭辉、高文华、陈文革编写，编者均是教学一线的教师，书中的内容都是编者多年教学实践经验的积累与总结。因水平有限，错误和不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2010 年 3 月

目　　录

第一章 函数、极限与连续

一、重点难点分析

问题1 正确理解函数的定义.

决定一个函数需要两个关键点：定义域和对应法则，我们称这两个关键点为函数的两个要素，函数由这两个要素确定，而与因变量、自变量用什么字母表示或函数名的取法没有关系.

由于多值函数可以转化为若干个单值函数来研究，因此我们只严格定义了单值函数. 没有特别指出是多值的函数均意味着是单值函数.

问题2 正确理解函数的四个性质.

若没有指明函数在什么范围内是有界或单调就是指该函数在其定义域内是有界或者单调的. 函数有奇偶性的前提是定义域关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$）. 函数有周期性的前提是该函数的定义域不含在有限区间之内，且其定义域具有周期性（即存在正的常数 T，若 $x\in D$，则 $x\pm T\in D$. 教材规定周期函数在实数域内有定义可以避免这个麻烦）.

若存在正数 M，使得对于一切 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 否则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界，即：若对任何 $M>0$，总存在 $x_0\in D$，有 $|f(x_0)|>M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

学会用定义来证明结论是很重要的. 例如，我们观察发现，函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在其定义域内是无界的，但是在区间 $(-\infty,-1]$ 内有界. 要证明无界，必须要说明，对任何 $M>0$，总存在 $x_0\in D$，有 $|f(x_0)|>M$. 这就需要我们去寻找 x_0. 根据要求，要 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|>M$，只要 $\frac{1}{x}$ 是 π 的整数倍，就有 $\left|\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|$，这样为了有 $\left|\frac{1}{x}\right|>M$，可取 $\frac{1}{x_0}=([M]+1)\pi$，则 $\left|\frac{1}{x_0}\right|>M$，即取 $x_0=\frac{1}{([M]+1)\pi}$ 就能满足要求. 现在，我们按照如下格式写出证明（注意：这里的方括号是取整函数的记号，意思是取不超过括号里那个数的最大整数值作为函数值）.

证 对任何 $M>0$，取

$$k=[M]+1,\ x_0=\frac{1}{k\pi},$$

则有

$$|f(x_0)|=\left|\frac{1}{x_0}\cos\frac{1}{x_0}\right|=|k\pi|>k>M,$$

这说明总存在定义所要的 $x_0\in D$. 对照函数无界的定义，可得函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在其定义域内是无界的.

证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,-1]$ 内有界，则要求找适当的 M，对所有该区间内的点都有不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 成立. 首先利用区间与函数的特殊性将 $|f(x)|$ 放大：

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant\left|\frac{1}{-1}\right|=1.$$

注意这里的 M 不一定要最小的，只要找到即可. 从而有如下证明.

证 取 $M=2>0$，则对所有 $x\in(-\infty,-1]$，均有

$$|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1\leqslant M$$

成立.

对照函数有界的定义可知，函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,-1]$ 内有界.

问题 3　分段函数与初等函数.

分段函数可能是初等函数，也可能不是初等函数. 初等函数是指由六种基本初等函数（有些教材不算常值函数就是五种）经过有限次四则运算与有限次函数复合步骤所得到的，并能用一个式子表示的函数. 有的初等函数可能定义的时候是分段表达的. 能用一个式子表示的函数也不一定是初等函数. 例如，狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\ 0, x\in\overline{\mathbf{Q}}\end{cases}=\lim_{m\to\infty}\{\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}\}\ （\mathbf{Q}\text{ 是有理数集}）$$

就不是初等函数，因为这里用了极限运算.

初等函数在其定义区间内连续，而基本初等函数是在其定义域内连续.

问题 4　正确理解数列极限的定义.

极限的概念是研究一个量的变化所引起相关联的另一个量的变化趋势. 数列可以看做是整标变量的函数，其定义域为正整数. 数列极限的问题是研究当

项数往后移的时候，所对应的项的值有何变化趋势. 从几何直观上看，极限值对应的点是数列的凝聚中心即聚点.

数列极限的定义用逻辑符号可以表达为：对于数列 $\{u_n\}$，

$$\exists A,\ \{\forall \varepsilon>0:\ \exists N>0,\ \ni[\forall n>N:\ |u_n-A|<\varepsilon]\}\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}u_n=A.$$

上式中用了括号表示层次关系，记号：∃表示存在，∀表示所有，∋表示使得，⇔表示等价或定义. 首先通过观察或其他手段发现可能有极限值 A，再用花括号里面的内容来验证. $\forall\varepsilon>0$ 刻画的是随着项数往后移，数列与极限值的接近程度，其中的 ε 是在常数 A 确定后任意取的，但应该取得尽量的小，太大了没有意思还可能会给推理带来麻烦. ε 在确定前它是任意的，但确定了以后就是不变的常数了，这时要 $\exists N>0$，当根据条件 $\forall n>N$：$|u_n-A|<\varepsilon$ 能找到适当的 N，那么就能说明这个 N 的存在性. 在找 N 的过程中，不仅要把 ε 看成不变的常数. 而且为了方便推导，可以假定 ε 小于某一个正数. 不仅如此，为了推导方便，还可以把 $|u_n-A|$ 适当放大，这里目的是想通过放大、化简不等式，使得找 N 变得容易.

数列极限的定义实质上包含了两个过程三个要点. 两个过程是下标变量的变化过程以及与下标对应的那项值的变化过程. 理解这个定义的三个要点可以分述如下：

（1）ε 的任意性. 它必须是事先确定的任意小的正数，也只有当 ε 能取到任意小时，不等式 $|u_n-A|<\varepsilon$ 才能够表达出 u_n 与常数 A 能够无限接近的过程.

（2）正数 N 的存在性. 一般来说，ε 越小，则相应的最小的那个 N 应越大.

（3）不等式 $|u_n-A|<\varepsilon$ 并不要求对一切 u_n 都成立，而是要求对满足 $n>N$ 的项成立就行了.

问题5　数列 $\{u_n\}$ 与数列 $\{|u_n|\}$ 的敛散性的关系.

理解这个关系的关键是熟悉中学的三角不等式并善于构造反例.

（1）若 $\{u_n\}$ 收敛，则 $\{|u_n|\}$ 也收敛，且当 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 时，就有 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|A|$.

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，则由定义，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得 $\forall n>N$ 均有不等式

$$|u_n-A|<\varepsilon$$

成立. 而由三角不等式

$$\big||u_n|-|A|\big|\leqslant|u_n-A|$$

可知，

对上述 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得 $\forall n>N$ 均有不等式

$$\big||u_n|-|A|\big|<\varepsilon$$

也成立.

从而 $\{|u_n|\}$ 也收敛. 再由数列极限的定义可得

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=|A|.$$

(2) $\{|u_n|\}$ 收敛，则 $\{u_n\}$ 可能收敛，也可能发散. 例如，$u_n=(-1)^n$ 时，$|u_n|=1$，则有 $\{|u_n|\}$ 收敛而 $\{u_n\}$ 发散；再如，$u_n=1$，则 $|u_n|=1$，从而 $\{|u_n|\}$ 收敛，$\{u_n\}$ 也收敛.

(3) 如果数列 $\{u_n\}$ 在某一项后能够不变号，那么 $\{|u_n|\}$ 与 $\{u_n\}$ 同时收敛或者同时发散.

(4) 特别地，有

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

问题6　正确使用左右极限.

当在点 x_0 的左右两侧函数 $f(x)$ 的变化趋势不一致的时候，就一定要分别讨论左右极限. 例如，求

$$\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}},\ \lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}.$$

一些分段函数在分段点处的极限也必须通过求左右极限得出结论.

问题7　无穷大量与无界函数的区别和联系.

它们的区别是：无穷大量与自变量的变化趋势相联系，它指的是在自变量的某种变化趋势下，对应的函数的绝对值无限增大的过程. 而无界函数则与自变量在某一范围内的取值相联系，是指不管预先给定一个怎样的正数，在这个自变量的取值范围内至少有一点的函数值的绝对值大于这个给定的正数. 在定义中，无穷大的不等式 $|f(x)|>M$ 要求对满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>X$ 的所有点 x 都满足；而无界函数对应的不等式 $|f(x)|>M$ 仅要求在 x 的取值范围内某一点满足即可.

它们的联系是：某一过程中的无穷大量一定是相应的某一自变量范围内的无界函数；反之，某一自变量范围内的无界函数并不一定能是某一过程中的无穷大量. 例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 内无界，但当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 并不是无穷大！请读者试用定义说明.

问题8　无限个无穷小之和不一定是无穷小；无限个无穷小之积也不一定是无穷小.

举例说明. 设

$$u_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}$$

的数列，由于

$$u_n=\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

这样，可以定义一系列无穷小量

$$_m\alpha_n=\begin{cases}0, & n\leqslant m,\\ \dfrac{m}{n^2}, & n>m,\end{cases}$$

则第一个无穷小量为$_1\alpha_n$：0，$\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{3^2}$，$\frac{1}{4^2}$，…；第二个$_2\alpha_n$：0，0，$\frac{2}{3^2}$，$\frac{2}{4^2}$，…等，$u_n={}_1\alpha_n+{}_2\alpha_n+\cdots{}_m\alpha_n+\cdots$不是无穷小.

再看一系列无穷小

$$_m\beta_n=\begin{cases}1, & n<m,\\ n^{m-1}, & n=m,\\ \dfrac{1}{n}, & n>m,\end{cases}$$

则第一个无穷小量为$_1\beta_n$：1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…；第二个$_2\beta_n$：1，2，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…；第三个$_3\beta_n$：1，1，3^2，$\frac{1}{4}$，…等，则 $v_n={}_1\beta_n\cdot{}_2\beta_n\cdot\cdots\cdot{}_m\beta_n\cdot\cdots\equiv1$ 显然不是无穷小.

问题 9　两个无穷大量之和不一定是无穷大；两个无穷大量之积一定是无穷大；无穷大量与一个有界量的和或者积又如何？

两个无穷大量之和不一定是无穷大. 例如，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$，$f(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=-\frac{1}{x}$. 可以证明两个无穷大量之积一定是无穷大. 无穷大量与一个有界量的和一定是无穷大，但是无穷大量与一个有界量的积就不一定了. 例如，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$，$f(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=0$.

请读者仿照上问构造一个无限个无穷大量之积不是无穷大量的例子.

问题 10　正确利用等价无穷小求极限.

在求极限时，等价无穷小替换是整体式子中相乘相除的因子作等价替换. 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2},$$

这里的 $\tan x-\sin x$ 是两项之差，若将这里的 $\tan x$，$\sin x$ 换成 x 就错了，因为在整个式子中分子 $\tan x-\sin x$ 与 0 并不是等价无穷小.

可以证明，在求形如 $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}[1+\alpha(x)]^{f(x)}$ 的极限时，若有 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}[1+\alpha(x)]^{f(x)}=\lim_{\beta(x)\to 0}[1+\beta(x)]^{f(x)}.$$

问题 11　无穷小记号 $o(\ )$ 的运算规律.

(1) $o(x^n)\pm o(x^n)=o(x^n)$；　(2) 当 $m>n$ 时，$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^n)$；

(3) $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$；　(4) 若 $\varphi(x)$ 有界，则 $\varphi(x)\cdot o(x^n)=o(x^n)$.

这些规律可以用记号的定义证明的，在用麦克劳林公式求极限时很有用.

在此提醒大家注意两类错误：

(1) $o(x^n)-o(x^n)=0$ 一般是不成立的. 例如，$x^3=o(x)$，$x^2=o(x)$，但 $x^3-x^2\neq 0$；

(2) 当 $m>n$ 时，$\dfrac{o(x^m)}{o(x^n)}=o(x^{m-n})$ 也不一定成立. 例如，$x^3=o(x^2)$，$x^4=o(x)$，但 $\dfrac{x^3}{x^4}=\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷大量.

问题 12　$f(x)$ 在 x_0 处连续，不一定能找到一个邻域 $U(x_0,\delta)$，使得 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内连续.

例如

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\overline{\mathbf{Q}}\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，但是在该点的任意小的邻域内都存在间断点.

问题 13　$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f(x)$ 有间断点，但 $f[f(x)]$ 不一定有间断点.

例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

在 $x=\pm 1$ 处间断，但 $f[f(x)]\equiv 1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续.

问题 14　如下两种情况的函数存在：

(1) 连续点和间断点都有无限多个；

(2) 处处有定义，但是处处间断.

(1) 存在连续点和间断点都有无限多个的函数. 如，$f(x)=x[x]$，因为对于一切整数 $k\neq 0$，均有 $\lim\limits_{x\to k^+}f(x)=k^2$，$\lim\limits_{x\to k^-}f(x)=k(k-1)$，所以无穷多个非零整

数点均为其第一类跳跃型间断点，在其他点处函数均连续；（2）处处有定义，但是处处间断的函数也存在. 如，狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\overline{\mathbf{Q}}\end{cases}=\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}\right].$$

问题 15　高等数学里的三角函数的角的度量通常采用弧度制.

在高等数学里，三角函数的许多重要性质，如等价无穷小、连续性以及今后要学的求导公式、泰勒展开式等，都是直接或间接地建立在重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

的基础之上的，而在这里用的就是弧度制. 如果采用角度制，则有

$$\lim_{x^\circ\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x^\circ}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{180y/\pi}=\frac{\pi}{180},$$

很多公式都复杂多了.

二、典型例题解析

例 1　设 $y=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$，求定义域.

解　由 $\begin{cases}2-x^2>0,\\ -1\leqslant\frac{x}{2}-1\leqslant 1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}|x|<\sqrt{2},\\ 0\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$ 从而定义域为 $[0,\sqrt{2})$.

注　一般求定义域要考虑到式子中：有分母的分母不能为零，非负数才能开偶次方根，正数才能取对数，绝对值小于或等于 1 的数才能取反正弦或者反余弦. 由于式子中每一部分在不改变情况下要同时满足上述条件，求定义域不能化简再求，有几种情况同时存在时必须取交集. 分段函数要分段求，再取它们的并. 实际问题要考虑到实际意义的限制.

例 2　设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求 $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$ 的定义域.

解　$f(x+a)$ 的定义域：由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，得 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$；

$f(x-a)$ 的定义域：由 $0\leqslant x-a\leqslant 1$，得 $a\leqslant x\leqslant 1+a$.

若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，则其交要求的 $a\leqslant x\leqslant 1-a$ 成立，所求定义域为 $[a,1-a]$；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，其交要求的 $a\leqslant x\leqslant 1-a$ 不成立，所求定义域为空集，函数失去意义.

注　本例是复合后的函数定义域的求法，含有参数必须进行适当的讨论分析.

例 3 求函数 $f(x)=(x^2+1)\operatorname{sgn} x$ 的反函数.

解 令

$$y=(x^2+1)\operatorname{sgn} x=\begin{cases}x^2+1, & x>0,\\0, & x=0,\\-(x^2+1), & x<0.\end{cases}$$

当 $x>0$ 时，则有 $y=x^2+1>1$，且 $x=\sqrt{y-1}$；

当 $x<0$ 时，则 $y=-(x^2+1)<-1$，且 $x=-\sqrt{-y-1}$.

从而

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y>1,\\0, & y=0,\\-\sqrt{-y-1}, & y<-1,\end{cases}$$

因此，按照函数习惯改写过来，所求的反函数就是

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1,\\0, & x=0,\\-\sqrt{-x-1}, & x<-1.\end{cases}$$

注 我们分段用 y 来表达 x，然后改写成习惯的函数形式. 一个完整的函数表达必须标明定义域，也就是要把相应式子有意义的自变量取值范围表示出来，除非是自然定义域. 反函数的定义域就是直接函数的值域，这为求函数的值域开辟了新的途径. 现阶段所要求的反函数是关于直线 $y=x$ 对称的，这与反函数求导法则里的反函数与直接函数是同一条曲线的那个反函数不同！

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $\varphi[f(x)]$，$f[\varphi(x)]$.

解 (1)

$$\varphi[f(x)]=\begin{cases}f(x)+2, & f(x)<0,\\f^2(x)-1, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

再由 $x<1$ 时，$f(x)=e^x>0$；$x\geqslant 1$时，$f(x)=x\geqslant 1>0$，从而

$$\varphi[f(x)]=f^2(x)-1=\begin{cases}e^{2x}-1, & x<1,\\x^2-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

(2)

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1,\\\varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1.\end{cases}$$

讨论 $\varphi(x)<1$的条件：若 $x<0$，且要 $\varphi(x)=x+2<1$，则 $x<-1$；若 $x\geqslant 0$，且要 $\varphi(x)=x^2-1<1$，即$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，则 $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

讨论 $\varphi(x)\geqslant 1$ 的条件：若 $x<0$，且要 $\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $x\geqslant -1$，则$-1\leqslant x<0$；若 $x\geqslant 0$，且要 $\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即 $x\leqslant -\sqrt{2}$或 $x\geqslant\sqrt{2}$，则 $x\geqslant\sqrt{2}$.

综合上述分析，得

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1,\\ x+2, & -1\leqslant x<0,\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

注 首先根据外层函数采用代入法，得到一个内层函数的表达式，然后再分析内层函数满足条件的自变量的取值范围，这里由于内层函数是分段函数，分段讨论的是必需的.

例 5 已知 x 与 $f(x)$ 都是实数，且 $f(x)-3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x$，求 $f(x)$.

解 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则有

$$f\left(\frac{1}{t}\right)-3f(t)=\frac{2}{t}.$$

由于 x，t 都是代表定义域里面的某个数，从而有

$$\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right)-3f(x)=\dfrac{2}{x},\\ f(x)-3f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x,\end{cases}$$

解得

$$f(x)=-\frac{x}{4}-\frac{3}{4x},\ x\neq0.$$

注 给定关系式作为条件，求函数的对应法则，应该充分利用表达式的特点进行适当变形. 在这里通过变量代换，巧妙地构造了另一个等式，从而转化为解一个二元一次方程的问题！

例 6 判定下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；（2）$f(x)=\begin{cases}x(1-x), & x>0,\\ x(1+x), & x<0.\end{cases}$

解 （1）因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以知 $f(x)$ 为奇函数.

（2）当 $x>0$ 时，$-x<0$，

$$f(-x)=-x[1+(-x)]=-x(1-x)=-f(x);$$

当 $x<0$ 时，$-x>0$，

$$f(-x)=-x[1-(-x)]=-x(1+x)=-f(x),$$

从而 $f(x)$ 为奇函数.

注 判定函数的奇偶性可以严格套用定义，奇函数可用 $f(x)+f(-x)=0$ 判定，这里的第二小题是分段函数，要讨论完整. 也可以用如下结论，奇函数乘（除）偶函数为奇函数，奇函数乘（除）奇函数为偶函数，偶函数乘（除、或加减）偶函数为偶函数，奇函数加（减）奇函数为奇函数.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x}-1}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3-2^2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1^2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{3}{4}$.

注 此题不能直接应用极限的四则运算法则，要先用代数公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，约掉因式 $(x-1)$. 此题极限的过程是 x 在 1 的去心邻域里趋向于 1 的，在此过程里 $x-1\neq 0$.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to 1}(\sin x-\sin 1)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}2\sin\dfrac{x-1}{2}\cos\dfrac{x+1}{2}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{2}}{\sin\dfrac{\pi(1-x)}{2}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\pi}\cos\frac{x+1}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\sin\dfrac{x-1}{2}}{\dfrac{-(x-1)}{2}}\cdot\frac{\dfrac{\pi(1-x)}{2}}{\sin\dfrac{\pi(1-x)}{2}}=-\frac{2}{\pi}\cos 1.$$

注 这里也是利用了中学所学的公式作转化以后，才能用重要极限公式和极限运算法则解题的. 还有转化公式

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\cos x}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln[1+(\cos x-1)]}{(e^{\tan x-\sin x}-1)\ e^{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x-1)}{(\tan x-\sin x)e^{\sin x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ (\cos x-1)}{(1-\cos x)e^{\sin x}\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{e^{\sin x}\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{e^{\sin x}}=\frac{-1}{e^0}=-1.$$

注 要用等价无穷小或者两个重要极限，必须凑出实质一样的形式！另外等价无穷小的替换必须是相乘相除的无穷小因式，强行加减项和强行提取公因子是常用的转化手段.

例 10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^2}}{4x^2-3x^3}$.