"十一五"规划教材

教育部高等理工教育数学基础课程

教学改革与实践项目

高等数学

学习指导

（上册）

主编 刘凤林 赵亚光

主审 李 伟

西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

"十一五"规划教材
教育部高等理工教育数学基础课程
教学改革与实践项目

高等数学
学习指导
（上 册）

主编　刘凤林　赵亚光
主审　李　伟

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是与教育部“高等理工教育数学基础课程教学改革与实践项目”的研究改革成果《高等数学》(西安交通大学出版社出版)教材配套的学习指导书。本书按《高等数学》(上册)的章节顺序,将每章分为若干单元,每个单元由三部分组成,第一部分是知识要点,将本单元需重点掌握的知识要点以提纲的形式罗列出来;第二部分是释疑解惑,对一些概念性比较强的内容和难于掌握的方法进行深入剖析;第三部分是例题解析,通过典型题目的分析、解答和小结,强化学生分析问题、解决问题的能力。此外,在每章最后配了一套检测题,并附上《高等数学》(上册)书后B组习题的选解,以供学习者检验学习效果。

本书对教材具有相对的独立性,可为工科和其他非数学专业学生学习以及准备报考硕士研究生的人员复习高等数学提供解题指导,也可供讲授《高等数学》的教师在备课和批改作业时参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导. 上册/刘凤林,赵亚光主编. —西安:西安交通大学出版社,2010.2
ISBN 978-7-5605-3285-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘…②赵… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第026530号

书　　名　高等数学学习指导(上册)
主　　编　刘凤林　赵亚光
责任编辑　张梁

出版发行　西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　陕西江源印刷科技有限公司

开　　本　727mm×960mm　1/16　印张　13　字数　236千字
版次印次　2010年2月第1版　2010年2月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-3285-1/O·306
定　　价　19.50元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

前　言

本书是与李伟教授主编、马知恩教授主审的《高等数学》(西安交通大学出版社出版)相配套的学习辅导书,可作为工科院校高等数学习题课教材。

本书按照《高等数学》的章节顺序编排,以便与教学需求保持同步。为使读者使用方便,编写时注意到使这本书具有相对的独立性,对应教材的顺序,每章分为若干个单元。每单元包括如下几部分内容:

一、知识要点

提纲挈领地归纳本单元的主要内容,而具体的概念、定理、公式等一般不再列出。

二、释疑解惑

针对读者在学习本单元内容时常常问及的一些带有共同性的又有重要意义的问题,选出若干个给予分析、解答,以帮助读者释疑解惑,加深对概念、定理的理解。有些问题的解答还对教学内容作了补充和提高,以供一些学有余力的学生阅读参考。

三、例题解析

按照本单元的教学要求,在教材原有例题和习题的基础上,适当选取概念性、启发性或综合性较强的例题,本着用"已知"认识"未知"、用"已知"研究"未知"、用"已知"解决"未知"的原则,加以剖析、解答,并在同类型例题后进行归纳总结,帮助读者抓住学习规律,提高解题能力。

除了逐单元编写上述几部分内容外,每一章结束后还配备了自测题,以供读者了解知识的掌握程度。此外在每章的最后还附上了《高等数学》教材各节习题中B组题的选解,供读者参考。

本书由十一位教师编写(按编写的章节次序排列):刘凤林(第1章)、李君(第2章)、夏国坤(第3章)、佘泽红(第4章)、廖嘉(第5章)、赵亚光(第6章)、王玉杰(第7章)、孙成功(第8章)、王爱平(第9章)、刘寅立(第10章)、王霞(第11章)。

在本书的编写过程中,我们得到了天津科技大学理学院数学系各位教师的大力支持和帮助,在此向他们致以诚挚的谢意!

限于作者的水平,书中难免存在不足之处,恳请广大读者批评指正。

作　者

2009年7月

目 录

第 1 章　函数与极限

第 1 单元　映射与函数

一、知识要点

1. 集合:集合的概念、关系、运算、区间、邻域及去心邻域.

2. 映射:映射的定义、三种特殊的映射(满射、单射、一一映射)、逆映射与复合映射.

3. 函数:函数的定义、函数的三种运算(算术运算、求反函数、函数的复合)、分段函数;几种具有特殊性质的函数(有界函数、单调函数、奇偶函数、周期函数);基本初等函数、初等函数.

二、释疑解惑

1. 集合与其子集之间有什么样的关系?你对"真子集"是怎样理解的?

答　说"集合 A 是集合 B 的子集"或"集合 B 包含集合 A",指的是集合 A 的所有元素都属于集合 B,即 $\forall x\in A$,必有 $x\in B$. 由子集的定义可知,集合 A 一定是集合 A 本身的子集. 如果集合 A 是集合 B 的子集,即 $A\subset B$,且有某个 $y\in B$,但是 $y\notin A$,这时集合 A 就是集合 B 的"真子集". 由此可知,真子集中元素的个数一定"少"于原集合中元素的个数,且在集合 A 的所有子集中,除 A 以外,其他子集都是 A 的真子集.

2. 确定一个函数至少要有哪两个基本要素?试分析下列各组函数哪些是同一函数.

(1) $f(x)=2\ln x, g(x)=\ln x^2$;　　(2) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=x, g(x)=|x|$;　　(4) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

答　确定一个函数需要有定义域和对应法则两个基本要素,如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同、对应法则也相同,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数,记作 $f(x)\equiv g(x)$. 在题目所给的四组函数中只有第(2)组是同一函数,第(1)、(4)组定义域不同,第(3)组对应法则不同.

3. 在函数定义中,对定义域 D、值域 V 以及对应法则 f 有什么具体要求?试

分析“y 是正数 x 的平方根”这一对应法则可以构成函数关系吗？$x_n=\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$可以构成函数关系吗？

答 在函数定义中要求定义域 D 是“非空实数集”；值域 V 是“实数集 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}$ 的一个子集”；对应法则 f 是“给定的一个将 D 中每一个 x 与实数集 $\mathbf{R}$ 中的某一个 y 的对应关系”，这里 y 必须是唯一的.

“y 是正数 x 的平方根”这一对应法则不能构成函数关系，因为与每一个正数 x 对应的 y 不是唯一的(有$\sqrt{x}$与$-\sqrt{x}$两个). 如果改为“y 是正数 x 的算术根”，这样的对应法则就可以构成函数关系了.

$x_n=\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$可以构成函数关系，因为它的定义域是全体正整数，而正整数的倒数是唯一的.

4. 函数 $y=\sin x$ 有反函数吗？

答 在定义域$(-\infty,+\infty)$内，函数 $y=\sin x$ 没有反函数. 因为对于每一个 y 值，有无穷多个 x 值与之对应，因此它不能确定一个 x 是 y 的对应关系. 但是当限定自变量的取值时，它可以有反函数. 如当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时，反函数为 $x=\arcsin y$；当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$时，反函数为 $x=\pi+\arcsin y$ 等.

5. 什么样的两个函数可以复合为一个复合函数？

答 并不是任意两个函数都可以复合的，如 $f(x)=\ln x$ 和 $g(x)=-(1+x^2)$ 就不能复合为 $f[g(x)]$. 只有 $g(x)$的值域在 $f(x)$的定义域内(即 $g(D)\subset D_f$，其中 D_f 表示函数 $f(x)$的定义域)时，才能复合为 $f[g(x)]$. 其实在很多时候我们对这样的要求是可以放宽的，只要 $g(D)\cap D_f\neq\varnothing$，就可以复合，只不过复合函数 $f[g(x)]$的定义域可能要比函数 $g(x)$的定义域小一些，它应是使得 $g(x)\in D_f$ 的那些实数 x 的集合. 如 $y=\sqrt{\ln x}$就是这样的例子，其定义域是$\{x|x\geqslant 1\}$.

6. 若函数 $f(x)$在区间$[a,c)$、$[c,b]$上都单调增加，它在区间$[a,b]$上一定单调增加吗？

答 函数 $f(x)$在区间$[a,c)$、$[c,b]$上都单调增加，它在区间$[a,b]$上不一定单调增加. 如 $y=(x)$((x)表示取 x 的小数部分)在$[0,1)$、$[1,2)$都单调增加，它在$[0,2)$不单调增加.

7. 初等函数是怎样定义的？在定义中要掌握几个要点？$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots(x>1)$是初等函数吗？

答 初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算、有限次复合，并且能用一个式子表示的函数. 在定义中要掌握三个要点：一是由什么(由基本初等函数和

常数)；二是经过什么(有限次四则运算、有限次复合)；三是怎样表示(能用一个式子表示).

$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots(x>1)$不是初等函数，它是由基本初等函数经过“无限次求和”得到的，不符合有限次四则运算的要求，因此它不是初等函数.

8. 幂指函数是初等函数吗？

答　幂指函数不一定是初等函数，例如 $f(x)=x,g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 2, & x<0\end{cases}$，则 $y=f(x)^{g(x)}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$不是初等函数. 但是当 $f(x)$和 $g(x)$都是初等函数时，幂指函数 $y=f(x)^{g(x)}(f(x)>0)$一定是初等函数，事实上 $y=f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$，它由 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=g(x)\ln f(x)$复合而成.

三、例题解析

例1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\ln(1-x)}$；

(3) $y=\ln(4-x^2)+\arcsin\dfrac{1}{x}$；　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$.

解　(1) 由 $x-1\geqslant 0$ 和 $x-2\neq 0$，得 $D=[1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 由 $1-x>0$ 和 $1-x\neq 1$，得 $D=(-\infty,0)\cup(0,1)$.

(3) 由 $4-x^2>0$、$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 和 $x\neq 0$，得 $D=(-2,-1]\cup[1,2)$.

(4) 由$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ x+2>0\end{cases}$或$\begin{cases}x+1\leqslant 0\\ x+2<0\end{cases}$得 $D=(-\infty,-2)\cup[-1,+\infty)$.

小结　*初等函数求定义域只需求出使函数表达式有意义的那些点的集合.*

例2　若函数 $f(x)$的定义域为$[-1,1]$，求函数 $f(x+1)$和 $f(1-4x^2)$的定义域.

分析　因为函数 $f(x)$的定义域为$[-1,1]$，所以只需由 $x+1\in[-1,1]$、$1-4x^2\in[-1,1]$去求 x 的取值范围即可.

解　(1) 由$|x+1|\leqslant 1$，得函数 $f(x+1)$的定义域为 $D=[-2,0]$；

(2) 由$|1-4x^2|\leqslant 1$，得函数 $f(1-4x^2)$的定义域为 $D=\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

小结　*此类抽象复合函数求定义域问题的一般解法是：若函数 $f(x)$的定义域为 D_f，根据 $g(x)\in D_f$ 求出 x 的取值范围 D，则 D 就是 $f[g(x)]$的定义域.*

例 3 设 $f(x^2+1)=x^4+1$，求函数 $f(x)$.

解 （方法一）由 $f(x^2+1)=x^4+1=(x^2+1)^2-2(x^2+1)+2$，将 x^2+1 整体用字母 x 取代，得 $f(x)=x^2-2x+2$.

（方法二）令 $u=x^2+1$，则 $x^2=u-1$，于是 $f(u)=f(x^2+1)=x^4+1=(u-1)^2+1=u^2-2u+2$，所以 $f(x)=x^2-2x+2$.

小结 给定 $f[g(x)]$ 的表达式，求函数 $f(x)$ 的表达式通常有两种解法：方法一，用"凑"的方法，将 $f[g(x)]$ 的表达式的右端凑成一个用 $g(x)$ 表示的式子，然后将式子两端的 $g(x)$ 换成 x 即可；方法二，用换元的方法，令 $g(x)=u$，先求出 $f(u)$ 的表达式，然后将式子中的 u 换成 x 即可.

例 4 若 $f(x)=1-e^x$，$g(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=1-e^{g(x)}=\begin{cases}1-e^{-1}, & x<0\\ 1-e, & x\geqslant 0\end{cases}$

$$g[f(x)]=g(1-e^x)=\begin{cases}-1, & 1-e^x<0\\ 1, & 1-e^x\geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1, & x>0\\ 1, & x\leqslant 0\end{cases}$$

例 5 求下列函数的反函数：

(1) $y=1-\ln(x+1)$；　　(2) $y=\begin{cases}\arctan x, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$.

分析 求反函数一般分为两步：一是先将 $y=f(x)$ 看做一个方程，从中解出 x（将 x 用 y 表示）；二是将解得的表达式中的变量 x 与 y 互换，便得到 $y=f(x)$ 的反函数.

解 (1) 由 $y=1-\ln(x+1)$，得 $x=e^{1-y}-1$ $(y\in(-\infty,+\infty))$，所以反函数为

$$y=e^{1-x}-1\quad(-\infty<x<+\infty)$$

(2) 当 $x<0$ 时，由 $y=\arctan x$，得 $x=\tan y$ $(y<0)$；当 $x\geqslant 0$ 时，由 $y=\sqrt{x}$，得 $x=y^2$ $(y\geqslant 0)$. 所以反函数为

$$y=\begin{cases}\tan x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$$

例 6 证明函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

分析 只需证明 $f(-x)=-f(x)$.

证明 因为 $f(-x)=\lg[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$

$$=\lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

所以函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

例 7　用奇偶函数的运算性质判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1+x^2}$;　　(2) $f(x)=|x|\tan x-\cos x$;

(3) $f(x)=\ln(1+\arctan x^2)$;　　(4) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}\ (|x|<1)$.

解　(1) 因为 x 与 $\sin x$ 是奇函数,所以 $x\sin x$ 是偶函数,又由 $1+x^2$ 是偶函数,知 $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1+x^2}$ 是偶函数.

(2) 因为 $|x|$ 是偶函数,$\tan x$ 是奇函数,所以 $|x|\tan x$ 是奇函数,又由 $\cos x$ 是偶函数,知 $f(x)=|x|\tan x-\cos x$ 是非奇非偶函数.

(3) 因为 $1+\arctan x^2$ 是偶函数,所以 $f(x)=\ln(1+\arctan x^2)$ 是偶函数.

(4) 因为 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 是属于 $g(x)-g(-x)$ 类型的函数,所以它是奇函数.

小结　奇偶函数有如下一些常用性质:

(1) 四则运算性质,如奇函数之和是奇函数,偶函数之和是偶函数,奇函数与偶函数之和是非奇非偶函数,两个奇函数之积是偶函数,两个偶函数之积是偶函数,一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数等.

(2) 复合运算性质,如若 $g(x)$ 是偶函数,则 $f[g(x)]$ 是偶函数;若 $f(x)$、$g(x)$ 都是奇函数,则 $f[g(x)]$ 是奇函数等.

(3) 若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,则 $f(x)+f(-x)$ 是偶函数,$f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

例 8　若函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数,且在 $[-1,1)$ 上的表达式为 $f(x)=x$,求 $f(x)$ 在 $[2n-1,2n+1)$ 上的表达式.

分析　由于只知道 $f(x)$ 在 $[-1,1)$ 上的表达式,因此对 $x\in[2n-1,2n+1)$,为求 $f(x)$ 的表达式,需要将 x 通过加(或减)2(周期)的整数倍,变到区间 $[-1,1)$ 内.

解　对 $x\in[2n-1,2n+1)$,有 $x-2n\in[-1,1)$,于是 $f(x)$ 在 $[2n-1,2n+1)$ 上的表达式为 $f(x)=f(x-2n)=x-2n\,(x\in[2n-1,2n+1))$.

例 9　若 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 的偶函数,且 $f(x)$ 在区间 $(0,l)$ 单调增加,证明 $f(x)$ 在区间 $(-l,0)$ 单调减少.

分析　讨论抽象函数的单调性一般要依据单调性的定义,就是比较函数在区

间上任意两不同点 $x_1<x_2$ 处函数值的大小.

证明　$\forall x_1,x_2\in(-l,0)$，设 $x_1<x_2$. 则 $-x_1,-x_2\in(0,l)$，且 $-x_1>-x_2$，于是 $f(x_1)=f(-x_1)>f(-x_2)=f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-l,0)$ 单调减少.

例 10　若函数 $f(x)$ 满足 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明 $f(x)$ 是奇函数.

分析　为了出现 $f(-x)$ 与 $f(x)$，可取 $y=-x$，由此可见要先求函数在零点的值 $f(0)$.

证明　取 $x=y=0$，有 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$，所以 $f(0)=0$，又 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，由 $0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$，得 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

思考题　如果将 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 改为 $f(x+y)=f(x)-f(y)$，结论会怎样?

例 11　将下列直角坐标系下的方程改写为极坐标系下的方程：

(1) $x^2+y^2=a^2(a>0)$；　　(2) $x^2+y^2=2ax(a>0)$；

(3) $x^2+(y-a)^2=a^2(a>0)$；　　(4) $y=x^2$.

分析　将直角坐标系下的方程改写为极坐标系下的方程，就是将直角坐标与极坐标之间的关系 $x=\rho\cos\theta$、$y=\rho\sin\theta$ 代入到直角坐标方程中，化简后解出 ρ（即将 ρ 表示为 $\rho=\rho(\theta)$）.

解　(1) 将 $x=\rho\cos\theta$、$y=\rho\sin\theta$ 代入到方程 $x^2+y^2=a^2$ 中，有 $\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=a^2$，化简得 $\rho=a(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$.

(2) 将 $x=\rho\cos\theta$、$y=\rho\sin\theta$ 代入到方程 $x^2+y^2=2ax$ 中，有 $\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=2a\rho\cos\theta$，化简得 $\rho=2a\cos\theta(-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$.

(3) 将 $x^2+(y-a)^2=a^2$ 改写为 $x^2+y^2=2ay$，将 $x=\rho\cos\theta$、$y=\rho\sin\theta$ 代入到方程 $x^2+y^2=2ay$ 中，并化简得 $\rho=2a\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

(4) 将 $x=\rho\cos\theta$、$y=\rho\sin\theta$ 代入到方程 $y=x^2$ 中，有 $\rho\sin\theta=\rho^2\cos^2\theta$，化简得 $\rho=\tan\theta\sec\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi,\theta\neq\pi/2)$.

例 12　收音机每台批发价为 90 元，成本为 60 元. 厂家为鼓励销售商采购，规定采购量超过 100 台的，每多采购 1 台，批发价就降低 1 角，但是最低批发价为 70 元.

(1) 将每台批发价 p 表示为批发量 x 的函数；

(2) 将厂家所获得的利润 L 表示为批发量 x 的函数.

分析　由于批发量在不同范围内时，批发价的计算方法不同，因此这是典型的建立分段函数的例子. 建立分段函数一定要先找好分界点，本题 $x=100$ 显然是其一，另外最低批发价为 70 元也将对应一个分界点，首先要计算出这时的批发量.

解　(1) 为列 p 与 x 的关系，必须先求 $p=70$ 时，x 的取值. 由 $100+(90-70)/0.1=300$，于是当批发量 $x=300$(台)时，批发价降到 70 元. 所以，当 $100<x\leqslant300$时，$p=90-(x-100)\times0.1=100-0.1x$，从而

$$p=\begin{cases}90, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 100-0.1x, & 100<x\leqslant 300\\ 70, & x>300\end{cases}$$

(2) $$L=(p-60)x=\begin{cases}30x, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 40x-0.1x^2, & 100<x\leqslant 300\\ 10x, & x>300\end{cases}$$

思考题　若将题目中的“规定采购量超过 100 台的，每多采购 1 台，批发价就降低 1 角”改为“规定采购量超过 100 台的，超过部分每多采购 1 台，批发价就降低 1 角”，结论又将如何？

第 2 单元　极限的概念与计算

一、知识要点

1. 极限的基本概念：极限的“$\varepsilon-N$”、“$\varepsilon-\delta$”、“$\varepsilon-X$”定义、单侧极限定义、无穷小(大)定义.

2. 极限的性质：唯一性、有界性(局部有界性)、保序性、局部保号性、子列收敛性、函数沿点列收敛性、极限与左、右极限关系.

3. 极限存在准则及两个重要极限：夹逼准则、单调有界原理，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$、$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\mathrm{e}$.

4. 极限的运算法则：四则运算法则、复合函数求极限法则.

5. 无穷小与无穷大的性质及无穷小的比较：无穷小与极限的关系、无穷小与无穷大的关系、无穷小的运算性质、无穷大的运算性质；高阶无穷小、低阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小及 k 阶无穷小的概念；高阶无穷小与等价无穷小的关系、用等价无穷小代替求极限定理.

二、释疑解惑

1. 在数列的“$\varepsilon-N$”定义中，正整数 N 的作用是什么？它依赖于什么存在？这样的 N 唯一吗？

答　正整数 N 是用来刻画 n 的变化程度的，根据数列极限的要求，对任意给定的正数 ε，当 n 变化到某一程度以后(即当 $n>N$ 时)要恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立. 一般说来，N 是与 ε 有关的，是依赖正数 ε 而存在的，对于不同的 ε，N 一般是不同的，即便对于同一个 ε，N 也是不唯一的. 比如对任意给定的正数 ε，如果存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立的话，那么对于大于 N 的任何正整数 N_1，只要当 $n>N_1$ 时，也恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立. 可见，凡是大于 N 的任何正整数 N_1，都可以作为“$\varepsilon-N$”定义中新的 N，所以这样的 N 不唯一.

2. 在一个收敛的数列 $\{x_n\}$ 的前面增加(去掉或改变)有限项，得到一个新的数列 $\{y_n\}$，数列 $\{y_n\}$ 收敛吗？

答　数列 $\{y_n\}$ 一定收敛. 事实上，若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则对任何正数 ε，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立. 在数列 $\{x_n\}$ 前增加 k 项后的数列记作 $\{y_n\}$，只要取 $N_1=N+k$，则当 $n>N_1$(此时 $n-k>N$)时，恒有 $|y_n-a|=|x_{n-k}-a|<\varepsilon$ 成立，所以数列 $\{y_n\}$ 收敛于 a.

若数列 $\{x_n\}$ 发散，同样可得数列 $\{y_n\}$ 发散.

对于去掉或改变有限项的讨论可以类似进行.

由此性质可知，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$($k$ 为给定的任意整数).

对于函数有相应结果，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+a)=A$($a$ 为给定的任意实数).

3. 数列与其子列之间的收敛性有什么关系？

答　若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则其任何子列也收敛于 a；若 $\{x_n\}$ 的某两个子列 $\{x_{n_k}\}$、$\{x_{n_l}\}$ 收敛于不同的值，则数列 $\{x_n\}$ 发散.

数列 $\{x_n\}$ 的某两个子列 $\{x_{n_k}\}$、$\{x_{n_l}\}$ 都收敛于 a，不能保证数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，如数列 $x_n=(-1)^n$ 的两个子列 $x_{4n}=1$、$x_{4n+2}=1$ 都收敛于 1，而数列 $\{x_n\}$ 不收敛于 1；但是如果收敛于 a 的两个子列 $\{x_{n_k}\}$、$\{x_{n_l}\}$ 中的项包含了数列 $\{x_n\}$ 的所有项，则数列 $\{x_n\}$ 一定收敛于 a(证明从略)，如由 $x_{2n}\to a(n\to\infty)$ 且 $x_{2n+1}\to a(n\to\infty)$，可以得到 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

4. 在“$\varepsilon-\delta$”定义中，条件“$|x-x_0|>0$”能去掉吗，为什么？以实例加以说明.

答　$x\to x_0$ 表示 x 的一个变化过程，在这个过程中 x 可以无限地接近于 x_0，但是 x 永远不会等于 x_0，而极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 表示当自变量 x 无限趋近于 x_0(但 $x\neq x_0$)时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，它是函数的一种变化趋势，与函数在 x_0 的状况无关. 因此对于任意给定的正数 ε，我们只要求在 x_0 附近的那些 x 满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，而不要求在 x_0 也有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立. 所以，定义中的条件“$|x-x_0|>0$”是必要的，不能去掉.

如：函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 点无定义，但是极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

又如：函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点的值是 $f(0)=0$，而极限值却是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

对任何正数 ε，以上两例都不能要求 $x=0$ 时，有不等式 $|f(x)-1|<\varepsilon$ 成立，于是在"ε-δ"定义中要用"$|x-0|=|x|>0$"将 $x=0$"挖掉".

5. $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 是不同的函数，但是极限运算 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)$ 却是成立的，这是为什么？

答　如前面所述，在求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，不考虑函数在 x_0 的状况，所以在求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ 时，x 是永远不等于 1 的. 于是在 $x\neq 1$ 时，有 $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)$ 成立.

6. 在极限的性质中，为了叙述的简练，我们经常用到"局部"一词，比如"局部有界"、"局部保号"等，请解释一下"局部"的确切含义？

答　这里所说的"局部"是自变量的"某一个"取值范围，它是与自变量的变化趋势有关的. 如，当 $x\to x_0$ 时，"局部"指的是 $\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时的范围，即"局部"是 x_0 的 δ 去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$；当 $x\to x_0^+$ 时，"局部"指的是 $\exists\,\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时的范围，即"局部"是开区间 $(x_0,x_0+\delta)$；当 $x\to\infty$ 时，"局部"指的是 $\exists\,X>0$，当 $|x|>X$ 时的范围，即"局部"是开区间 $(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$；当 $x\to-\infty$ 时，"局部"指的是 $\exists\,X>0$，当 $x<-X$ 时的范围，即"局部"是开区间 $(-\infty,-X)$. 其他各种情形类似.

7. "$\sin x$ 与 x 是等价无穷小"的说法正确吗？

答　上述说法不确切，无论说一个量是无穷小(大)，或在进行无穷小的比较时，都必须指出极限过程(即自变量的变化过程)，因为只有当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 才都是无穷小，并且是等价的无穷小. 所以应当说"当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小"，而在 x 的其他变化趋势下 $\sin x$ 与 x 都不同时是无穷小，更谈不到等价问题.

8. 在无穷小的运算中，我们强调：有限个无穷小的和还是无穷小. 请问任意多个无穷小的和还是无穷小吗？

答　任意多个无穷小的和不一定是无穷小. 如当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}$ 为无穷小，而 n

个(当 $n\to\infty$ 时,是无穷多个)$\frac{1}{n}$ 的和是 1,它不再是无穷小.

9. 无穷大量与无界函数有什么区别?

答 无穷大量在局部一定是无界函数(因为 $|f(x)|$ 可以大于任何正数 M);而局部无界函数却不一定是无穷大量(因为在局部不能保证 $|f(x)|$ 始终大于给定的任何正数 M),如在 $x=0$ 的某一去心邻域内 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是无界函数(事实上,$\forall M>0$ 及 $\delta>0$,取正整数 n 满足 $\frac{1}{2n\pi+\pi/2}<\delta$ 且 $2n\pi+\frac{\pi}{2}>M$,令 $x_0=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}$,则 $|f(x_0)|=2n\pi+\frac{\pi}{2}>M$,这表明函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的某一去心邻域 $\mathring{U}(0,\delta)$ 内无界),但是当 $x\to0$ 时,它不是无穷大量(事实上,对 $M_0=1$ 及 $\forall\delta>0$,取正整数 n 满足 $\frac{1}{2n\pi}<\delta$,令 $x_0=\frac{1}{2n\pi}$,则 $0<|x_0|<\delta$,而 $|f(x_0)|=0<M_0$,这表明当 $x\to0$ 时,函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不是无穷大量).

10. 在用等价无穷小代替求极限时要注意哪些问题?试分析以下三个题目的解法是否正确.

(1) 因为 $n\to\infty$ 时,$\sin\frac{1}{a^n}\sim\frac{1}{a^n}$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n\sin\frac{1}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}a^n\frac{1}{a^n}=1(a>0)$;

(2) 因为 $x\to0$ 时,$\cos x\sim1-\frac{x^2}{2}$,$e^{x^2}\sim1+x^2$,所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2/2}{1+x^2}=1$;

(3) 因为 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$.

答 在用等价无穷小代替求极限时要注意两个问题:第一,被代替的部分必须是无穷小,要用比它简单的等价无穷小代替;第二,被代替的部分必须是函数分子或分母中的一个乘积因子,绝不能是和、差的关系.本题中三个题目的解法都是不对的.

(1) 题中当 $|a|\geqslant1$,$n\to\infty$ 时,函数 $\sin\frac{1}{a^n}$ 不一定是无穷小,正确的解法是

$$\lim_{n\to\infty}a^n\sin\frac{1}{a^n}=\begin{cases}0, & 0<a<1\\ \sin1, & a=1\\ 1, & a>1\end{cases}$$

(2) 题中当 $x\to0$ 时,$\cos x$ 与 e^{x^2} 都不是无穷小,谈不到等价问题.尽管题目结果没有错,但是解题的过程是不允许的,正确解法是

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{e^{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\cos x}{\lim\limits_{x\to0}e^{x^2}}=\frac{1}{1}=1$$

(3) 题的分子是两个无穷小的差，无论是 $\tan x$，还是 $\sin x$，都不能作为函数的一个因子，因此不能分别用等价无穷小进行替代. 如果要用等价无穷小替代的方法求该极限，必须转化为乘积之后再替代，正确的解法是

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3/2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}$$

11. 复合函数能否按 $\lim f[g(x)]=f[\lim g(x)]$ 求极限？

答 复合函数一般不能按 $\lim f[g(x)]=f[\lim g(x)]$ 求极限. 例如，若 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq0\\0, & x=1\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to0}f\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$，$f\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f\left(\frac{\sin x}{x}\right)\neq f\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)$.

关于此问题更深入的讨论，将在下一单元详细阐述.

12. 在复合函数求极限定理中，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且 $g(x)\neq u_0$ $(x\neq x_0)$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=A$. 请问条件 $g(x)\neq u_0$ 能否去掉？

答 条件 $g(x)\neq u_0$ 是不能去掉的，例如：$g(x)=1$，$f(x)=\begin{cases}0, & x=1\\1, & x\neq1\end{cases}$，当 $x\to0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$（这里 $u_0=1$），$\lim\limits_{u\to1}f(u)=1$，但是极限 $\lim\limits_{x\to0}f[g(x)]\neq1$. 这是因为函数 $f[g(x)]=0$ 在 $x\to0$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to0}f[g(x)]=0$.

三、例题解析

例1 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(1-\sqrt{2-x})}{\ln x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

分析 以上都是"0/0"型极限，这类极限的计算方法较多.

第(1)题要设法约去分母中的无穷小 $x-1$.

第(2)～(4)题要设法用重要极限或相关的等价无穷小代替. 为使第(2)题计算方便，可以考虑先用 $t=x-\frac{\pi}{3}$ 作代换.

解 (1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+x^3-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)}{x-1}$