现代数学基础丛书 134

# 算子代数与非交换 $L_p$ 空间引论

许全华　吐尔德别克　陈泽乾　著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书　134

# 算子代数与非交换 $L_p$ 空间引论

许全华　吐尔德别克　陈泽乾　著

科 学 出 版 社
北 京

## 内 容 简 介

本书介绍算子代数与非交换 $L_p$ 空间的基本内容，共分 6 章. 第 1 章和第 2 章阐述 $C^*$ 代数的基本理论，包括 Gelfand 变换、连续函数演算、Jordan 分解和 GNS 构造等内容. 第 3 章和第 4 章系统论述 von Neumann 代数的基本理论，涵盖了核算子、算子代数的局部凸拓扑、Borel 函数演算、von Neumann 二次交换子定理和 Kaplansky 稠密性定理、正规泛函等内容. 第 5 章介绍非交换 $L_p$ 空间的基本性质，包括非交换测度空间、非交换 Hölder 不等式、非交换 $L_p$ 空间的对偶性、可测算子以及非交换测度空间的张量积等内容. 第 6 章是若干例子，它们是前述各章内容的补充与综合应用. 附录介绍 Hilbert 空间上紧算子的谱理论. 全书内容简练、结构清晰，每个结果都给出详细的证明并且例题充分翔实.

本书可作为数学专业的研究生教材，也可供从事数学和理论物理研究的教师与科研人员参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

算子代数与非交换 $L_p$ 空间引论/许全华，吐尔德别克，陈泽乾著. —北京：科学出版社，2010. 5

(现代数学基础丛书；134)

ISBN 978-7-03-027247-8

Ⅰ. 算… Ⅱ. ①许… ②吐… ③陈… Ⅲ. 算子代数 Ⅳ. O177.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 068895 号

责任编辑：王丽平 房 阳／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010年5月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010年5月第一次印刷 印张：13
印数：1—3 000 字数：250 000

**定价：45.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 《现代数学基础丛书》编委会

主　编：杨　乐

副主编：姜伯驹　李大潜　马志明

编　委：（按姓氏笔画排序）

王启华　王诗宬　冯克勤　朱熹平

严加安　张伟平　张继平　陈木法

陈志明　陈叔平　洪家兴　袁亚湘

葛力明　程崇庆

# 《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经被破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

# 前　言

算子代数是泛函分析的一个重要方向, 它的基本内容是 $C^*$ 代数与 von Neumann 代数. $C^*$ 代数可以看作局部紧拓扑空间理论在非交换方向的发展, 而 von Neumann 代数则是经典测度与积分理论的推广. 历史上, 为了研究量子力学的数学基础, von Neumann 与 Murray、Gelfand、Naimark 在 20 世纪 40 年代奠定了算子代数的基础. 随后经过众多数学家的努力, 算子代数的基本理论日臻完善并被广泛应用于其他数学领域, 如 K 理论、非交换几何、量子概率、算子空间和非交换调和分析等, 同时它还是研究量子统计物理、量子场论和量子信息与量子计算等许多物理学理论的数学工具. 掌握算子代数的基本理论, 对于学习和理解当代数学与物理学众多前沿领域的知识是十分必要的.

本书主要介绍算子代数与非交换 $L_p$ 空间的基本内容, 第 1 章和第 2 章介绍 $C^*$ 代数的基本理论; 第 3 章和第 4 章介绍 von Neumann 代数的基本理论; 第 5 章和第 6 章简要介绍非交换 $L_p$ 空间的基本性质以及相关的各种例子.

第 1 章介绍 $C^*$ 代数的一些基本性质. 该章最重要的结论是 Gelfand 基本定理, 即交换 $C^*$ 代数同构于某个局部紧拓扑空间上连续函数全体构成的 $C^*$ 代数. 有了这个定理, 就可以把 $C^*$ 代数上的解析函数演算推广为连续函数演算, 连续函数演算是 $C^*$ 代数理论中一个很有用的工具.

第 2 章由两部分组成. 第一部分介绍 $C^*$ 代数上正线性泛函的基本性质, 第二部分讨论 $C^*$ 代数的表示问题. 我们将证明任何一个 $C^*$ 代数都同构于 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 的某个 $C^*$ 子代数, 最后给出有限维 $C^*$ 代数的结构.

第 3 章讨论 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 上的几种局部凸拓扑. 前两章研究 $C^*$ 代数时主要用到 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 的一致拓扑 (算子范数确定的拓扑), 该章将介绍另外六种局部凸拓扑. 虽然它们都比前者弱, 但在研究 von Neumann 代数时经常要用到. 我们还将研究 von Neumann 代数的一些很基本的性质. 特别是在 3.4 节, 我们要介绍 Borel 函数演算, 它是连续函数演算的推广.

第 4 章进一步介绍 von Neumann 代数的基本性质. 首先证明 von Neumann 代数的两个基本定理, 即 von Neumann 二次交换子定理与 Kaplansky 稠密性定理; 其次讨论正规线性泛函和正规同态的基本性质; 最后介绍 $C^*$ 代数的 von Neumann 代数包络, 它建立了 $C^*$ 代数与 von Neumann 代数之间联系的纽带.

第 5 章介绍非交换 $L_p$ 空间的基本性质, 主要包括非交换测度空间、非交换 Hölder 不等式、对偶性定理、可测算子以及非交换测度空间的张量积等内容.

第 6 章则是若干例子, 它们可以看成是前述各章内容的补充与综合应用. 这些例子通常要涉及不同章节的内容, 需要读者融会贯通.

第 5 章和第 6 章通常不包含在算子代数的内容中, 但它们是算子代数基本内容的自然延伸, 而且在非交换概率以及算子空间理论中有重要的应用. 考虑到国内目前还没有介绍这方面内容的书籍, 本书增加了这两章的内容.

阅读本书需要测度论与拓扑向量空间的基础知识, 建议读者参考 Rudin 的两部名著: *Real and Complex Analysis* 和 *Functional Analysis.* 另外, 本书给出了一个附录, 介绍 Hilbert 空间上算子的极分解和紧算子的谱理论. 这是为没有该方面基础知识的读者准备的.

本书是为数学专业的研究生设计的教材, 其材料基于多年来我在法国佛朗什-孔泰大学 (Université de Franh-Comté) 为研究生讲授算子代数基础课程时撰写的讲稿. 为了便于初学者学习和掌握, 全书力求简洁明了, 每个结果都给出详细的证明并且例题尽量做到充分翔实. 同时, 每章后面都配有一定数量的习题, 供学生作为课后练习以便加强对所学内容的理解和掌握. 另外, 需要进一步学习和了解算子代数内容的读者可以参考 Dixmier、Kadison-Ringrose、Pedersen、Sakai 和 Takesaki 等的专著, 算子代数与非交换 $L_p$ 空间在其他数学领域的某些最新应用则可参见 Pisier 与我写的综述文章以及我即将出版的专著 (见参考文献).

本书原本是用法文和英文写成的讲稿, 吐尔德别克和陈泽乾将其翻译成中文, 其中别克翻译了前 4 章和附录, 陈泽乾翻译了后两章. 陈泽乾用本书初稿在中国科学院武汉物理与数学研究所为研究生讲授算子代数课程时对书稿作了仔细订正, 其中尹智协助校订了最后两章. 我最后对书稿作了统一的修改和补充.

许全华
2009 年 2 月于贝桑松

# 目录

# 第 1 章　$C^*$ 代　数

本章介绍 $C^*$ 代数的一些基本性质. 本章最重要的结论是 Gelfand 基本定理, 即交换 $C^*$ 代数同构于某个局部紧空间上定义的连续函数全体构成的 $C^*$ 代数. 有了这个定理, 我们就可以将 $C^*$ 代数上的解析函数演算推广为连续函数演算, 这是 $C^*$ 代数理论中一个很有用的工具. 本章内容依次为: 1.1 节讨论谱集与预解集; 1.2 节证明 Gelfand 基本定理; 1.3 节讨论连续函数演算及其应用; 1.4 节证明 $C^*$ 代数的所有正元素构成一个闭锥, 并且任何 $C^*$ 代数都有逼近单位元; 1.5 节讨论 $C^*$ 代数的同态与理想.

## 1.1　谱与预解式

本节首先给出 $C^*$ 代数的定义, 然后介绍它的元的谱集与预解集及其基本性质. 本节的大部分结果对 Banach 代数也成立. 以后没有特别声明时, 我们考虑的线性空间都是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.

**定义 1.1.1**　设 $\mathbb{A}$ 是一个复 Banach 空间.

(1) 若 $\mathbb{A}$ 上定义了一个乘法运算并满足条件:

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{A},$$

则称 $\mathbb{A}$ 为一个 Banach 代数.

(2) Banach 代数 $\mathbb{A}$ 上的对合是指在 $\mathbb{A}$ 上定义的一个满足下列条件的 $*$ 运算: 对任意元 $x, y \in \mathbb{A}$ 和任意复数 $\lambda$ 有

(i) $(x^*)^* = x$;

(ii) $(x+y)^* = x^* + y^*$;

(iii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$;

(iv) $(xy)^* = y^* x^*$,

$x^*$ 称为 $x$ 的伴随.

(3) 具有对合的 Banach 代数 $\mathbb{A}$ 称为一个 $C^*$ 代数, 若 $\mathbb{A}$ 满足

$$\|xx^*\| = \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{A}.$$

(4) 代数 $\mathbb{A}$ 称为一个单位代数, 若 $\mathbb{A}$ 具有单位元, 即存在 $e \in \mathbb{A}$ 使得

$$xe = ex = x, \quad \forall x \in \mathbb{A}.$$

(5) 代数 $\mathbb{A}$ 称为一个交换代数, 若

$$xy = yx, \quad \forall x, y \in \mathbb{A}.$$

**注 1.1.1**　下列命题成立:

(1) 对合是在 $C^*$ 代数 $\mathbb{A}$ 上的一个等距同构映射, 即

$$\|x^*\| = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{A}.$$

事实上, 由 $\|x\|^2 = \|xx^*\| \leqslant \|x\|\|x^*\|$ 得知 $\|x\| \leqslant \|x^*\|$, 再由伴随得到等式.

(2) 若 Banach 代数 $\mathbb{A}$ 存在单位元 $e$, 则单位元 $e$ 是唯一的. 若单位代数 $\mathbb{A}$ 是 $C^*$ 代数, 则 $e^* = e$ 且 $\|e\| = 1$ (除非 $\mathbb{A} = \{0\}$).

(3) 若 $\mathbb{A}$ 中的元 $e$ 和 $e'$ 分别满足

$$ex = x, \quad xe' = x, \quad \forall x \in \mathbb{A}$$

($e$ 和 $e'$ 分别称为 $\mathbb{A}$ 的左单位元和右单位元), 则 $e = e'$. 因此 $\mathbb{A}$ 具有单位元.

**约定**　将总是用 1 表示单位元, 对 $x \in \mathbb{A}$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$, $x + \lambda$ 表示 $\mathbb{A}$ 的元 $x + \lambda 1$.

**单位化**　设 $\mathbb{A}$ 是一个没有单位元的 $C^*$ 代数. 令

$$\widetilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \times \mathbb{C} = \{(x, \lambda) : x \in \mathbb{A},\ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

在 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 上引入如下乘法运算:

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu)$$

和对合运算

$$(x, \lambda) \to (x^*, \overline{\lambda}),$$

那么 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 成为一个具有对合的单位代数, 其单位元素为 $(0, 1)$. 通过自然对应 $x \mapsto (x, 0)$, 我们可以把 $\mathbb{A}$ 看成 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 的一个子代数. $\mathbb{A}$ 是 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 的一个理想, 即

$$\widetilde{y}x,\ x\widetilde{z} \in \mathbb{A}, \quad \forall x \in \mathbb{A}, \forall \widetilde{y},\ \widetilde{z} \in \widetilde{\mathbb{A}}.$$

在 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 上定义如下范数:

$$\|(x, \lambda)\| = \sup_{y \in \mathbb{A},\ \|y\| \leqslant 1} \|xy + \lambda y\|.$$

要验证这个函数满足范数的条件, 只需证明: $\|(x, \lambda)\| = 0 \Rightarrow (x, \lambda) = (0, 0)$. 若不然, 假设 $\lambda \neq 0$, 那么对任意 $y \in \mathbb{A}$ 有 $xy + \lambda y = 0$. 从而 $(-\lambda^{-1}x)y = y$, 即 $-\lambda^{-1}x$ 是 $\mathbb{A}$ 的左单位元. 再取伴随可知 $-\overline{\lambda^{-1}}x^*$ 是 $\mathbb{A}$ 的右单位元. 故 $\mathbb{A}$ 有单位元, 矛盾! 又当 $x \in \mathbb{A}$ 时, $\|(x, 0)\| = \|x\|$. 故 $(x, \lambda) = (0, 0)$.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

因为对任意 $x \in \mathbb{A}$ 有 $\|(x,0)\| = \|x\|$, 对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有 $\|(0,\lambda)\| = |\lambda|$, 故可将 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别看成 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 的子空间 $\mathbb{A} \times \{0\}$ 和 $\{0\} \times \mathbb{C}$. 由于 $\mathbb{A}$, $\mathbb{C}$ 都是 Banach 空间, 故它们是 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 的闭子空间.

考虑线性泛函 $\varphi : \widetilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{C}$ 使得 $\varphi(x,\lambda) = \lambda, \forall (x,\lambda) \in \widetilde{\mathbb{A}}$. 由于 $\ker\varphi = \mathbb{A}$ 是 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 中的闭子空间, 从而 $\varphi$ 是连续的. 故

$$|\lambda| \leqslant \|\varphi\|\|(x,\lambda)\|, \quad \forall (x,\lambda) \in \widetilde{\mathbb{A}}.$$

又

$$\|x\| = \|(x,0)\| \leqslant \|(x,\lambda)\| + \|(0,-\lambda)\| \leqslant (1 + \|\varphi\|)\|(x,\lambda)\|.$$

从而得到

$$\|x\| + |\lambda| \leqslant (1 + 2\|\varphi\|)\|(x,\lambda)\|, \quad \forall (x,\lambda) \in \widetilde{\mathbb{A}}.$$

显然

$$\|(x,\lambda)\| \leqslant \|x\| + |\lambda|.$$

因此 $(x,\lambda) \mapsto \|x\| + |\lambda|$ 定义了 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 上的一个等价范数. 由于在新范数下 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 是完备的, 故 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 是一个 Banach 代数 (注意: 在这个新范数下 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 虽然是一个 Banach 代数, 但不是 $C^*$ 代数).

下面证明 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 是一个 $C^*$ 代数, 即

$$\|(x,\lambda)\|^2 \leqslant \|(x,\lambda)^*(x,\lambda)\|.$$

这是因为

$$\begin{aligned}
\|(x,\lambda)\|^2 &= \sup_{y\in\mathbb{A},\ \|y\|\leqslant 1} \|xy + \lambda y\|^2 \\
&= \sup_{y\in\mathbb{A},\ \|y\|\leqslant 1} \|y^*(x^*xy + \lambda x^*y + \overline{\lambda}xy + |\lambda|^2 y)\| \\
&\leqslant \sup_{y\in\mathbb{A},\ \|y\|\leqslant 1} \|(x^*x + \lambda x^* + \overline{\lambda}x + |\lambda|^2)y\| \\
&= \|(x,\lambda)^*(x,\lambda)\|.
\end{aligned}$$

故 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 是一个单位 $C^*$ 代数. $\mathbb{A}$ 是 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 的余维数为 1 的理想. $\widetilde{\mathbb{A}}$ 称为 $\mathbb{A}$ 的单位化.

**定义 1.1.2** 设 $\mathbb{A}$ 是一个 $C^*$ 代数, $x \in \mathbb{A}$.

(1) 如果 $x^* = x$, 则称 $x$ 为自伴的 (埃尔米特的). 用 $\mathbb{A}_h$ 表示 $\mathbb{A}$ 的所有自伴元构成的集合.

(2) 如果 $xx^* = x^*x$, 则称 $x$ 为正规的.

(3) 如果 $x^* = x = x^2$, 则称 $x$ 为投影.

(4) 如果存在 $y \in \mathbb{A}$ 使得 $xy = yx = 1$ ($\mathbb{A}$ 是单位代数), 则称 $x$ 为可逆的. 这时 $y$ 是唯一的, 称为 $x$ 的逆元并记为 $x^{-1}$. 用 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 表示 $\mathbb{A}$ 的所有可逆元的集合.

(5) 如果 $xx^* = x^*x = 1$ ($\mathbb{A}$ 是单位代数), 则称 $x$ 为酉元. 用 $\mathcal{U}(\mathbb{A})$ 表示 $\mathbb{A}$ 的所有酉元构成的集合.

**注 1.1.2**　我们有下列事实:

(1) $\mathbb{A}_h$ 是 $\mathbb{A}$ 的一个实子空间 (即在实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性子空间). 设 $x \in \mathbb{A}$. 令

$$\mathrm{Re}x = \frac{x + x^*}{2}, \quad \mathrm{Im}x = \frac{x - x^*}{2\mathrm{i}},$$

则 $\mathrm{Re}x$ 和 $\mathrm{Im}x$ 都是自伴元且 $x = \mathrm{Re}x + \mathrm{i}\mathrm{Im}x$. 易证 $(\mathrm{Re}x, \mathrm{Im}x)$ 是满足这个等式的唯一一组自伴元. $\mathrm{Re}x$ 和 $\mathrm{Im}x$ 分别称为 $x$ 的实部和虚部.

(2) $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 是 $\mathbb{A}$ 的一个开集, 并且关于 $\mathbb{A}$ 的乘法运算 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 是一个群. $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 对伴随运算封闭且 $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. $\mathcal{U}(\mathbb{A})$ 是 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 的一个子群.

**定义 1.1.3**　设 $\mathbb{A}$ 是一个 $C^*$ 代数, $x \in \mathbb{A}$.

(1) 若 $\mathbb{A}$ 是单位代数, 令

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}:\ \lambda - x \notin \mathcal{G}(\mathbb{A})\}, \quad \rho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x).$$

$\sigma(x)$ 和 $\rho(x)$ 分别称为 $x$ 的谱集与预解集. $x$ 的预解式定义为

$$R(x, \lambda) = (\lambda - x)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(x).$$

(2) 若 $\mathbb{A}$ 不是单位代数, 那么把 $x$ 看成 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 中的元素, 类似地定义 $\sigma(x)$ 和 $\rho(x)$, 这里 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 为 $\mathbb{A}$ 的单位化.

**注 1.1.3**　若 $\mathbb{A}$ 不是单位代数, 则 0 总属于 $\sigma(x)$.

**定理 1.1.1**　设 $\mathbb{A}$ 是一个单位 $C^*$ 代数, $x \in \mathbb{A}$.

(1) $\rho(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个开集, 并且向量值函数 $R: \lambda \mapsto R(x, \lambda)$ 在 $\rho(x)$ 中是解析的, 即对任意 $\xi \in \mathbb{A}^*$, 标量值函数 $R: \lambda \mapsto \xi(R(x, \lambda))$ 在 $\rho(x)$ 中解析, 其中 $\mathbb{A}^*$ 是 $\mathbb{A}$ 的对偶空间.

(2) $\sigma(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个非空紧集, 并且 $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}:\ |\lambda| \leqslant \|x\|\}$.

**证明**　(1) 记 $R(\lambda) = R(x, \lambda)$. 设 $f: \lambda \mapsto \lambda - x$. 显然, $f$ 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{A}$ 的连续映射. 由于 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 是 $\mathbb{A}$ 的开集, 从而 $\rho(x) = f^{-1}(\mathcal{G}(\mathbb{A}))$ 是 $\mathbb{C}$ 的开集. 因为映射 $x \mapsto x^{-1}$ 在 $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 上连续, 因此 $R$ 连续. 固定 $\lambda_0 \in \rho(x)$. 设 $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}:\ |\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0)\|^{-1}\}$, 则

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= R(\lambda_0)[R(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + 1]^{-1} \\ &= R(\lambda_0) \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n R(\lambda_0)^n (\lambda - \lambda_0)^n. \end{aligned}$$

右边的级数在 $\{\lambda\in\mathbb{C}:\ |\lambda-\lambda_0|<\|R(\lambda_0)\|^{-1}\}$ 中的任何紧子集上按范数一致收敛. 对任意 $\xi\in\mathbb{A}^*$ 和所有 $\lambda\in\{\lambda\in\mathbb{C}:\ |\lambda-\lambda_0|<\|R(\lambda_0)\|^{-1}\}$ 有

$$\xi(R(\lambda))=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\xi(R(\lambda_0)^{n+1})(\lambda-\lambda_0)^n.$$

从而 $R:\lambda\mapsto\xi R(x,\lambda)$ 在 $\rho(x)$ 中解析.

(2) 设 $\lambda\in\mathbb{C}$ 且 $\lambda>\|x\|$. 由 $\|\lambda^{-1}x\|<1$ 可以知道 $1-\lambda^{-1}x$ 可逆. 故 $\lambda\in\rho(x)$, 从而 $\sigma(x)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:\ |\lambda|\leqslant\|x\|\}$. 因此 $\sigma(x)$ 是有界的. 由于 $\sigma(x)$ 是 $\rho(x)$ 的补集, 可知 $\sigma(x)$ 是闭的. 所以 $\sigma(x)$ 是 $\mathbb{C}$ 的一个紧集.

假设 $\sigma(x)=\varnothing$, 即 $\rho(x)=\mathbb{C}$, 则对任意的 $\xi\in A^*$, $\xi(R(\lambda))$ 是一个整函数, 即它是 $\mathbb{C}$ 上的解析函数. 对 $\lambda>\|x\|$ 有

$$R(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)^{-1}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

因此,

$$\|R(\lambda)\|\leqslant\sum_{n\geqslant 0}\frac{\|x\|^n}{|\lambda|^{n+1}}\to 0,\quad \text{当 } |\lambda|\to\infty \text{ 时}.$$

由此可得, 对任意的 $\xi\in\mathbb{A}^*$, 当 $|\lambda|\to\infty$ 时有 $\xi[R(\lambda)]\to 0$. 从而由 Liouville 定理 (有界整函数是常函数) 可得 $R(\lambda)=0$. 这与 $R(\lambda)$ 为可逆的矛盾! □

**定义 1.1.4** 设 $\mathbb{A}$ 是一个 $C^*$ 代数, $x\in\mathbb{A}$. 定义 $r(x)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(x)\}$. 我们称 $r(x)$ 为 $x$ 的谱半径.

由定理 1.1.1 知 $r(x)\leqslant\|x\|$. 下面的结论给出了谱半径的具体表达式.

**定理 1.1.2** 设 $\mathbb{A}$ 是一个 $C^*$ 代数, $x\in\mathbb{A}$, 则

$$r(x)=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

**证明** 不妨设 $\mathbb{A}$ 是一个单位 $C^*$ 代数. 设 $\lambda\in\sigma(x)$, $n\in\mathbb{N}$. 由

$$\lambda^n-x^n=(\lambda-x)(\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}x+\cdots+\lambda x^{n-2}+x^{n-1})$$

可得, 如果 $\lambda^n-x^n$ 可逆, 则 $\lambda-x$ 也可逆, 这与假设矛盾. 因此 $\lambda^n\in\sigma(x^n)$. 故

$$|\lambda|^n\leqslant r(x^n)\leqslant\|x^n\|,$$

所以, $r(x)\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

下面证明相反的不等式成立. $R(x,\lambda)$ 在 $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|>\|x\|\}$ 上有如下的 Laurent 级数展开式:

$$R(x,\lambda)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}},$$

其中右边的级数按范数收敛. 从而对任意的 $\xi \in \mathbb{A}^*$ 和 $|\lambda| > \|x\|$, 级数

$$\xi(R(x,\lambda)) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\xi(x^n)}{\lambda^{n+1}}$$

绝对收敛. 因为 $R(x,\lambda)$ 在 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(x)\}$ 上有定义并且解析, 故级数

$$\xi(R(x,\lambda)) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\xi(x^n)}{\lambda^{n+1}}$$

在 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(x)\}$ 上绝对收敛 (经典级数的性质). 特别地,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi(x^n)}{|\lambda|^{n+1}} = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{A}^*, \ \forall |\lambda| > r(x).$$

因此, 由 Banach-Steinhauss 定理可得序列 $\left\{\dfrac{x^n}{\lambda^{n+1}}\right\}$ 有界. 所以, 对任意 $|\lambda| > r(x)$ 存在 $C > 0$ 使得

$$\|x^n\| \leqslant C|\lambda|^{n+1}, \quad \forall n \geqslant 0.$$

从而, 对任意 $|\lambda| > r(x)$ 有 $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant |\lambda|$. 故

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r(x).$$

结合前面已证结论, 我们得到 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ 存在并且等于 $r(x)$. □

**定理 1.1.3**　设 $\mathbb{A}$ 是一个 $C^*$ 代数, 则

$$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}, \quad \forall x, y \in \mathbb{A}.$$

**证明**　不妨设 $\mathbb{A}$ 是一个单位 $C^*$ 代数. 设 $\lambda \notin \sigma(xy) \cup \{0\}$, 则 $\lambda - xy$ 可逆. 设 $u = -(\lambda - xy)^{-1}$, 有 $xyu = uxy = 1 + \lambda u$. 从而

$$(\lambda - yx)(1 - yux) = \lambda, \quad (1 - yux)(\lambda - yx) = \lambda.$$

因此 $\lambda - yx \in \mathcal{G}(\mathbb{A})$, 即 $\lambda \notin \sigma(yx) \cup \{0\}$. 反之亦然. 结论得证. □

**注 1.1.4**　以上关于谱与预解式的结论对 Banach 代数也成立.

**定理 1.1.4**　设 $\mathbb{A}$ 是一个 $C^*$ 代数, $x \in \mathbb{A}$.

(1) $\sigma(x^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\} = \overline{\sigma(x)}$.

(2) 若 $x$ 是正规的, 则 $r(x) = \|x\|$.

(3) 若 $x$ 是一个酉元 ($\mathbb{A}$ 是单位代数), 则 $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} = \mathbb{T}$.

(4) 若 $x$ 是自伴的, 则 $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

**证明** (1) 对 $\lambda\in\mathbb{C}$ 有 $\lambda-x\in\mathcal{G}(\mathbb{A})\Leftrightarrow\overline{\lambda}-x^*\in\mathcal{G}(\mathbb{A})$.

(2) 如果 $x$ 是正规的, 则有

$$\|x\|^4=\|x^*x\|^2=\|(x^*x)^2\|=\|(x^*)^2x^2\|.$$

于是, 由归纳法可得对任意 $n\geqslant 1$,

$$\|x\|^{2^n}=\|(x^*)^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}\|\leqslant\|(x^*)^{2^{n-1}}\|\|x^{2^{n-1}}\|=\|x^{2^{n-1}}\|^2.$$

从而

$$\|x\|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|x^{2^{n-1}}\|^{2^{-(n-1)}}=r(x).$$

因为 $r(x)\leqslant\|x\|$, 故 $\|x\|=r(x)$.

(3) 设 $x$ 是一个酉元, 有 $1=\|1\|=\|x^*x\|=\|x\|^2$. 因此 $\|x\|=1$, 从而 $\sigma(x)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leqslant 1\}$. 由 $x^{-1}=x^*$ 和 $\lambda^{-1}-x^{-1}=\lambda^{-1}(x-\lambda)x^{-1}$ 可知

$$\{\lambda^{-1}:\ \lambda\in\sigma(x)\}=\{\overline{\lambda}:\ \lambda\in\sigma(x)\}.$$

故结论成立.

(4) 不妨设 $\mathbb{A}$ 是一个单位 $C^*$ 代数. 设 $x\in\mathbb{A}_h$. 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $(-\mathrm{i}x)^n=((\mathrm{i}x)^n)^*$. 于是, 由 $x\mapsto x^*$ 的连续性可得 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^*$. 但 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ 是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 的逆元. 因此 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^*$ 是酉元. 由 (3) 知 $\sigma(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\subset\mathbb{T}$. 下面证明 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}:\ \lambda\in\sigma(x)\}\subset\sigma(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$. 事实上, 设 $\lambda\in\sigma(x)$, 有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=(\lambda-x)\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}(\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}).$$

因此 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\notin\mathcal{G}(\mathbb{A})$, 即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}\in\sigma(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$. 从而对 $\lambda\in\sigma(x)$ 有 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}|=1$, 故 $\lambda\in\mathbb{R}$. □

下面给出 $C^*$ 代数的若干具体例子.

**例 1.1.1** 设 $\mathbb{K}$ 是一个紧拓扑空间, $C(\mathbb{K})$ 是在 $\mathbb{K}$ 上的连续函数全体构成的代数. 在 $C(\mathbb{K})$ 上赋予范数

$$\|x\|=\sup_{t\in\mathbb{K}}|x(t)|$$

和对合运算 $x\mapsto\overline{x}$, 其中 $\overline{x}(t)=\overline{x(t)}$, $\forall t\in\mathbb{K}$. 那么 $C(\mathbb{K})$ 是一个 $C^*$ 代数.

**例 1.1.2** 设 $\mathbb{L}$ 是一个局部紧拓扑空间. 设 $x$ 是在 $\mathbb{L}$ 上的函数. 如果对任意 $\varepsilon>0$ 存在紧子集 $K\subset\mathbb{L}$ 使得 $|x(t)|<\varepsilon$, $\forall t\in L\backslash K$, 则称 $x$ 在无穷远处趋于 0. 记 $C_0(\mathbb{L})$ 为在 $\mathbb{L}$ 上连续且在无穷远处趋于 0 的函数全体构成的代数. 定义 $C_0(\mathbb{L})$ 上的范数和对合与例 1.1.1 相同, 则 $C_0(\mathbb{L})$ 是一个 $C^*$ 代数. 若 $\mathbb{L}$ 不是紧的, 则 $C_0(\mathbb{L})$ 不是一个单位代数.

易证, 对任意 $x \in C_0(\mathbb{L})$ 有 $\sigma(x) = x(\mathbb{L}) = \{x(t):\ t \in \mathbb{L}\}$. $x \in C_0(L)$ 是自伴的当且仅当 $x$ 是一个实值函数. $x$ 是一个酉元当且仅当 $|x(t)| = 1$, $\forall t \in \mathbb{L}$. $x$ 是一个投影当且仅当 $x$ 是 $\mathbb{L}$ 的某个子集 $E$ 的特征函数 $\chi_E$. 由于 $x$ 是连续的, 所以 $E$ 既是开集又是闭集. 从而, 当 $\mathbb{L}$ 连通时 $C_0(\mathbb{L})$ 没有非平凡投影. 如果 $\mathbb{L}$ 是紧的, 则 $x \in C(\mathbb{L})$ 可逆当且仅当 $x$ 在 $\mathbb{L}$ 上处处不为零.

**例 1.1.3** 设 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ 是一个 $\sigma$ 有限的完备测度空间. 设 $L_\infty(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ 是 $\Omega$ 上的本性有界可测函数全体构成的空间, 赋予本性上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$. 我们约定, 两个几乎处处相等的函数看成是相等的函数. 于是, $L_\infty(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ 的元素是几乎处处相等的函数类. 在 $L_\infty(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ 上赋予乘法为函数的乘法、对合为函数的伴随, 那么 $L_\infty(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ 成为一个单位 $C^*$ 代数, 其单位元为几乎处处等于 1 的函数类. 元 $x$ 是一个投影当且仅当 $x = \chi_E$, $E \in \mathcal{F}$. 因为 $L_\infty(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ 是一个交换的单位 $C^*$ 代数, 由 Gelfand 定理 (定理 1.2.1) 可知, $L_\infty(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ 等距同构于 $C(\mathbb{K})$, 其中 $\mathbb{K}$ 是一个紧拓扑空间 (即 $L_\infty(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ 的谱集). 这就是经典的 Kakutani 定理.

当 $\Omega = \mathbb{N}$ 时, 赋予离散点值测度, $L_\infty(\Omega)$ 成为 $\ell_\infty$, 它是以 $\|x\|_\infty = \sup\limits_n |x_n|$ 为范数的所有有界复数序列全体构成的空间. 因此, $\ell_\infty$ 是一个单位 $C^*$ 代数. $c_0$ 是 $\ell_\infty$ 的一个子 $C^*$ 代数. 易证 $c_0$ 没有单位元.

**例 1.1.4** 设 $\mathbb{H}$ 是一个复 Hilbert 空间, 记内积为 $\langle\cdot\ ,\ \cdot\rangle$ (设内积对第二个变量线性、第一个变量共轭线性). 设 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 是 $\mathbb{H}$ 上的所有连续线性映射构成的、赋予一致范数 (算子范数) 的 Banach 空间. 我们将 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 中的元称为 $\mathbb{H}$ 上的算子. 更一般地, 从复 Hilbert 空间 $\mathbb{H}_1$ 到复 Hilbert 空间 $\mathbb{H}_2$ 的连续线性映射称为从 $\mathbb{H}_1$ 到 $\mathbb{H}_2$ 的连续算子.

算子 $x \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ 的伴随算子是指 $x^* \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, 它满足

$$\langle x^*\xi, \eta\rangle = \langle \xi, x\eta\rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{H}.$$

赋予对合为算子的伴随、乘法为算子的复合, $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 成为一个单位 $C^*$ 代数, 其单位元是 $\mathbb{H}$ 上的恒等算子. $x \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ 是一个酉元当且仅当 $x$ 是一个等距满射. $x \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ 是一个投影当且仅当 $x$ 是从 $\mathbb{H}$ 到 $\mathbb{H}$ 的某个闭子空间 $\mathbb{K}$ 上的正交投影算子, 此时 $\mathbb{K}$ 是 $x$ 的值域.

当 $\mathbb{H}$ 为有限维空间时, 记 $\mathbb{H}$ 的维数为 $n$, 那么可以把 $\mathbb{H}$ 当作 $\ell_2^n$. 此时在 $\ell_2^n$ 的自然基下, 将 $\mathcal{B}(\ell_2^n)$ 与 $n \times n$ 阶复矩阵全体构成的代数 $\mathbb{M}_n$ 看作相同的代数. 对 $x \in \mathcal{B}(\ell_2^n)$, $\sigma(x)$ 是 $x$ 的特征值全体.

**例 1.1.5** 设 $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ 是 $\mathbb{H}$ 上的所有紧算子构成的集合, 它是 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 的一个子空间. 显然, $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ 关于乘法运算和对合封闭. 故 $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ 的一个子 $C^*$ 代数, 而且是它的理想. 当 $\mathbb{H}$ 为无限维空间时, $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ 没有单位元.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com