



2011 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

数学一

10年真题点评

✧ 文登培训学校策划 ✧

陈文灯 / 主 编

陈启浩 / 副主编

立足真题 把握规律

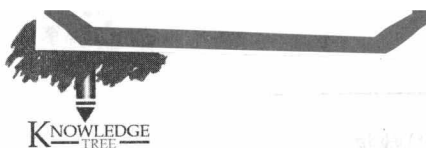
名师亲笔 点评独到

附赠真题线路图 考点一目了然



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



2011 知识树考研

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

数学一

10年真题点评

陈文灯 / 主 编

陈启浩 / 副主编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

考研数学 10 年真题点评. 1/陈文灯主编. —3 版. —北京:
北京理工大学出版社, 2010. 3

(知识树考研)

ISBN 978 - 7 - 5640 - 0707 - 2

I. ①考… II. ①陈… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学
考试 - 自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 034164 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京柯蓝博泰印务有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 13.25

字 数 / 310 千字

版 次 / 2010 年 3 月第 3 版 2010 年 3 月第 10 次印刷

定 价 / 19.80 元

责任校对 / 陈玉梅

责任印制 / 母长新

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届,积累了近百份数学试卷,这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶,也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题,除其内容外,还包含诸多有价值的信息,例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法,我们将 2001—2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题作了精心的解析,编写成《考研数学·10 年真题点评》系列丛书,奉献给广大考研朋友,书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明的语言给出解题思路;在“详解”中用简捷、新颖的方法给出详细解答;在“评注”中强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。

我们希望读者在使用本书时,不要輕易地翻阅真题的解答,只有当百思不得其解时才查阅解答;而且每做完一道真题,应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注,进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题,读完全书,我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上,在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃,而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高,从而更加从容地面对研究生入学考试。

这套系列丛书自去年问世以来,深得广大考研学子的喜爱。今年在此基础上,作了认真的修订,增加了新的内容(如增加了考题路线图),使得它更适合广大考研朋友复习时使用。

由于成书时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者和同仁指正。

编 者

2010 年 3 月

近 10 年考题路线图

(2001 年—2010 年)

注:一(1),2003 表示 2003 年第一大题第 1 小题,其中一(),二()为客观题,其他为解答题。

第一部分 高等数学

(10 年考题总数:136 题,总分值:786 分。占三部分题量之比重:54%;占三部分分值之比重:57%)

第一章 函数、极限、连续

(10 年考题总数:14 题,总分值:73 分。占第一部分题量之比重:9%;占第一部分分值之比重:9%)

题型 1 求 1^∞ 型极限(一(1),2003;一(1),2010)

题型 2 求 $0/0$ 型极限(一(1),2006;三(15),2008)

题型 3 函数性质(奇偶性,周期性,单调性,有界性)的判断或证明(二(8),2004)

题型 4 无穷小的比较或确定无穷小的阶(二(7),2004;一(1),2007;一(1),2009)

题型 5 数列敛散性的判定或数列极限求解(二(2),2003;四,2002;三(16),2006;一(5),2007;一(4),2008;一(5),2010)

第二章 一元函数微分学

(10 年考题总数:28 题,总分值:148 分。占第一部分题量之比重:21%;占第一部分分值之比重:19%)

题型 1 与函数导数或微分概念和性质相关的命题(七(2),2001;二(7),2006;一(4),2007)

题型 2 函数可导性或导函数的连续性的判定(二(3),2001;二(7),2005)

题型 3 求函数或复合函数的导数(七(1),2002)

题型 4 求反函数的导数(七(1),2003)

题型 5 求隐函数的导数(一(2),2002)

题型 6 求参数方程的导数(二(9),2010)

题型 7 函数极值点、拐点的判定或求解(二(7),2003;三(16),2010)

题型 8 函数与其导函数的图形关系或其他性质的判定(二(1),2001;二(3),2002)

题型 9 求一元函数在一点的切线方程或法线方程(四,2002;一(1),2004;二(10),2008)

题型 10 函数单调性的判断或讨论(八(1),2003;二(8),2004)

题型 11 不等式的证明或判定(八(2),2003;三(15),2004)

题型 12 在某一区间至少存在一个点或两个不同的点使某个式子成立的证明(七(1),2001;三(18),2005;三(19),2007;三(18),2009)

题型 13 方程根的判定或唯一性证明(七(1),2001;三(18),2004;一(1),2008)

题型 13 曲线的渐近线的求解或判定(一(1),2005;一(2),2007)

第三章 一元函数积分学

(10年考题总数:15题,总分值:94分。占第一部分题量之比重:11%;占第一部分分值之比重:12%)

题型 1 求不定积分或原函数(三,2001;一(2),2004)

题型 2 函数与其原函数关系的判定或性质的比较(二(8),2005;三(18),2008;一(3),2009)

题型 3 求定积分(三(17),2005;二(11),2007;二(10),2010)

题型 4 定积分的比较(一(3),2007;三(17),2010)

题型 5 求变上限积分的导数(二(10),2004)

题型 6 求反常积分或反常积分收敛性的判别(一(1),2002;一(3),2010)

题型 7 定积分的应用(曲线的弧长,面积,旋转体的体积,变力做功等)(三,2003;六,2003;三(17(II)),2009)

第四章 向量代数和空间解析几何

(10年考题总数:2题,总分值:10分。占第一部分题量之比重:1%;占第一部分分值之比重:1%)

题型 1 求点到平面的距离(一(4),2006)

题型 2 求直线绕坐标轴的旋转曲面方程(三(17(I)),2009)

第五章 多元函数微分学

(10年考题总数:17题,总分值:98分。占第一部分题量之比重:13%;占第一部分分值之比重:12%)

题型 1 多元复合函数的偏导的判定或求解(四,2001;二(9),2005;三(18(I)),2006;二(12),2007;二(9),2009;一(2),2010)

题型 2 多元隐函数的偏导的求解或判定(二(10),2005)

题型 3 多元函数连续、可导与可微的关系(二(2),2001;二(1),2002)

题型 4 求曲面的切平面或法线方程(一(2),2003)

题型 5 多元函数极值的判定或求解(二(3),2003;三(19),2004;二(10),2006;三(15),2009)

题型 6 求多元函数的最值(三(17),2007;三(17),2008)

第六章 多元函数积分学

(10年考题总数:33题,总分值:201分。占第一部分题量之比重:24%;占第一部分分值之比重:26%)

题型 1 求二重积分(五,2002;三(15),2005;三(15),2006)

题型 2 二重积分的比较(一(2),2009)

题型 3 交换二重积分的积分次序(一(3),2001;二(10),2004;二(8),2006)

题型 4 求三重积分(二(12),2009)

题型 5 求对弧长的曲线积分(二(11),2009)

题型 6 求对坐标的曲线积分(六,2001;六(2),2002;一(3),2004;三(19),2006;一(6),2007;三(16),2008;二(11),2010)

题型 7 求对面积的曲面积分(二(14),2007)

题型 8 求对坐标的曲面积分(三(17),2004;一(4),2005;一(3),2006;三(18),2007;二(12),2008;三(19),2009;三(19),2010)

题型 10 与曲线积分相关的判定或证明(六(1),2002;五,2003;三(19(I)),2005)

题型 11 求曲线积分中被积函数中的未知函数的表达式(三(19(II)),2005)

题型 12 求函数的方向导数,求梯度、散度或旋度(一(2),2001;八,2002;一(3),2005;一(2),2009)

题型 13 重积分的物理应用题(转动惯量、重心、形心等)(二(12),2010)

第七章 无穷级数

(10年考题总数:15题,总分值:111分。占第一部分题量之比重:11%;占第一部分分值之比重:14%)

题型 1 无穷级数敛散性的判定(二(2),2002;二(9),2004;二(9),2006;一(4),2009)

题型 2 求无穷级数的和(七(2),2002;三(16),2005;三(20),2007;三(16),2009)

题型 3 求函数的幂级数展开或收敛域或判断其在端点的敛散性(五,2001;四,2003;三(16),2005;三(17),2006;二(11),2008;三(18),2010)

题型 4 求函数的傅里叶系数或函数在某点的展开的傅里叶级数的值(一(3);2003;三(19),2008)

第八章 常微分方程

(10年考题总数:12题,总分值:65分。占第一部分题量之比重:9%;占第一部分分值之比重:8%)

题型 1 求一阶线性微分方程的通解或特解(一(2),2005;一(2),2006;三(18(II)),2006;二(9),2008)

题型 2 二阶可降阶微分方程的求解(一(3),2002)

题型 3 求二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解(二(10),2009;三(15),2010)

题型 4 已知二阶线性齐次或非齐次微分方程的通解或特解,反求微分方程(一(1),2001;一(3),2008)

题型 5 求欧拉方程的通解或特解(一(4),2004)

题型 6 常微分方程的物理应用(八,2001;三(16),2004)

第二部分 线性代数

(10年考题总数:57题,总分值:306分。占三部分题量之比重:22%;占三部分分值之比重:

22%)

第一章 行列式

(10年考题总数:4题,总分值:16分。占第二部分题量之比重:7%;占第二部分分值之比重:5%)

题型1 求矩阵的行列式(十(2),2001;一(5),2004;一(5),2005;一(5),2006)

第二章 矩阵

(10年考题总数:10题,总分值:46分。占第二部分题量之比重:18%;占第二部分分值之比重:15%)

题型1 判断矩阵是否可逆或求逆矩阵(一(5),2008)

题型2 解矩阵方程或求矩阵中的参数(一(4),2001)

题型3 矩阵的秩的计算或证明(二(15),2007;三(20),2008;一(6),2010)

题型4 求矩阵的伴随矩阵(一(6),2009)

题型5 初等矩阵与初等变换的关系的判定(二(11),2004;二(12),2006)

题型6 两个矩阵关系(等价、相似或合同等)的判定(二(12),2005;一(8),2007)

第三章 向量

(10年考题总数:10题,总分值:39分。占第二部分题量之比重:23%;占第二部分分值之比重:13%)

题型1 向量组线性相关性的判定或证明(二(4),2003;二(12),2004;二(11),2005;二(11),2006;一(7),2007;三(20(Ⅱ)),2009)

题型2 根据向量的线性相关性判断空间位置关系或逆问题(二(4),2002;二(13),2010)

题型3 求过渡矩阵(一(5),2003;一(5),2009)

第四章 线性方程组

(10年考题总数:13题,总分值:99分。占第二部分题量之比重:23%;占第二部分分值之比重:32%)

题型1 齐次线性方程组基础解系的求解或判定(九,2001)

题型2 求线性方程组的通解(九,2002;三(20(Ⅲ)),2005;二(13),2007;三(20(Ⅰ)),2009)

题型3 讨论含参数的线性方程组的解(三(20),2004;三(21),2005;三(21),2007;三(21),2008;三(20),2010)

题型4 根据含参数的方程组的解,反求参数或其他(三(20),2006)

题型5 两个线性方程组的解的关系(二(5),2003)

题型6 直线的方程和位置关系的判定(十,2003)

第五章 矩阵的特征值和特征向量

(10年考题总数:12题,总分值:72分。占第二部分题量之比重:21%;占第二部分分值之比重:24%)

题型1 求矩阵的特征值或特征向量(九,2003;三(21(Ⅰ)),2006;二(13),2008;二(13),

2009;三(21(I)),2009)

题型2 已知一个矩阵的特征值或特征向量,求与其相关的矩阵的特征值、特征向量或其他问题(三(22),2007)

题型3 将矩阵对角化或判断矩阵是否可对角化(三(21),2004;三(21(II)),2006)

题型4 相似矩阵的求解或判定或其逆问题(二(4),2001;十(1),2001;十,2002;一(6),2010)

第六章 二次型

(10年考题总数:8题,总分值:34分。占第二部分题量之比重:14%;占第二部分分值之比重:11%)

题型1 化实二次型为标准形或求相应的正交变换(三(20(II)),2005)

题型2 已知含参数的二次型的标准形或秩,反求参数或正交矩阵(一(4),2002;三(20(I)),2005;三(21(I)),2010)

题型3 二次型方程与二次曲面的关系(一(6),2008)

题型4 矩阵合同的判定或证明(二(4),2001)

题型5 与矩阵的规范型相关的命题(三(21(II)),2009)

题型6 判断或证明矩阵为正定矩阵(三(21(II)),2010)

第三部分 概率论与数理统计

(10年考题总数:62题,总分值:292分。占三部分题量之比重:24%;占三部分分值之比重:21%)

第一章 随机事件和概率

(10年考题总数:4题,总分值:17分。占三部分题量之比重:6%;占三部分分值之比重:6%)

题型1 求随机事件的概率(十一(2),2003;一(6);2005;一(9),2007)

题型2 随机事件的运算(二(13),2006)

第二章 随机变量及其分布

(10年考题总数:8题,总分值:32。占三部分题量之比重:13%;占三部分分值之比重:11%)

题型1 根据概率反求或判定分布中的参数(一(5),2002;二(14),2006;一(8),2010)

题型2 一个函数为某一随机变量的分布函数或分布密度的判定(一(5),2002)

题型3 已知一维随机变量的分布,求概率(一(6),2004;二(14),2008;一(7),2010)

题型4 求一维随机变量函数的分布(三(22(I)),2006)

第三章 二维随机变量及其分布

(10年考题总数:19题,总分值:96分。占三部分题量之比重:31%;占三部分分值之比重:33%)

题型 1 求二维离散型随机变量的联合分布律或分布函数或边缘概率分布(十一(2),2001;三(22(I)),2004;二(13),2005;三(22),2005;三(22(II)),2009)

题型 2 求二维随机变量的条件概率或条件密度函数(十一(1),2001;一(10),2007;三(22(I)),2008;三(22(I)),2009;三(22),2010)

题型 4 已知二维随机变量的分布,求概率(一(5),2003;一(6),2006;三(22(II)),2006;二(16),2007;三(22(I)),2007)

题型 5 求两个随机变量函数的概率分布(三(23(II)),2007;一(7),2008;三(22(II)),2008;一(8),2009)

第四章 随机变量的数字特征

(10年考题总数:8题,总分值:31分。占第三部分题量之比重:13%;占第三部分分值之比重:11%)

题型 1 求一维随机变量的数学期望或方差或二阶中心矩(十一(1),2003;一(7),2009;二(14),2010)

题型 2 求一维随机变量函数的数学期望或方差(十一,2002)

题型 3 两个随机变量的协方差或相关系数的求解或判定(二(5),2001;二(14),2004;三(22(II)),2004;一(8),2008)

第五章 大数定律和中心极限定理

(10年考题总数:1题,总分值:3分。占第三部分题量之比重:2%;占第三部分分值之比重:1%)

题型 1 利用切比雪夫不等式估计概率(一(5),2001)

第六章 数理统计的基本概念

(10年考题总数:22题,总分值:113分。占第三部分题量之比重:35%;占第三部分分值之比重:39%)

题型 1 分位数的求解或判定(二(13),2004)

题型 2 求参数的矩估计量或矩估计值或估计量的数字特征(十二(1),2002;三(23(I)),2004;三(24(I)),2007;三(23(I)),2009)

题型 3 求参数的最大似然估计量或估计值或估计量的数字特征(十二(2),2002;三(23(II)),2004;三(23),2006;三(23(II)),2009)

题型 4 总体或统计量的分布函数的判定或求解(二(6),2003;十二(1)(2),2003;二(14),2005)

题型 5 与无偏性、一致性或有效性有关的命题(十二(3),2003;三(24(II)),2007;三(23(I)),2008;二(14),2009;三(23(I)),2010)

题型 6 求统计量的数学期望或方差或两个统计量的协方差(十二,2001;三(23),2005;三(23(II)),2008;三(23(II)),2010)

题型 7 求单个正态总体均值的置信区间(一(6),2003)

目 录

近 10 年考题路线图(2001—2010 年)	I
--------------------------------	---

近 10 年真题集

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	1
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	4
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	8
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	11
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	15
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	19
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	23
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	26
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	30
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	33

近 10 年真题分析、详解及评注

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	36
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	47
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	62
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	73
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	91
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	106
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	121
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	136
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	152
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题分析、详解及评注	166
附 录 研究生入学考试中常见三个问题解析	178

2010 年研究生入学统一考试 数学一试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x =$

- (A) 1. (B) e. (C) e^{a-b} . (D) e^{b-a} . 【 】

(2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F_2' \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$

- (A) x . (B) z . (C) $-x$. (D) $-z$. 【 】

(3) 设 m, n 均是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性

- (A) 仅与 m 的取值有关. (B) 仅与 n 的取值有关.
(C) 与 m, n 的取值都有关. (D) 与 m, n 的取值都无关. 【 】

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$

- (A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$. (B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$.
(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$. (D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$. 【 】

(5) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 则

- (A) $r(A) = m, r(B) = m$. (B) $r(A) = m, r(B) = n$.
(C) $r(A) = n, r(B) = m$. (D) $r(A) = n, r(B) = n$. 【 】

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$, 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.
(C) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$. 【 】

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $P\{X = 1\} =$

- (A) 0. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$. (D) $1 - e^{-1}$. 【 】

(8) 设 $f_1(x)$ 是标准正态分布的概率密度函数, $f_2(x)$ 是 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 且 $f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases}$, ($a > 0, b > 0$) 为概率密度, 则 a, b 应满足

- (A) $2a + 3b = 4$. (B) $3a + 2b = 4$.
(C) $a + b = 1$. (D) $a + b = 2$. 【 】

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中横线上)

(9) 设 $x = e^{-t}$, $y = \int_0^t \ln(1+u^2) du$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} =$ _____.

(10) $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx =$ _____.

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x|$ ($x \in [-1, 1]$), 起点为 $(-1, 0)$, 终点为 $(1, 0)$, 则曲线积分 $\int_L xy dx + x^2 dy =$ _____.

(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心竖坐标 $\bar{z} =$ _____.

(13) 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$, 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 所形成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$ _____.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X = k) = \frac{C}{k!}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), 则 $EX^2 =$ _____.

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

(17) (本题满分 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n \ln |t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由.

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

(19) (本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 求点 P 的轨迹 C , 并计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面位于 C 上方的部分.

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

已知线性方程组 $Ax = b$ 有两个不同的解,(I) 求 λ, a ; (II) 求方程 $Ax = b$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$,

(I) 求矩阵 A ;(II) 证明矩阵 $A + E$ 为正定矩阵, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(X, Y) = Ae^{-2x^2 + 2xy - y^2} \quad (-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty),$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1 - \theta$	$\theta - \theta^2$	θ^2

其中 $0 < \theta < 1$ 未知, 以 N_i 表示来自总体 X 的随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数 ($i = 1, 2, 3$), 试求常数 a_1, a_2, a_3 , 使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试 数学一试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 为等价无穷小, 则

- (A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$. (B) $a=1, b=\frac{1}{6}$. (C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$. (D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$.

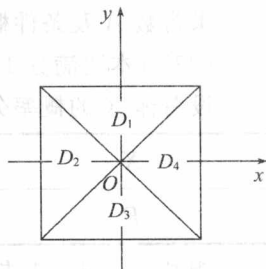
【 】

(2) 如图, 正方形 $\{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为四个区域

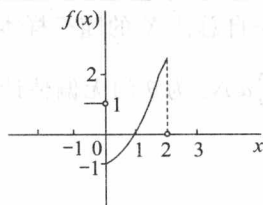
$D_k (k=1, 2, 3, 4)$, $I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$, 则 $\max_k I_k =$

- (A) I_1 . (B) I_2 .
(C) I_3 . (D) I_4 .

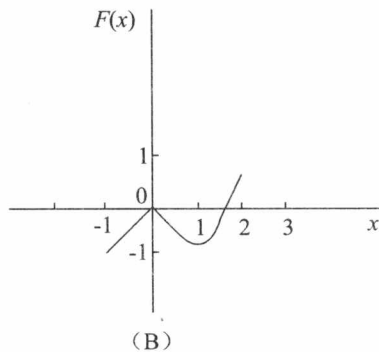
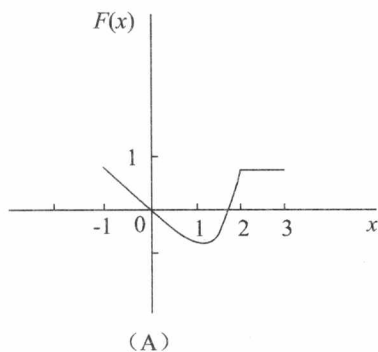
【 】

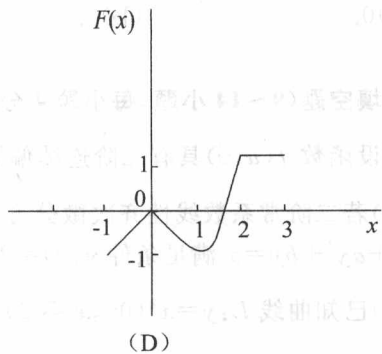
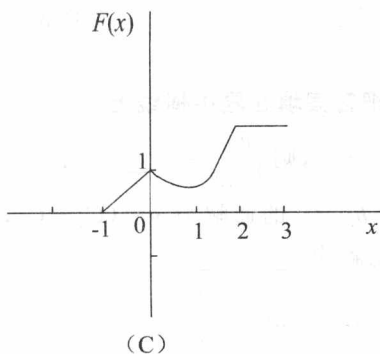


(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为



则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为





【 】

(4) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

【 】

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 R_3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

【 】

(6) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$.

【 】

(7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $EX =$

(A) 0.

(B) 0.3.

(C) 0.7.

(D) 1.

【 】

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{2}$, 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点的个数为