普通高等教育"十一五"国家级规划教材

数学基础课程系列
简明教材

常微分方程

丁同仁

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
数学基础课程系列简明教材

常微分方程

Chang Weifen Fangcheng

丁同仁

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/丁同仁编. —北京:高等教育出版社,
2010.4
ISBN 978-7-04-029204-6

Ⅰ.①常… Ⅱ.①丁… Ⅲ.①常微分方程-
高等学校-教材 Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第028470号

策划编辑 李 蕊　**责任编辑** 边晓娜　**封面设计** 张申申
版式设计 王艳红　**责任校对** 姜国萍　**责任印制** 张泽业

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京地质印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	850×1168 1/32	版　　次	2010年4月第1版
印　　张	10.25	印　　次	2010年4月第1次印刷
字　　数	260 000	定　　价	18.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　29204-00

内 容 提 要

本书是为综合性大学与师范类院校的数学类专业编写的常微分方程教材, 内容包括基本概念、初等积分法、存在、唯一性定理、二阶微分方程、幂级数解法、拉普拉斯变换、边值问题、微分方程组、首次积分、一阶拟线性偏微分方程。本书取材于作者在北京大学数学力学系讲授“常微分方程”这门课时的一些讲义, 对其作了必要的修撰, 以突出“少而精”的原则; 同时强调课程的教学重点是微分方程的“初等积分法”和“解的存在、唯一性定理”, 前者是本书的主体, 而后者是理解微分方程问题的基本定理。

总　序

2005年,高等教育出版社为适应高校数学类专业的教学需求,经过一段时间的酝酿,决定在“十一五”期间推出一套“数学基础课程系列简明教材”。这套系列教材包含数学分析、高等代数、解析几何、复变函数、实变函数、概率统计、微分几何等。为做好此事,在高等教育出版社的主持下成立了编委会,并邀请了一批有多年教学实践经验的资深教授参加编写工作。这套系列教材中的第一批书目已经被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。经过几年的努力,这套教材开始正式与大家见面了。其中多数是新编的,也有一些是经过教学实践证明优秀的,深受读者欢迎的教材的修订版。

这套系列教材适用于我国综合性大学、理工科大学以及师范大学中的数学类专业,作为数学专业基础课的教学用书;当然,它们也可以作为理工科中非数学类专业的教学参考书。面向全国各类高校的数学系,具有较广泛的适用性,这是我们编写这套系列教材的初衷之一。

在这套系列教材中,尽管每一本教材的风格各异,但是在编写的基本理念上大家有着相当多的共识。我们希望这套教材做到以下几点:

首先,教材内容“少而精”。

众所周知,“少而精”是教学的一个基本原则。它要求在教学中要紧紧地抓住所涉及学科的基础知识与基本训练这个纲,突出重点,纲举目张。相反,内容过多、过杂、过深,势必使人不得

要领，事倍功半。但是，有时人们会看不到讲得过多的害处，会在某些口号的驱使下使事情脱离了正确的轨道，比如求多求全、追求内容的先进性或现代化等等。我们知道，基础课教材的作用在于它为读者提供后续课以及日后参加工作不可或缺的基础知识、基本方法与基本思想。所讲的内容并非越多越好，越深越好。遗憾的是，目前基础课内容有一种不断扩充的趋势。这虽然出于良好的目的，而其效果却不如愿。实际上，就以我们这些“过来人”为例，认真回想一下自己以前所学到的、真正用得得心应手的内容并不多；而且真正用得到的内容也并不很多。与其求全求多，不如精选最基本的东西，帮助读者真正掌握这些内容的实质、方法和思想。读者有了这样的基础，在他们将来遇到没有学过但确有需要的内容时，也会有能力自学。课程内容“现代化”的要求，应当是针对数学系的整个的教学体系而言的，而不是要求基础课的内容更新换代。这对数学学科而言是无需争议的事实。基础课可以在观念上、记号上为专业课的现代化做些必要的准备，但不应该是把后续课的某些基本概念提到前面来讲述。

其次，教材尽可能做到“深入浅出”。

基础课教材是初学者入门的读本，而这些初学者在此之前没有任何学习高等数学的经验。在这种情况下，就要求教材注意循序渐进、由浅入深，尽可能做到通俗易懂，最好还能做到生动有趣，引起读者的兴趣。一个好的数学基础课教材应当既逻辑严谨、体系完整，又深入浅出、平实自然。我们应当学会通过典型的实例和足够详尽的解释，来帮助初学者学会解读数学的抽象形式，透过抽象的数学叙述，正确把握和理解其内容实质。教材的真正水准应当体现在是否能把那些艰深的内容讲得让人感到自然易懂。把本来容易的东西讲得复杂难懂，那是不可取的。为此，我们要注意避免过度形式化的不良倾向。数学工作者由于长期从事数学研究与教学，已经养成了严谨的习惯，追求叙述的一般性与抽象

性，但与此同时，也往往形成了某种毛病，那就是忽视描述性语言，忽视那些抽象形式背后的直观模型，甚至抹杀直观的意义，这是很不妥当的。过度的形式化，不仅造成了初学者的困难，更重要的是歪曲了数学本质，误导了学生。在基础课教材中，为了帮助初学者理解抽象数学形式的意义，除了典型例子之外，用必要的直观描述性语言去解释它的意义，同样是十分重要、不可或缺的。

最后，教材重视基本训练，重视对学生的能力培养。

我们赞同“双基”的提法，即基础课的任务是传授基础知识和掌握基本训练。学好一门数学课程，单单知道有关数学结论是不够的，还要求读者具有一定的分析问题与解决问题的能力。这样，勤于思考，独立思考，并做好相当数量的习题，是完全必要的。这是一切在数学上学而有成的人的共同体会。通过做题可以深入、具体地理解和掌握基本概念、结论和方法；获得计算和推理的能力；理解、掌握应用基本知识和方法解决问题的途径；同时也进一步锻炼刻苦思考和探索的毅力，培养创造性的思维能力和习惯。后面一点不仅对学好数学很重要，而且对读者以后工作能力的提高和事业的成功都是很重要的。在这套教材中，我们精心选配好适合读者的各种例题与习题，它们是教材很重要的组成部分，不可忽视。习题中不仅有基本练习，而且有一些题目，需要读者经过一定的努力，花费一定的时间去探索，才能最终解决。此外，题目富有多样性、趣味性和启发性。当然，我们也不赞成出一些技巧性过强而没有训练价值的偏题与难题。

常言道：“授人以鱼，不如授人以渔”。一本好的基础课教材要努力做到授人以渔，而不只是罗列知识。这就需要帮助读者理解课程内容和方法的实质，理解其中的数学思想。在教材中要尽可能地介绍清楚问题和概念的来龙去脉，包括一些典型的例子；尽可能解释清楚解决问题的思路和方法，其中包括定理证明和计算过程的思路，以提高学生的创新意识与探索精神。

以上是我们对这套教材的希望与要求，也是我们编书的理念。把它们写在这里，主要是为了自勉，并不表明这些我们已经全部做好了、做到位了。我们希望使用这套教材的师生和其他读者多提宝贵意见，使教材得以不断完善。

“数学基础课程系列简明教材”编委会

2008 年 1 月 5 日

编者的话

在数学的应用中微分方程是一个活跃的分支。这不是偶然的，因为许多自然科学的定律可以通过微分方程得到精确的表达 (例如牛顿的第二运动定律)。实际上，微分方程的应用已深入到许多学科之中。为此，人们需要熟悉其中一些基础的内容。即使对于那些纯粹数学家来说，在微分方程的领域内不仅可以找到数学原创思想的实例，而且也是启发自己数学才能的场所。

本书取材于作者在北京大学数学力学系讲授“常微分方程”这门基础课时的一些讲义。随着时间的变迁，现在做了一些修改，表述作者最近的一些想法。

下面是本书各章内容的纲要。

第一章通过简单的例子引进了常微分方程的基本概念，其中多数例子都是常识性的，使得它们的背景变得简单和通俗。这样有利于学生对微分方程问题的理解，并为同学创造亲自动手做实验的条件。

第二章是常微分方程的初等积分法，突出了微分方程的中心问题——“求解”；而这并不是一个简单的问题。初等积分法如其名称一样虽不高深，但它解决了许多常见的实际问题，是求解常微分方程重要的基础方法。

第三章先是解释了一阶微分方程的几何意义，接着讨论了欧拉 (Euler) 折线法和皮卡 (Picard) 逐次逼近法，最后证明了皮卡存在定理和解关于参数 (初值) 的连续性和可微性定理。这些内容是微分方程的基本概念，有助于对有关问题的理解。

第四章讨论的是二阶微分方程。首先我们介绍了在实际应用中比较常见的降阶法。然后,我们介绍了二阶线性微分方程的一般理论。本章与第二章的内容通常是常微分方程教程的主题。

第五章介绍了二阶线性微分方程的幂级数和广义幂级数解法,重点是勒让德 (Legendre) 方程和贝塞尔 (Bessel) 方程。在今后学习数学物理方法时这是不可缺少的内容。

第六章讲了拉普拉斯 (Laplace) 变换。许多工程师喜欢采用拉普拉斯变换求解微分方程,这是因为它在求解初值问题和间断微分方程时有独到之处。另外,我们在这里讲述拉普拉斯变换时没有应用复变函数的理论。

第七章讲的是边值问题,先从简单的实例阐明边值问题的实际背景。主要介绍了施图姆 – 刘维尔 (Sturm-Liouville) 边值问题的特征值和特征函数。这些内容也是为了学习数理方程的理论而准备的。而其中的比较定理和振动定理是微分方程定性理论早期思想的萌芽 (所谓定性理论的思想是指“直接利用微分方程本身的特点,来确定解的某些性质”) 。

第八章的内容是微分方程组,它是第四章内容的推广。我们特别介绍了常系数线性齐次微分方程的代入法。在附录中用系数矩阵的若尔当 (Jordan) 标准块解释了在代入法中解可能的待定形式。

第九章是常微分方程的首次积分,它可以看成是线性微分方程组理论的推广。因为非线性常微分方程解的存在范围一般是局部的,所以首次积分的理论也是局部的。在处理非线性数学问题时大多需要隐函数的存在定理。

第十章是常微分方程的首次积分在一阶偏微分方程中的应用。这是很自然的内容,其实首次积分存在的充要条件就是一阶的偏微分方程,而特征线方法具有明显的几何意义。

最后,我们附有本书习题的部分答案。事实上,习题作业是学

习质量是否合格的试金石。我们建议读者应该独立完成不低于本书习题的 90%；这可作为读者自己检查学习成绩的一个标准。

另外，在本书修撰的过程中，得到了李承治教授和李蕊编辑的许多帮助，为此作者表示衷心的感谢。

目　　录

第一章 基本概念

我们已经知道一类代数方程 (如 n 元一次联立方程组) 在应用中的重要作用, 而在解析几何与微积分中我们也接触到另一类不同的方程, 其中方程的个数小于未知量的个数, 如:

(1) $x^2+y^2=1$

(设 x 是自变量, 则 $y=y(x)$ 就是一个未知函数);

(2) $x+y+z=0, \quad x^2+y^2+z^2=1$

(设 z 是自变量, 则 $x=x(z)$ 和 $y=y(z)$ 是未知函数);

(3) $\sqrt{x^2+y^2}=\exp\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$

(设 x 是自变量, 则 $y=y(x)$ 是未知函数);

等等. 这类方程叫做*函数方程*. 与代数方程相比, 函数方程在概念上有所发展: “*确定自变量与因变量之间的函数关系; 从而可以解决一类新的问题, 如轨迹问题和极值问题*”.

本书在下面考虑的方程与刚才说的函数方程有所不同, 即在方程中, 除自变量与未知函数外, 还包含着未知函数的*微商* (即导数), 例如:

(A) 在方程 $x+y+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 中, 除自变量 x 和未知函数 $y=y(x)$ 外, 还包含着未知函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(B) 在方程 $r^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+r\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+(r^2-1)u=0$ 中, 除自变量 r 和未知函数 $u=u(r)$ 外, 还包含了未知函数的一阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$ 以及二

阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}$;

(C) 在方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 中, 除自变量 x,y 和未知函数 $u=u(x,y)$ 外, 还包含了未知函数的二阶偏导数.

含有未知函数导数的方程叫做微分方程.

例如, 在上面 (A), (B) 和 (C) 中所说的方程都是微分方程.

其实, 在许多自然定律中涉及某些变量的变化率 (即微商), 因此这些自然定律的数学公式自然是一个微分方程. 例如, 牛顿第二运动定律的数学公式就是如此. 这一点可以说明"微分方程是数学联系实际的两大触角之一"的背景 (另一触角是指概率统计); 其实, 微分方程在数学专业本科阶段的学习中也是不可缺少的内容 (如微分几何).

§1.1 几个简单的实例

我们将先举几个简单的实例, 然后引出有关微分方程的一些基本概念; 它们将是我们讨论问题的共同语言.

【例 1.1】 自由落体: 设落体 B 作垂直于地面 (参考图 1–1) 的自由落体运动 {所谓自由落体是指: 假设落体只受重力的作用 (忽略空气的阻力和其他外力的作用)}. 显然, 落体 B 的位置坐标 $y=y(t)$ 随时间 t 的变化而变化. 研究自由落体的中心问题是如何确定 $y=y(t)$?

设 $y=y(t)$ 是落体 B 的位置, 则它对 t 的导数 $y'=y'(t)$ 是 B 的瞬时速度 $y'=v(t)$; 而 $y''=v'(t)$ 是 B 的瞬时加速度 $y''=a(t)$. 假定 B 的质量为 m, 则它所受的惯性力等于 my''. 因图 1–1 的坐标轴向上为正, 故重力向下为负 (即为 $-mg$, 其中 g 是重力加速度, 我们通常取 $g\approx 9.8\mathrm{m/s^2}$). 因此, B 所受的外力 $f=-mg$. 由牛顿第二运动定律推出

$$my'' = -mg,$$

亦即

$$y'' = -g, \qquad (1.1)$$

这是一个“微分方程”, 其中 $y = y(t)$ 是未知函数, 而 t 是自变量. 这样, 自由落体的问题就变成一个求解微分方程 (1.1) 的数学问题了.

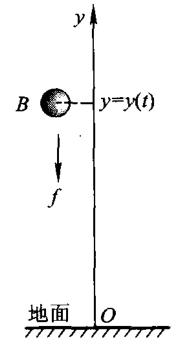

图 1 − 1

显然, 对微分方程 (1.1) 可直接进行积分, 我们得到

$$y' = -gt + C_1,$$

其中 C_1 是一个积分常数 (它显然是任意的常数); 由此再进行一次积分, 我们推出

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \qquad (1.2)$$

其中 C_2 是第二个任意常数. 这样, 公式 (1.2) 给出了对微分方程 (1.1) 的解答.

因为 C_1 和 C_2 是两个任意常数, 所以公式 (1.2) 并没有完全确定自由落体的运动规律. 究其原因是由于自由落体的运动规律还依赖于落体的初始高度 (即 $y(t_0) = h_0$) 和初始速度 (即 $y'(t_0) = v_0$), 其中 t_0 取为运动的初始时刻. 这就是说, 要确定自由落体运动还应附加初值条件:

$$y(t_0) = h_0, \qquad y'(t_0) = v_0. \qquad (1.3)$$

这样, 利用初值条件 (1.3) 推出

$$-\frac{1}{2}gt_0^2 + C_1t_0 + C_2 = h_0, \qquad -gt_0 + C_1 = v_0.$$