文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS 聚焦图书

2010版

传承辉煌的历史　开启成功的未来

考研数学

题型集粹与练习题集

陈文灯　黄先开　编著

（理工类）

题型集训　好题荟萃
技巧丰富　经典实用

世界图书出版公司

文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS
聚焦图书

2010版

传承辉煌的历史　开启成功的未来

考研数学

题型集粹与练习题集

陈文灯　黄先开　编著

（理工类）

题型集训　好题荟萃
技巧丰富　经典实用

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学题型集粹与练习题集. 理工类 / 陈文灯,黄先开编著. —12 版. — 北京:世界图书出版公司北京公司,2004.1(2009.3 修订)
ISBN 978-7-5062-5212-6

Ⅰ. 数... Ⅱ. ① 陈... ② 黄... Ⅲ. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 习题　Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002) 第 015003 号

数学题型集粹与练习题集(理工类)
(2010 版)

主　　编: 陈文灯　黄先开
责任编辑: 世　华
装帧设计: 余曙敏

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话:88861708　邮编:100089)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 北京忠信诚胶印厂

开　　本: 787 × 1092 毫米　1/16
印　　张: 27.5
字　　数: 448 千字
版　　次: 2009 年 3 月第 12 版　2009 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5212-6/O · 333　　**定价:42.00 元**

服务热线: 010 — 88861708

前　言

《题型集粹与练习题集》(理工类）作为《数学复习指南》(理工类）的姐妹篇，自第一版问世以来已近十载，受到越来越多的读者欢迎。许多考生选择将本书和《数学复习指南》配套使用，作为考研数学复习的主要参考书籍，被有的读者戏称“双剑合璧”。

《题型集粹与练习题集》旨在强化读者对《数学复习指南》中知识点的理解和运用，将知识点与考查题型结合起来，锻炼读者的实际解题能力。本书是作者多年评阅试卷和在文登培训学校考研辅导的经验之作，所讲例题及所选习题都是从多年教学中总结出来的有代表性的试题。通过本书的学习和训练，能帮助读者达到吃透规律，举一反三的目的。

本书特点以及使用建议：

题型归纳和精讲：

本书将考研数学所要求的知识点按题型进行归类。针对每种题型，给出相应的方法和规律，同时给出若干道典型例题进行精讲，帮助读者理解具体的解题技巧。同时配合了题型演练，强化读者的理解和实际答题能力。建议读者仔细体会方法和规律部分，在做题的过程中有意识地加以应用。

阶梯化训练题：

根据难度及综合性把习题分为基础能力题和综合提高题，题量适中，选题科学，适合读者在复习的不同阶段进行训练，逐步提高解题能力。建议读者能独立去解答这些习题，有意识地应用例题中学到的方法去解题，尽量不要从一开始就依赖答案，养成独立思考的习惯。在参考答案部分，我们给出了题型训练和阶梯化训练的详细解答，读者可以借鉴和参考其中的思路和方法。

四套模拟试题加两套 09 年真题

依据大纲的难度和要求，我们为读者精编了四套模拟试卷。每套试卷都给出了详细的解答，包括分析、详解和评注，建议读者严格按照考试时间完成试卷并及时查缺补漏，以达到模拟演练的目的。另外，我们还为同学们提供了二套 09 年真题及详解，以方便读者自我检验复习效果。

本书如有不当和错误之处，恳请广大读者、数学界同仁批评指正。

编者

目　　录

第2篇　线性代数

第 3 篇　概率论与数理统计初步*

第 4 篇　模拟演练及 09 年真题详解

注:带 * 篇、章,数二考生不作要求。

第①篇　高等数学

第1章　函数·极限·连续

命题特点：

函数部分一般和其他考点联合出题，如求函数的表达式；关于函数的性质出单项选择题的可能性较大；极限部分一般出填空题或与其他部分联合出题，函数的连续部分一般出单项选择题或计算题.

题型归纳与精讲

题型1　函数奇偶性的判别

方法和规律：判别函数奇偶性的方法：(1) 主要依据奇偶性的定义.有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数；偶函数之积为偶函数；偶数个奇函数之积为偶函数；一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.(2) $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若函数的定义域关于原点不对称，则函数就无奇偶性可言.

典例精析 判别函数的奇偶性：

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\text{其中 } f(x) \text{ 为连续的偶函数.}$$

【分析】利用变量代换求出 $F(-x)$，然后比较 $F(x)$ 与 $F(-x)$ 的关系.

【解】$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } t=-u} \int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u) \xlongequal[\text{偶函数}]{f(x)\text{ 为}} -\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,

$\because$ $F(x)+F(-x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$,

$\therefore$ $F(x)$ 为奇函数.

※ **题型演练1**　判别函数的奇偶性：$F(x)=f(x)+\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$，其中 $f(x)$ 是连续的奇函数.

题型2　函数有界性的判别

方法和规律：证明或判别函数有界性的思路：(1) 利用有界性定义.(2) 闭区间上连续函数

的有界性.(3)有 z限数列必有界.(4) $x\to x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

典例精析 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$($l$ 为有限数),试证:$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【分析】本题运用闭区间上的连续函数必有界,即可得证.

【证】∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$, ∴ 对于取 $\varepsilon=\dfrac{|l|}{2}$, $\exists X>a$,

当 $x>X$ 时,恒有 $|f(x)-l|<\dfrac{|l|}{2}$,

又 $|f(x)-l|\geqslant|f(x)|-|l|$,所以 $|f(x)|-|l|<\dfrac{|l|}{2}$,

即 $|f(x)|<\dfrac{3}{2}|l|$.

∵ $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续,由闭区间上连续函数有界性,可知 $\exists S$,使 $\forall x\in[a,X]$,恒有 $|f(x)|<S$.

取 $M=\max\left\{S,\dfrac{3}{2}|l|\right\}$,则对 $\forall x\in[a,+\infty)$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,

即 函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

※ **题型演练 2** 试证 $f(x)=e^{-x^2}\int_0^x te^{t^2}\,dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

题型 3 求复合函数表达式

方法和规律:利用函数性质,可采用代入法,分析法或图示法等求解.

典例精析 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$,求 $f[f(x)]$, $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

【分析】本题为初等函数复合,可采用代入法.

【解】 $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-f^2(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{(1-x^2)^2}}=\dfrac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$,

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{f^2(x)}{f^2(x)-1}=\frac{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2-1}=\frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【评注】如果是初等函数与分段函数的复合,或两个分段函数的复合,可采用分析法;如果是两个分段函数的复合,可采用图示法.

※ **题型演练 3** 设 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n次}$,若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]$.

题型 4 已知数列的前几项数值及通项的表达式,求数列的极限

方法和规律:利用单调有界数列必有极限定理求解(求解程序:① 判断极限的存在性 $\begin{cases}\text{单调性}\\\text{有界性}\end{cases}$,方法可用数学归纳法或不等式的放缩法;② 先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后通过解关于 l 的方程,求得 l 的值,从而得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$).或者利用数列极限的定义求解(先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后在通项的两边取极限得出 l 的数值,再证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性.此步通常是利用 $|x_n-l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

典例精析 设 $x_1=2,x_2=2-\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】 利用数列的单调有界性判断数列极限的存在性,然后通过解方程求出极限.

【解】 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性:

$x_1=2>1$,若 $x_n>1$,则 $0<\dfrac{1}{x_n}<1$,从而 $x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}>1$,因此 $x_{n+1}>1$.

$x_2-x_1=-\dfrac{1}{x_1}=-\dfrac{1}{2}<0$,设 $x_n-x_{n-1}<0$,那么

$$x_{n+1}-x_n=2-\frac{1}{x_n}-2+\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}\cdot x_n}<0,$$

因此 $x_{n+1}<x_n$,

即 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,在 $x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$ 的两边取 $n\to\infty$ 时的极限得

$l=2-\dfrac{1}{l}$,即 $l^2-2l+1=0,l=1$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,

【评注】 该类题目通常是先用数学归纳法证明数列极限的存在性.

※ **题型演练 4** 设 $x_1=1,x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1},\cdots,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

题型 5 求解 $n\to\infty$ 时,n 项和的极限

方法和规律:方法有:(1) 特殊级数求和法.(2) 利用幂级数求和法.(3) 利用定积分定义求极限.(4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子 $\dfrac{1}{n}$,剩余的可用一个通项表示,则用定积分定义求解数列的极限;若数列的各项虽可提出一个因子 $\dfrac{1}{n}$,而剩余的不能用一个通项表示,但其各项是按递增或递减排列的,则用夹逼定理求极限.

典例精析 求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}$.

【分析】 本题直接求解比较不便,利用夹逼定理转换函数形式,然后利用定积分的定义求解.

【解】$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2+1}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$,

$\because\ \dfrac{i^2}{n^2}\leqslant\dfrac{i^2+1}{n^2}\leqslant\dfrac{(i+1)^2}{n^2}$,

$\therefore\ \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2+1}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$.

又 $\because\ \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{1+\dfrac{(n+1)^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+(n+1)^2}=\arctan x\Big|_0^1+0=\frac{\pi}{4}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{4}$, 故原极限 $=\dfrac{\pi}{4}$.

※ 题型演练 5　求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

题型 6　求 $n\to\infty$ 时,n 项乘积的极限

方法和规律:解法有:(1) 分子,分母同乘以一个因子,使之出现连锁反应;(2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式,在整个相乘过程中中间项相消,从而化简为易求极限;(3) 利用夹逼定理;(4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

典例精析 求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$.

【分析】本题利用夹逼定理即可求解.

【解】

$\because 1\cdot 3<2^2$

$3\cdot 5<4^2$

$\cdots\cdots$

$(2n-1)(2n+1)<(2n)^2$

$\Rightarrow 1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2(2n+1)<2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2$

$\Rightarrow 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{2n+1}<2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n$

$\cdots\cdots$

$\Rightarrow 0<\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$, 故 由夹逼定理,原极限 $=0$.

※ 题型演练 6　求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$.

题型 7　通项为积分形式的数列的极限

方法和规律： 注意：一般地 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]\mathrm{d}x$，求解 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 的方法：(1) 利用不等式放缩法对 $I_n=\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 进行估值，再用夹逼定理求极限.(2) 利用积分中值定理求极限.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

【分析】本题可利用放缩法对 $I_n=\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 进行估值.

【解】∵　在 $[0,1]$ 上，$x^n\geqslant 0$，且 $\dfrac{1}{1+x}$ 连续，

$$\therefore\quad 0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1},$$

其中 $0\leqslant\xi\leqslant 1$，故　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\xi}\cdot\dfrac{1}{n+1}=0.$

※ **题型演练 7**　求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$.

题型 8　求 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限

方法和规律： 求解 $\frac{0}{0}$ 型极限的方法：(1) 通过因式分解或根式有理化消去零因子，然后用连续函数的性质求极限；(2) 利用等价无穷小和泰勒公式求极限；(3) 利用洛必达法则求极限（这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限最有效的方法）；(4) 利用变量替换（通常是令 $x=\dfrac{1}{t}$ 或 $x=\dfrac{1}{t^2}$）求极限.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\mathrm{e}^x-1}$

【分析】本题可利用等价无穷小量的代换求解.

【解】将根式有理化，于是有

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{(\mathrm{e}^x-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}$$

$$\xlongequal[\text{代换}]{\text{由等价无穷小}}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}=1.$$

※ **题型演练 8**　求极限：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

题型 9　求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限

方法和规律： 求解 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的方法：(1) 洛毕达法则；(2) 变量替换.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^{2x}e^{t^2}dt\right)^2}{\int_{3x}^0 e^{2t^2}dt}$.

【分析】本题可利用洛必达法则求解.

【解】原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\int_0^{2x}e^{t^2}dt\cdot 2e^{4x^2}}{-3e^{18x^2}}=-\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^{2x}e^{t^2}dt}{e^{14x^2}}$

$$=-\frac{4}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}}=-\frac{4}{3}\times\frac{1}{14}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{10x^2}}=0.$$

【评注】求 $x\to+\infty$ 时的极限，通常以"抓大头"的办法解决为好(所谓抓大头就是取分子、分母中趋向于 $+\infty$ 最快的项).

※ 题型演练 9　求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt}{x}$.

题型 10　求 $\infty-\infty$ 型未定式的极限

方法和规律： 转化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$，再运用洛必达法则求解，或"抓大头"法求解.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x)$.

【分析】本题可转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型极限.

【解】原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+x\cos x)}{x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

※ 题型演练 10　求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})\right]$

题型 11　求 $0\cdot\infty$ 型未定式的极限

方法和规律： $0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 再用法则求解.

设　$\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$，则

$$\lim f(x)g(x)\quad(0\cdot\infty)=\lim\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\quad(\frac{\infty}{\infty})=\lim\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\quad(\frac{0}{0})$$

注意： 一般讲，对数函数和反三角函数一般不"下放"，因为下放后的导数比原来的复杂，违背数学运算的原则.

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.

【分析】本题可换成$\frac{\infty}{\infty}$的形式.

【解】原极限$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan\frac{\pi}{2}x}{(1-x)^{-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{\pi}{2}}{(1-x)^{-2}}=\frac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)^2}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{-2(1-x)}{-2\cos\frac{\pi}{2}x\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}=2\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\pi x}=2\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}.$$

※ 题型演练 11　求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x}\right)$

题型 12　求 1^∞，0^0，∞^0 型未定式的极限

方法和规律： 基本思路是通过对数恒等式将其化为 $0\cdot\infty\Rightarrow\frac{0}{0}$ 或$\frac{\infty}{\infty}$，再用法则.

关于 1^∞ 型极限有两种求法：

(1) 利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$或$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$(适用于底为$1\pm f(x)$或易化为$1\pm f(x)$形式的幂指函数的极限. 其解法：设$\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=\infty$，则$\lim[1\pm f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln[1\pm f(x)]}=\mathrm{e}^{\lim g(x)[\pm f(x)]}$.

用语言叙述为：括号中1后的变量(包括符号)与幂乘积的极限就是1^∞这种未定式极限的幂，其底为e.

(2) 利用对数恒等式$\Rightarrow\mathrm{e}^{\infty\cdot\ln 1}=\mathrm{e}^{\infty\cdot 0}\Rightarrow\mathrm{e}^{(\frac{\infty}{\infty}或\frac{0}{0})}$.

设　$\lim f(x)=1$，$\lim g(x)=\infty$，则　$\lim[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim\ln[f(x)]^{g(x)}}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)}$

(适用于底为单因子的呈1^∞型幂指函数的极限的求法).

典例精析 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

【分析】本题属于1^∞型未定式，可化为$\frac{0}{0}$型求解.

【解】原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{\arcsin x-x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}$，

$$\because\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{1}{6}$$

$\therefore$　原极限$=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$.

※ 题型演练 12　求极限：$\lim\limits_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}}$